



Квадратичная функция: парабола в алгебре

Парабола помогает увидеть,
как формула превращается в график
и ответ.



Зачем изучать квадратичную функцию в 9 классе

Эта тема соединяет формулы, графики и уравнения. Она помогает решать квадратные уравнения, находить наибольшее и наименьшее значение, а также описывать реальные процессы в физике и геометрии.



Общий вид квадратичной функции

01

Стандартная запись

Квадратичная функция записывается так: $y=ax^2+bx+c$, где a , b и c — числа, а коэффициент a не равен нулю. Именно он делает функцию квадратичной.

03

Влияние коэффициента b

Коэффициент b не меняет тип графика, но смещает вершину. Поэтому при одинаковом a параболы могут выглядеть по-разному и располагаться в разных местах.

02

Роль коэффициента a

Число a задаёт направление ветвей параболы и влияет на её «ширину». Если a положительно, ветви направлены вверх; если отрицательно, график открывается вниз.

04

Значение коэффициента c

Коэффициент c показывает, где график пересекает ось Oy . При $x=0$ значение функции равно c , значит точка пересечения всегда имеет координаты $(0; c)$.

05

Почему это важно

Понимание формулы помогает быстро читать график, находить ключевые точки и переходить от записи функции к её изображению на координатной плоскости.

Симметрия графика

График квадратичной функции всегда симметричен относительно вертикальной прямой. Эта прямая делит параболу на две равные части, поэтому левый и правый участки выглядят одинаково.

Вершина параболы

У параболы есть особая точка — вершина. Если ветви направлены вверх, это самая нижняя точка графика; если вниз — самая высокая. Именно она часто важна в задачах.

Ширина и крутизна

Чем больше модуль коэффициента a , тем уже и круче выглядит параболы. Если модуль меньше, график становится более «пологим» и занимает больше места на плоскости.

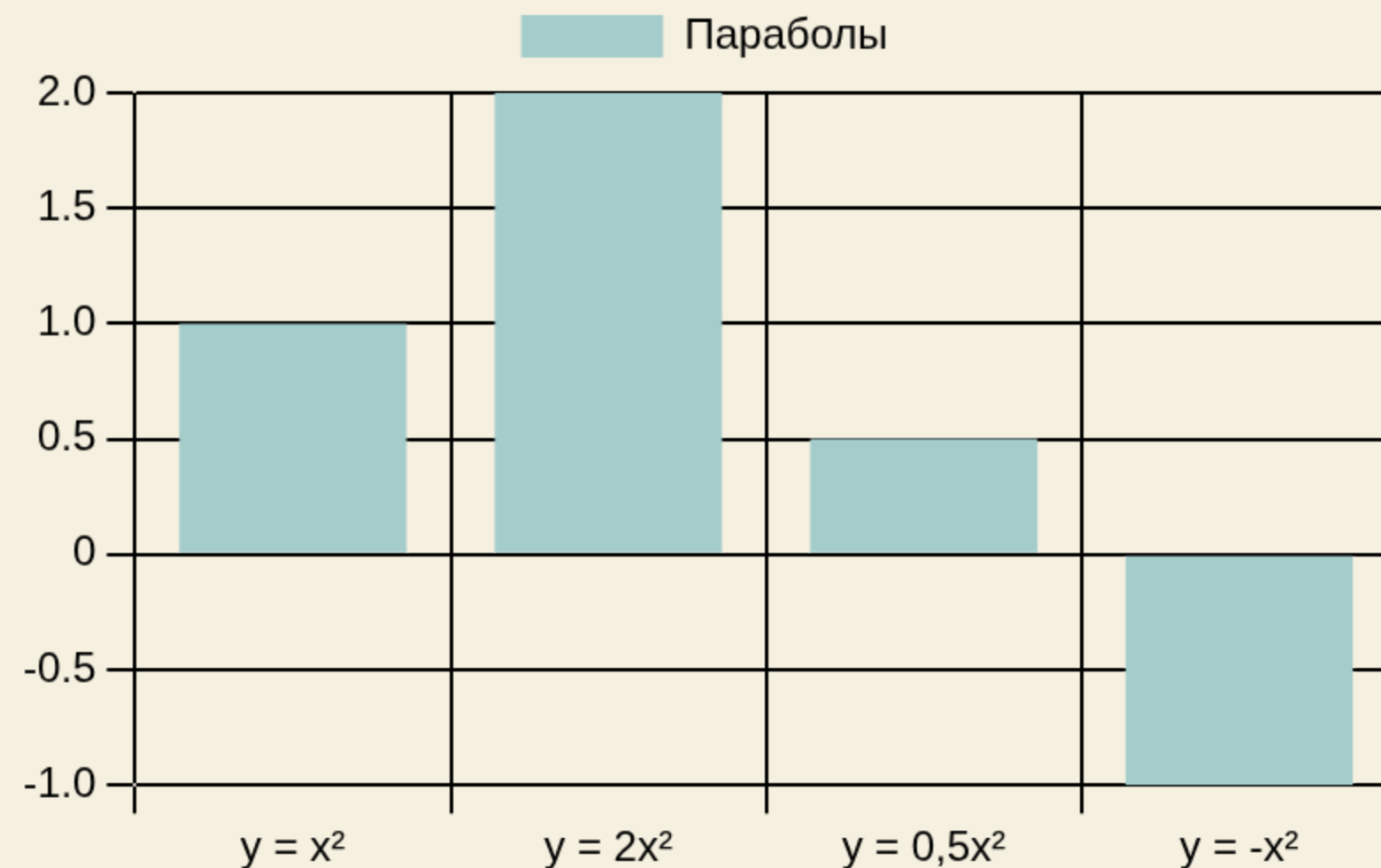
Направление ветвей

Знак коэффициента a определяет, куда смотрят ветви. Это первое, что стоит проверить при изучении графика, потому что по нему сразу видно общий вид параболы.



Парабола как график квадратичной функции

Как коэффициент а влияет на форму параболы



- На рисунке видно, что при одинаковой основе графики отличаются только положением и крутизной ветвей. Это удобно для сравнения функций без лишних вычислений.
- Модуль a определяет ширину параболы, а знак — направление её ветвей. Чем больше $|a|$, тем график уже.

Сравнение стандартных функций $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=0,5x^2$ и $y=-x^2$.

Вершина и ось симметрии



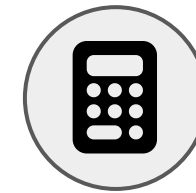
Вершина графика

Вершина — главная точка параболы. Она показывает, где функция достигает наибольшего или наименьшего значения, и помогает сразу понять, как расположен график на координатной плоскости.



Ось симметрии

Ось симметрии проходит через вершину и делит параболу на две зеркальные части. Для функции $y=ax^2+bx+c$ её уравнение: $x=-b/(2a)$.



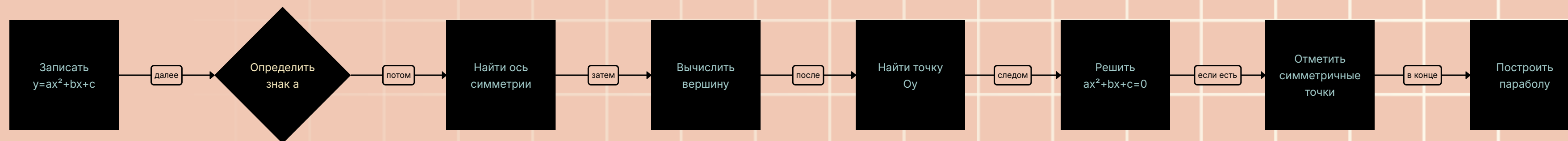
Как найти вершину

Сначала находят абсциссу вершины по формуле $x=-b/(2a)$, затем подставляют это значение в формулу функции. Так получают обе координаты вершины без построения полного графика.

Как исследовать квадратичную функцию



Последовательность помогает перейти от формулы к точному графику и ключевым точкам.



Главные свойства квадратичной функции

- Таблица показывает, как по формулам и точкам быстро определить поведение параболы и понять её график.
- Зная несколько ключевых характеристик, можно быстро читать график, находить важные точки и решать задачи без лишних построений.

Свойство	Как находится	Что означает
a	знак и модуль	направление и ширина
Вершина	$x = -b/(2a)$	экстремум графика
Ось симметрии	$x = -b/(2a)$	делит параболу пополам
Нули	$ax^2 + bx + c = 0$	пересечения с Ox
Точка Oy	$(0; c)$	пересечение с Oy

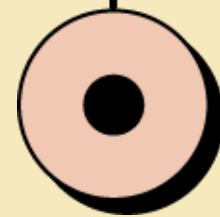


Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

Нули функции и пересечения с осью Ox

1. Условие $y=0$

Нули функции — это такие значения x , при которых значение функции равно нулю. На графике они соответствуют точкам, где парабола пересекает ось Ox .

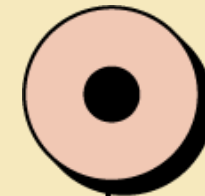


2. Решение уравнения

Чтобы найти нули, решают квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. От способа решения зависит, насколько быстро удастся получить корни и понять поведение графика.

3. Связь с дискриминантом

Если $D>0$, корней два; если $D=0$, корень один; если $D<0$, действительных корней нет. Это сразу показывает, пересекает ли график ось Ox .



Пример графика с отмеченными основными элементами

Основные точки

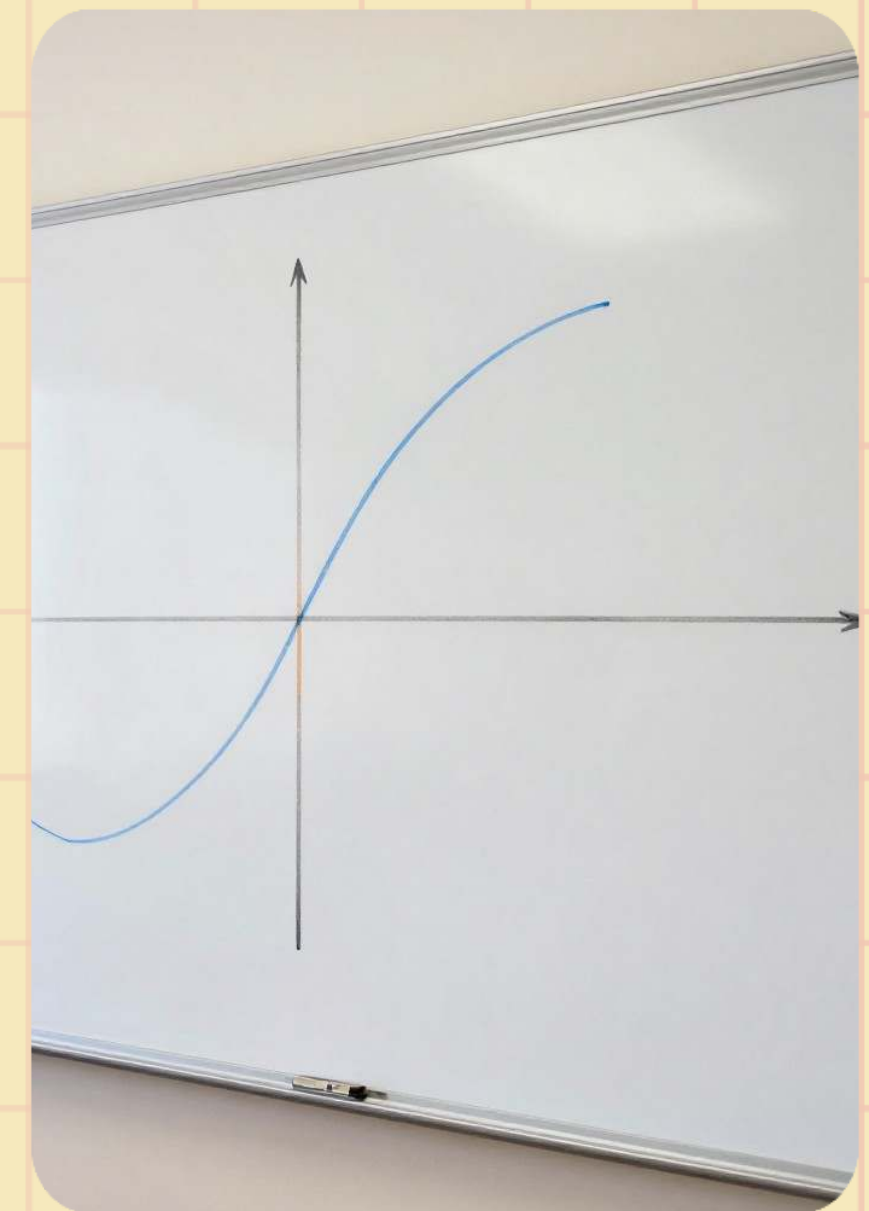
На графике подписаны вершина, точка пересечения с осью Oy и точки пересечения с осью Ox . Это помогает увидеть, как формула функции связана с координатами на плоскости.

Линия симметрии

Ось симметрии выделена отдельным цветом, чтобы сразу было видно, как левая и правая части параболы повторяют друг друга. Такая разметка облегчает чтение графика.

Как использовать пример

По отмеченным элементам удобно проверять вычисления и строить собственные графики. Сначала находят ключевые точки, затем соединяют их плавной линией и получают параболу.



Преобразования графика $y=x^2$

01

Базовая парабола

График функции $y=x^2$ служит отправной точкой для изучения всех парабол. По нему удобно видеть, как изменения в формуле сдвигают график, не меняя его характерную U-образную форму.



02

Сдвиг вверх и вниз

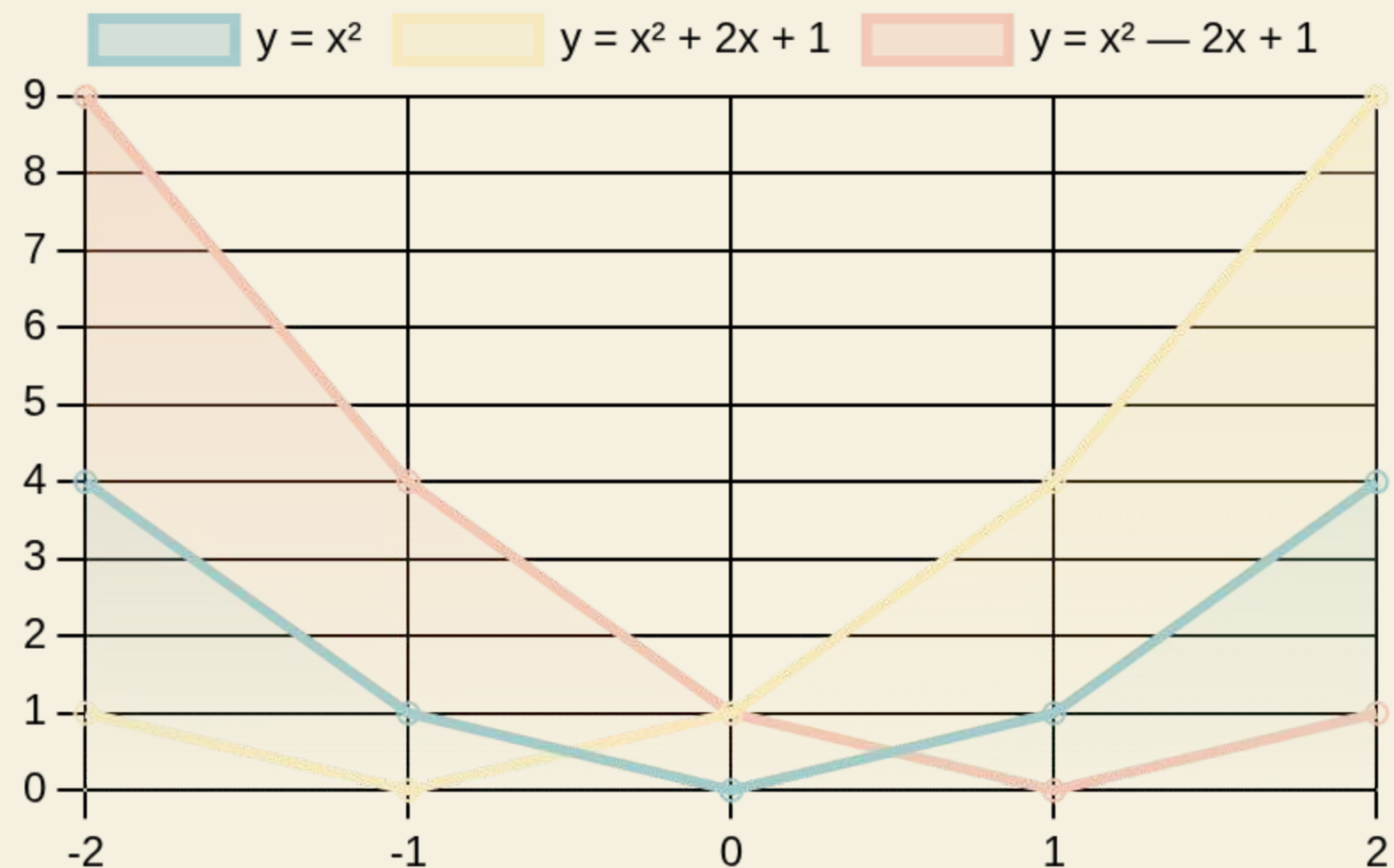
Если к $y=x^2$ прибавить число, например 3, весь график поднимается на три единицы. Если вычесть число, парабола опускается вниз на ту же величину, сохраняя форму.

03

Сдвиг вправо и влево

Замена x на $x-2$ означает сдвиг графика вправо на две единицы, а $x+2$ — влево. Такие преобразования помогают быстро строить новые параболы по известному образцу.

Как коэффициенты b и c меняют положение графика



- При одинаковом a параболы имеют одну и ту же «кривизну», но их вершины и пересечения с осью Oy оказываются в разных местах.
- Коэффициенты b и c меняют положение графика, не изменяя его общий вид.
- Именно поэтому важно смотреть не только на форму, но и на координаты ключевых точек.

Составлено по свойствам квадратичной функции;
иллюстративные значения для учебного сравнения.

Сравнение простых квадратных уравнений



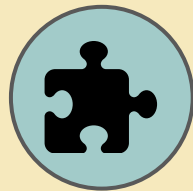
Уравнение	Корни	а и вершина
$x^2-4=0$	-2; 2	$a>0$; вершина ниже
$x^2+4x+3=0$	-3; -1	$a>0$; вершина ниже
$2x^2-8x+6=0$	1; 3	$a>0$; вершина ниже

- Таблица показывает, как по виду уравнения можно определить
- корни, знак коэффициента a и расположение вершины параболы.

- У всех трёх уравнений коэффициент a положительный, поэтому ветви парабол направлены вверх. Разные коэффициенты дают разные корни, но общий способ исследования остаётся одинаковым.
-

Составлено по решению квадратных уравнений школьного уровня.

Способы решения квадратных уравнений



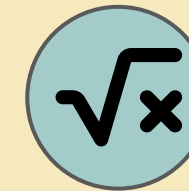
Разложение на множители

Этот способ удобен, когда квадратное уравнение можно быстро представить в виде произведения двух скобок. Тогда каждый множитель приравнивают к нулю и получают корни.



Дискриминант

Формула дискриминанта подходит для любого квадратного уравнения. Она помогает заранее понять, сколько действительных корней будет: два, один или ни одного.



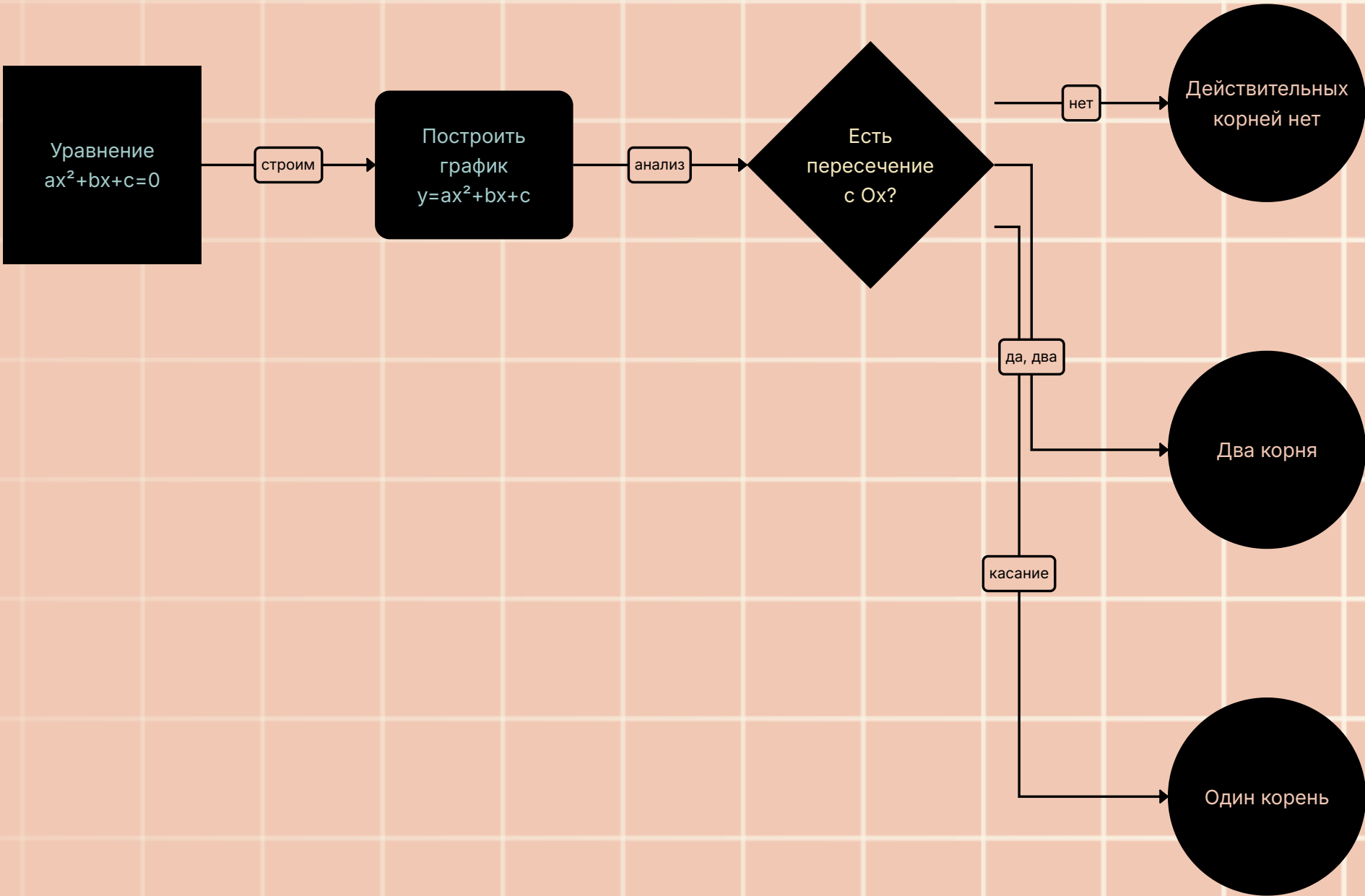
Выделение квадрата

Этот приём превращает выражение в удобный квадрат двучлена. Он полезен не только для решения уравнений, но и для нахождения вершины параболы.

Как график помогает решить уравнение



Связь между уравнением и графиком показывает, где искать корни и как понять их число.



Максимум и минимум функции

01

Значение в вершине

У параболы самое большое или самое маленькое значение находится в вершине. Именно эта точка помогает быстро ответить на вопросы о наибольшем результате или наименьшей величине.

03

Когда есть максимум

Если a отрицательный, парабола направлена вниз, а вершина становится точкой максимума. Такой случай часто встречается в задачах на наилучший результат или наибольшую высоту.

02

Когда есть минимум

Если коэффициент a положительный, ветви направлены вверх, и вершина показывает минимум функции. Это удобно, когда нужно найти наименьшую стоимость, расстояние или площадь.

04

Как найти ответ

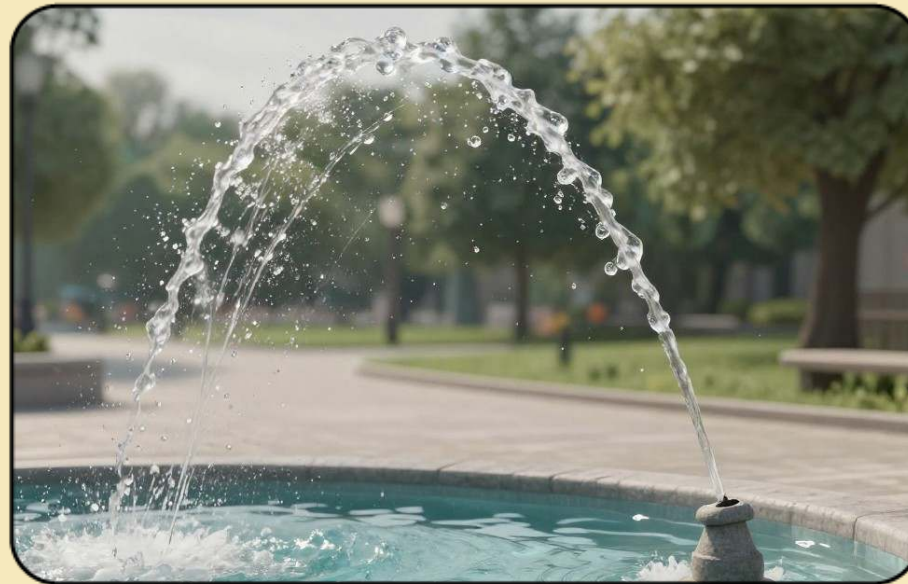
Сначала находят координату вершины, затем подставляют её в формулу функции. Полученное значение и будет максимумом или минимумом, в зависимости от знака коэффициента a .

Квадратичная функция в реальных ситуациях



Прыжок мяча

Когда мяч подбрасывают вверх, его высота сначала растёт, а потом уменьшается. Если нарисовать такую зависимость на координатной плоскости, получается кривая, похожая на параболу. По ней можно оценить, в какой момент мяч достигнет наибольшей высоты.



Струя фонтана

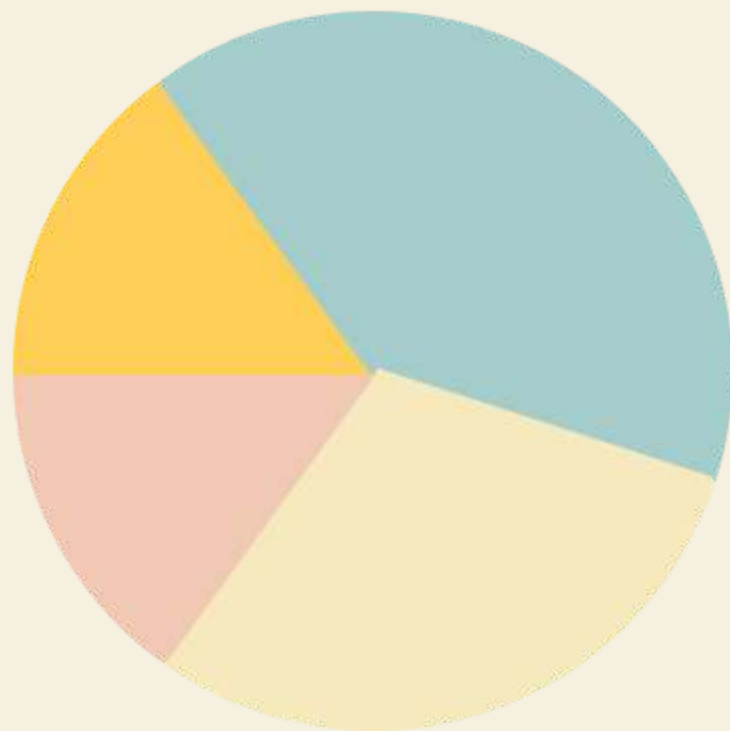
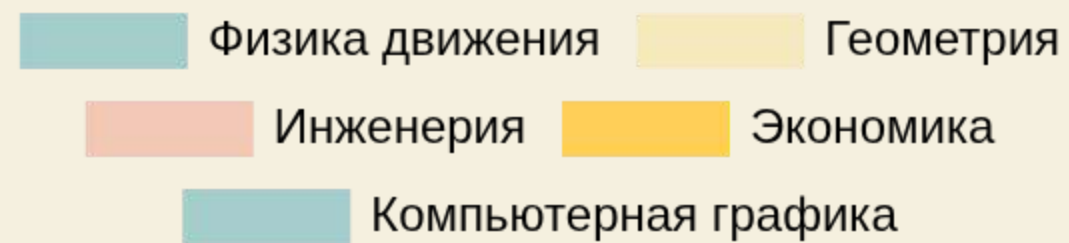
Вода в фонтане летит по дуге, и её траектория тоже напоминает параболу. Такая модель помогает понять, на какую высоту поднимется струя и где она упадёт. Поэтому квадратичная функция часто используется в задачах о движении.



Арка моста

Форма некоторых мостов и арок близка к параболе, потому что она удобна и красива. Инженеры используют такие модели, чтобы рассчитывать высоту, ширину и устойчивость конструкции. Здесь квадратичная зависимость помогает связать математику и архитектуру.

Где встречаются квадратичные зависимости



- Квадратичные модели особенно полезны там, где важны вершина, форма дуги и поиск наилучшего значения. Они часто появляются в учебных и прикладных задачах.
-

- Больше всего таких зависимостей связано с физикой и геометрией.
- Остальные области тоже используют их, когда нужно сравнить варианты или найти оптимальное решение.

Иллюстративное распределение для учебной презентации, без статистического измерения.



Неверный знак a

Из-за ошибки в знаке легко перепутать направление ветвей: вверх или вниз. Перед построением графика всегда проверяйте, положителен коэффициент a или отрицателен.



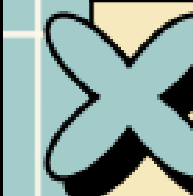
Ошибочная формула вершины

Формулу $x = -b/(2a)$ иногда записывают с неправильным знаком или подставляют числа неаккуратно. Из-за этого вершина получается в неверном месте, а график строится с ошибкой.



Забывтое значение при $x=0$

Точка пересечения с осью Oy равна $(0; c)$, поэтому её можно найти сразу. Если забыть эту точку, график будет неполным и менее точным.



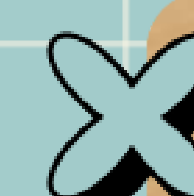
Неправильный вывод о корнях

Не у каждой параболы есть два пересечения с осью Ox . Если дискриминант равен нулю, корень один, а если он отрицателен, действительных корней нет.



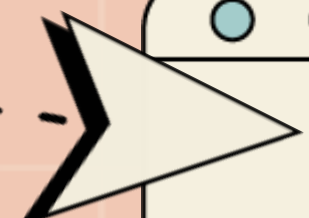
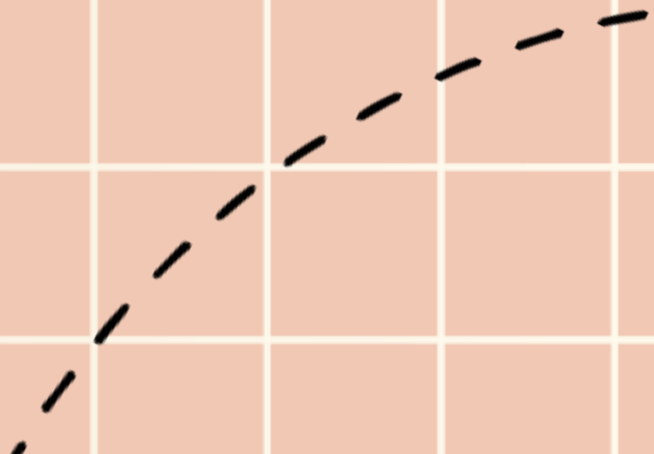
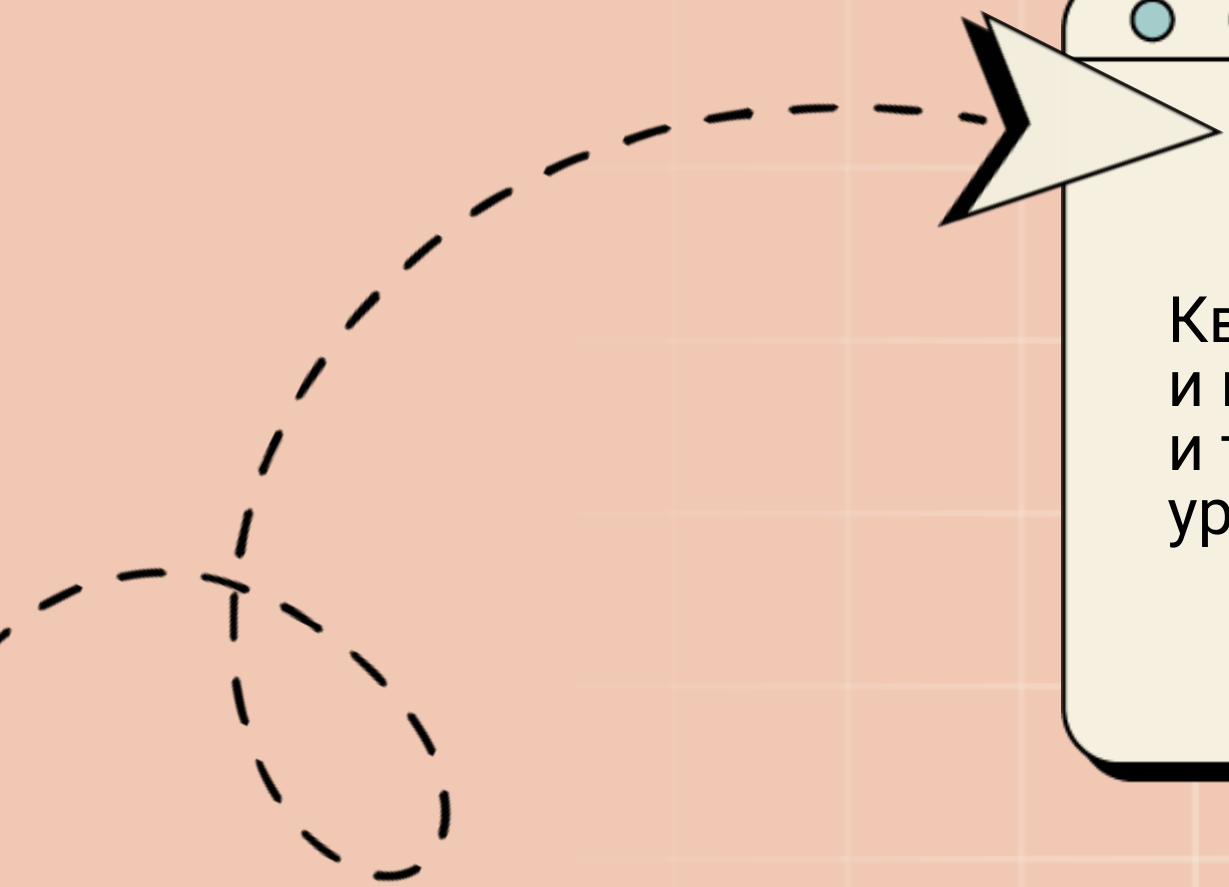
Отсутствие проверки

Полезно сравнивать результат вычислений с графиком и дискриминантом. Такая двойная проверка помогает заметить случайные ошибки и быстрее исправить неверный ответ.



Типичные ошибки при работе с параболой

Квадратичная функция: что важно запомнить



Квадратичная функция имеет вид $y=ax^2+bx+c$ и график-параболу. По её вершине, оси симметрии и точкам пересечения с осями можно решать уравнения и находить максимум или минимум.