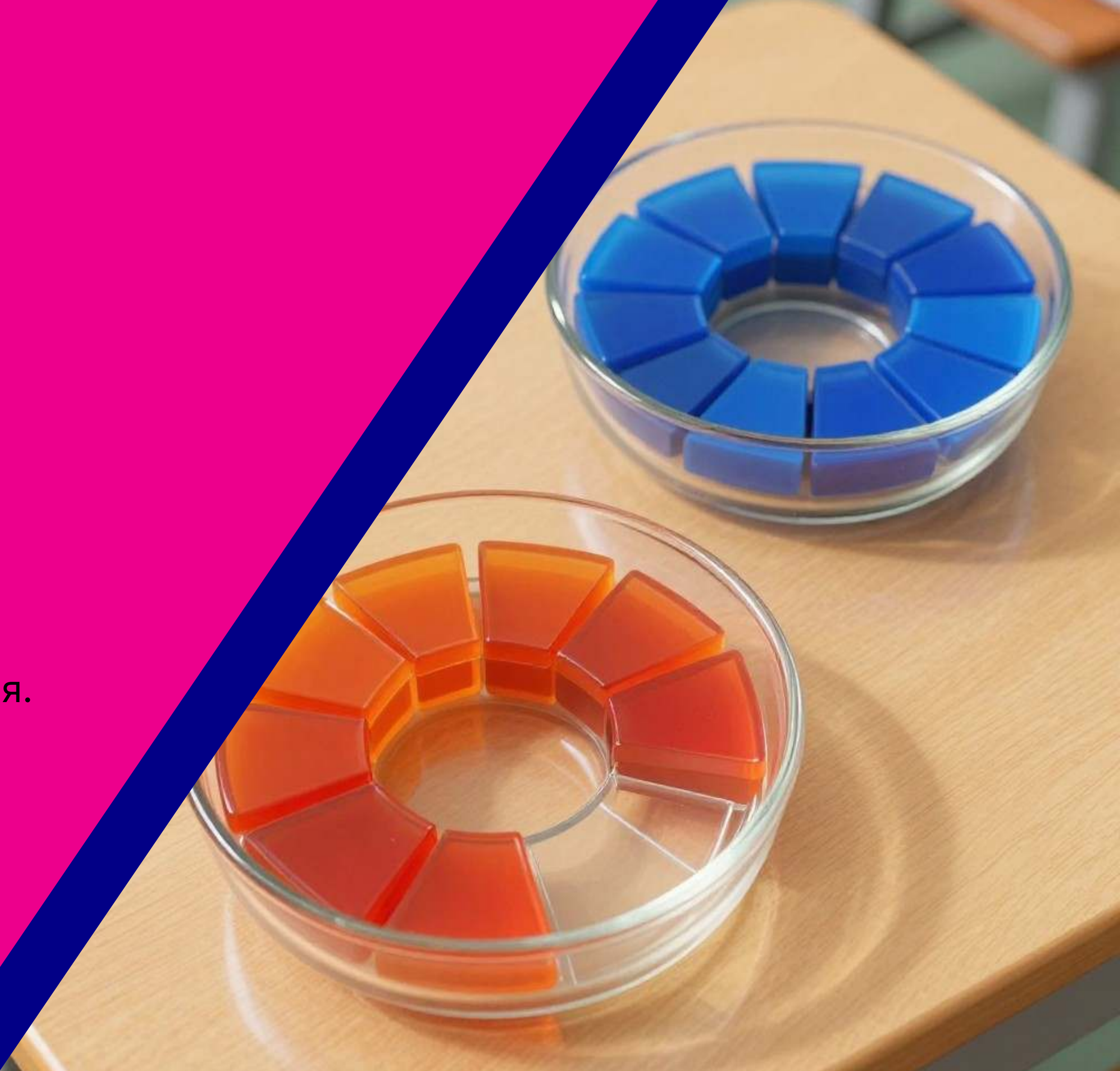


Умножение и деление алгебраических дробей

Разберём действия с дробями, где
есть буквы, множители и ограничения.





С чего начинается работа с дробями

Чтобы уверенно преобразовывать алгебраические дроби, нужно помнить: знаменатель не может быть равен нулю, дроби сокращают только по общим множителям, а перед действиями выражения удобно раскладывать на множители.

Область допустимых значений при преобразованиях

Что означает ОДЗ

ОДЗ показывает, какие значения переменных допустимы, чтобы дробь имела смысл. Если знаменатель обращается в ноль, запись становится недопустимой, даже если все остальные преобразования выполнены верно.

Простые ограничения

Для знаменателя $x-3$ нужно сразу записать ограничение $x \neq 3$. Если в знаменателе стоит y^2-1 , недопустимы значения $y=1$ и $y=-1$, потому что знаменатель обращается в ноль.

Когда проверять

Проверку ОДЗ выполняют до упрощения, чтобы не использовать запрещённые значения, и повторяют после получения ответа. Это помогает заметить ошибки, если в результате снова появился ноль в знаменателе.

Почему это важно

Даже правильное сокращение не спасает от ошибки, если в ответ случайно попало недопустимое значение. Поэтому ОДЗ — обязательная часть решения, а не формальная запись в начале примера.

Сокращение дробей через разложение на множители

Сначала разложение

Сокращать дробь можно только после того, как числитель и знаменатель представлены в виде произведения. Тогда становится видно, какие множители совпадают и могут быть убраны из записи.

Проверка ограничения

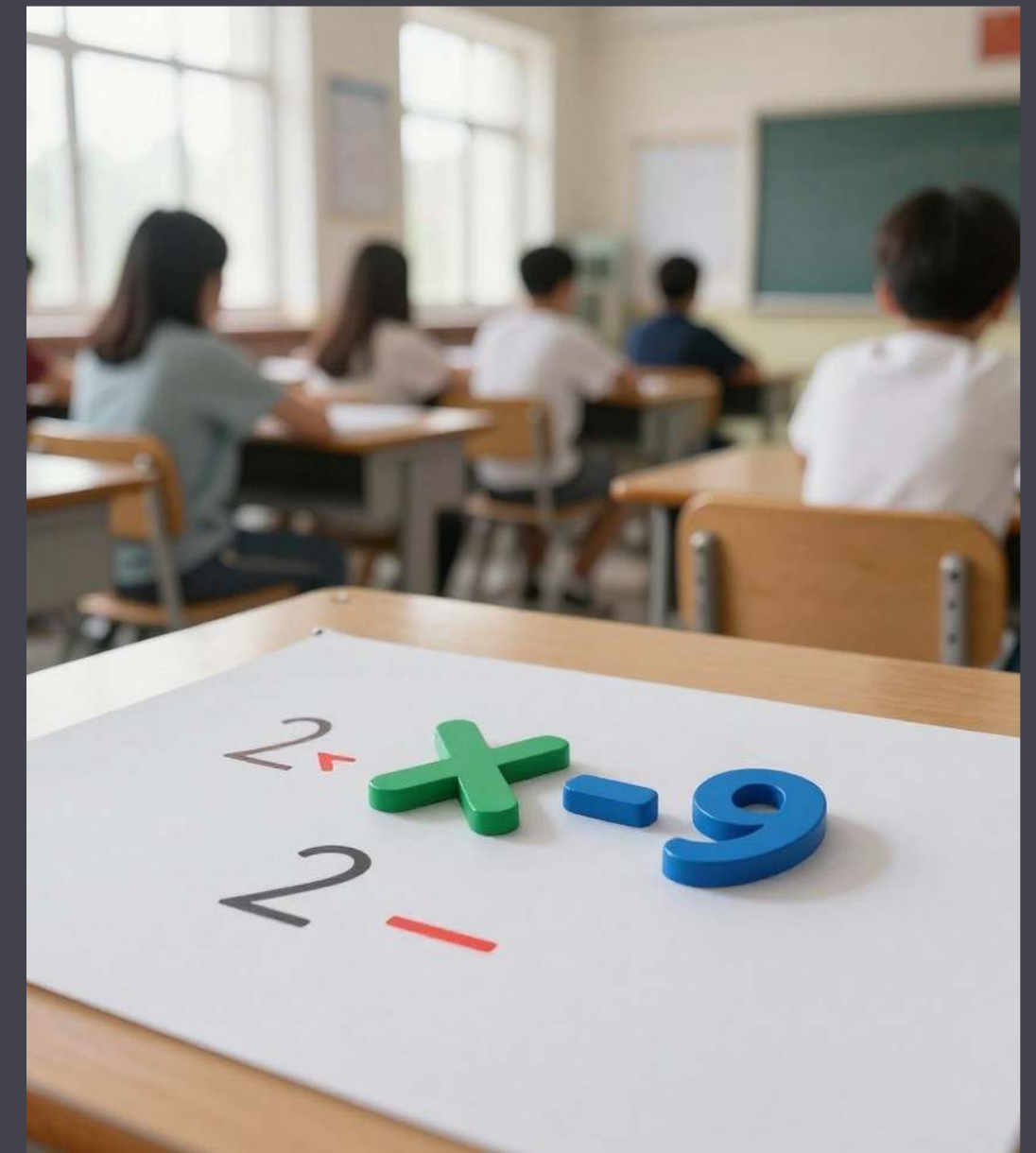
Хотя общий множитель исчезает при сокращении, исходное ограничение сохраняется: $x \neq 3$. Это важно, потому что исходная дробь при таком значении не определена, даже если итог выглядит обычным многочленом.

Общий множитель

В выражении $(x^2-9)/(x-3)$ числитель раскладывается как $(x-3)(x+3)$. После этого общий множитель $x-3$ сокращается, а остаётся более короткая дробь $x+3$.

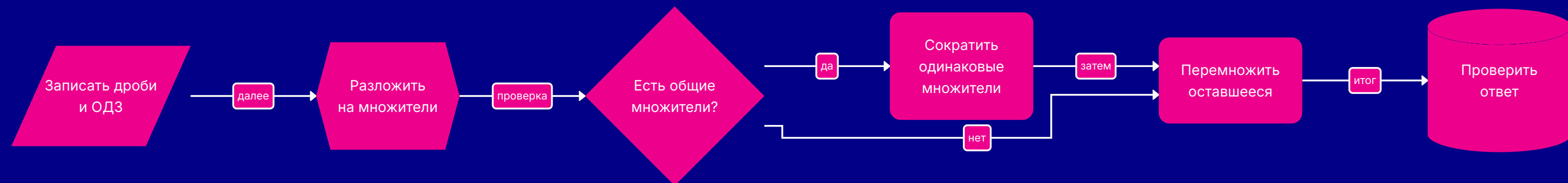
Удобство записи

Разложение на множители делает выражение наглядным и позволяет быстро увидеть сокращение. Чем аккуратнее выполнен этот шаг, тем меньше вычислений остаётся и тем проще проверить ответ.



Алгоритм умножения алгебраических дробей

Последовательность действий при преобразовании произведения дробей



Основное правило умножения дробей

1

Числители вместе

При умножении дробей числители перемножают между собой, а знаменатели — между собой. Это правило работает и для алгебраических выражений, если заранее учтены ограничения на переменные.

2

Запись правила

Общая формула выглядит так: $a/b \cdot c/d = ac/bd$. Она помогает не путать действия и показывает, что числитель результата составляют произведения числителей, а знаменатель — произведения знаменателей.

3

Сокращение до умножения

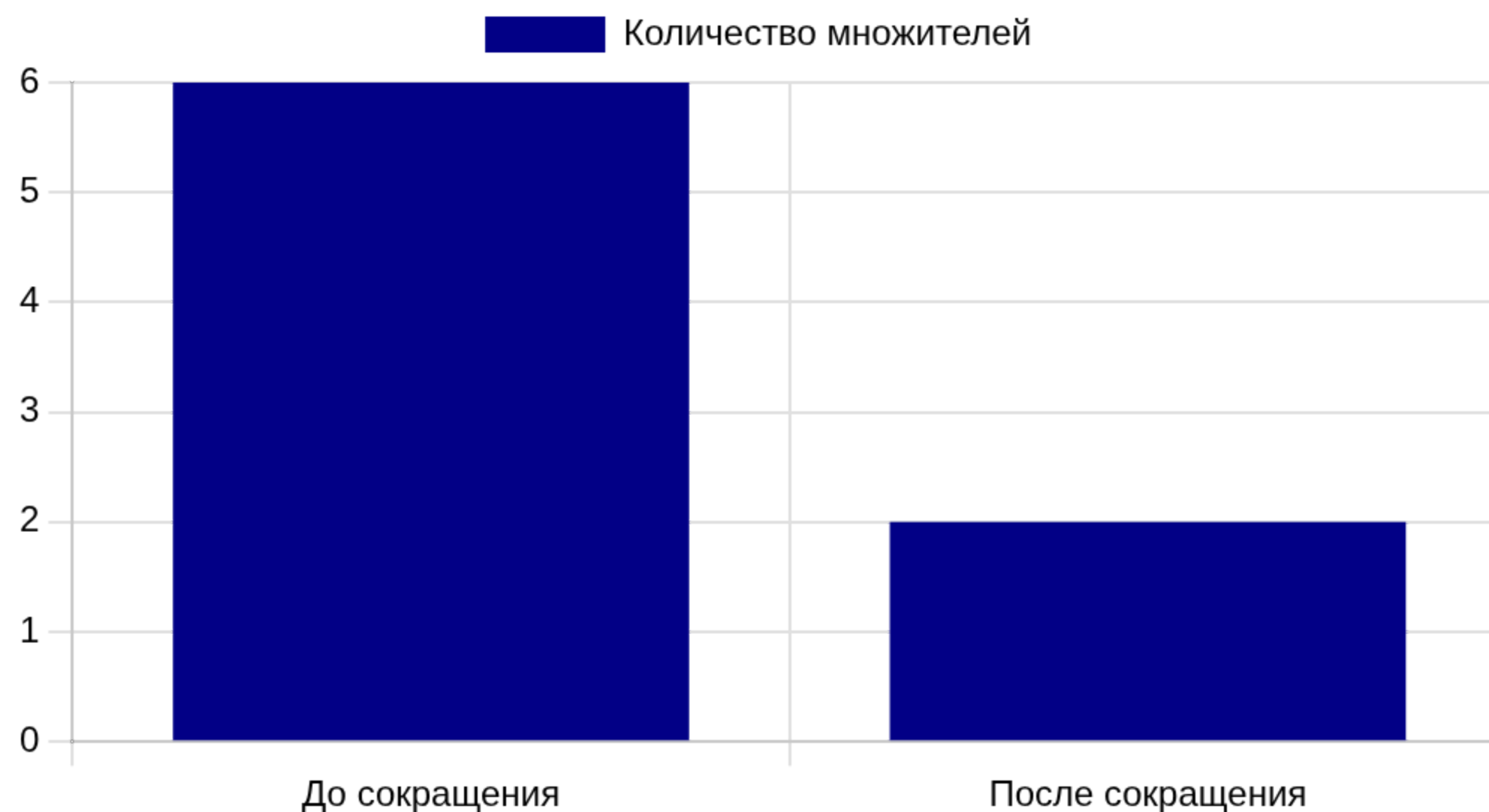
Если в разных дробях есть одинаковые множители, их лучше сократить ещё до перемножения. Тогда выражение становится короче, а вычисления — быстрее и менее громоздкими.

4

Простой пример

В выражении $3x/5 \cdot 10/y$ числа 10 и 5 сокращаются до 2 и 1, поэтому получается $6x/y$. Такой приём экономит шаги и уменьшает вероятность ошибки.

Как сокращение уменьшает выражение



На примере видно, что после разложения и сокращения запись становится заметно короче, а вычисления требуют меньше промежуточных действий.

Сокращение уменьшает количество множителей и упрощает дальнейшие преобразования; в работе с дробями это экономит время и снижает риск ошибки.

Иллюстрация по примеру $\left(\frac{2x^2y}{4xy^2}\right)$, составлено для учебной презентации

Умножение на число и на одночлен



Число как множитель

Если перед дробью стоит число, его можно перемножить с числителем или знаменателем после сокращения общих множителей. Так действия становятся короче и удобнее для счёта.



Одночлен в записи

Одночлен при умножении с дробью рассматривают как обычный множитель. Его можно сократить с одночленом в другой части записи, если они одинаковы и не нарушают ОДЗ.



Минус сохраняется

Если перед дробью стоит отрицательное число, знак минус обязательно остаётся в ответе. Удобно сначала выполнить сокращение, а затем аккуратно записать знак результата.



Проверка знаменателя

Перед вычислением важно убедиться, что переменная не обращает знаменатель в ноль. Эта проверка нужна всегда, даже если выражение выглядит простым после сокращения.

Работа со знаками при умножении

1

Минус в разных местах

Знак минус можно поставить перед дробью, в числителе или в знаменателе, и значение записи не изменится. Это значит, что $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ и $\frac{a}{b}$ равны.

2

Два минуса дают плюс

Если в произведении встречаются два отрицательных множителя, результат становится положительным. Поэтому при умножении дробей удобно сначала определить знак ответа, а потом выполнять вычисления.

3

Аккуратность в записи

Ошибки со знаком часто появляются, когда минус теряют при сокращении или переносят не туда, куда нужно. Чтобы этого избежать, полезно отмечать отрицательные множители ещё до преобразований.

Примеры умножения алгебраических дробей

Пример	После сокращения	Ответ
$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{3}$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3}$
$\frac{2a}{5b} \cdot \frac{15b}{4c}$	$\frac{3a}{2c}$	$\frac{3a}{2c}$
$\frac{m-1}{n} \cdot \frac{n}{m-1}$	1	1

В таблице показаны короткие примеры, где сначала выполняют разложение и сокращение, а затем перемножают оставшиеся множители.

Во всех примерах сокращение выполняется до умножения, а ограничения на переменные сохраняются; это делает вычисления короче и безопаснее.

Учебные примеры по теме умножения алгебраических дробей

1

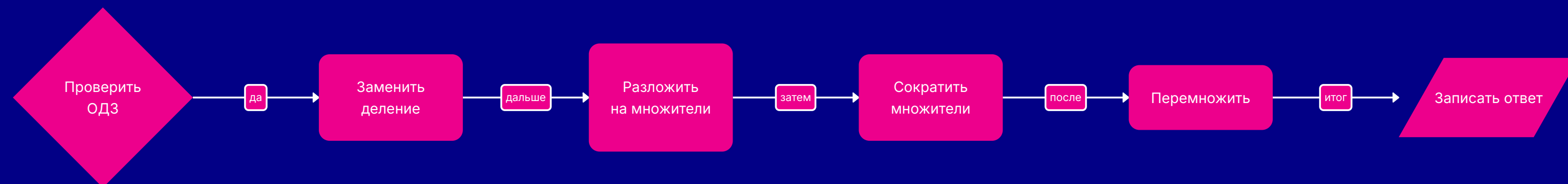
действие деления сводится к умножению на обратную дробь.

Это главное преобразование темы: оно позволяет заменить сложное деление знакомым умножением и сразу проверить, не возникает ли ноль в знаменателе.

Школьный курс алгебры

Алгоритм деления алгебраических дробей

Последовательность действий при преобразовании дробей с учетом ОДЗ.



Обратная дробь и деление на дробь

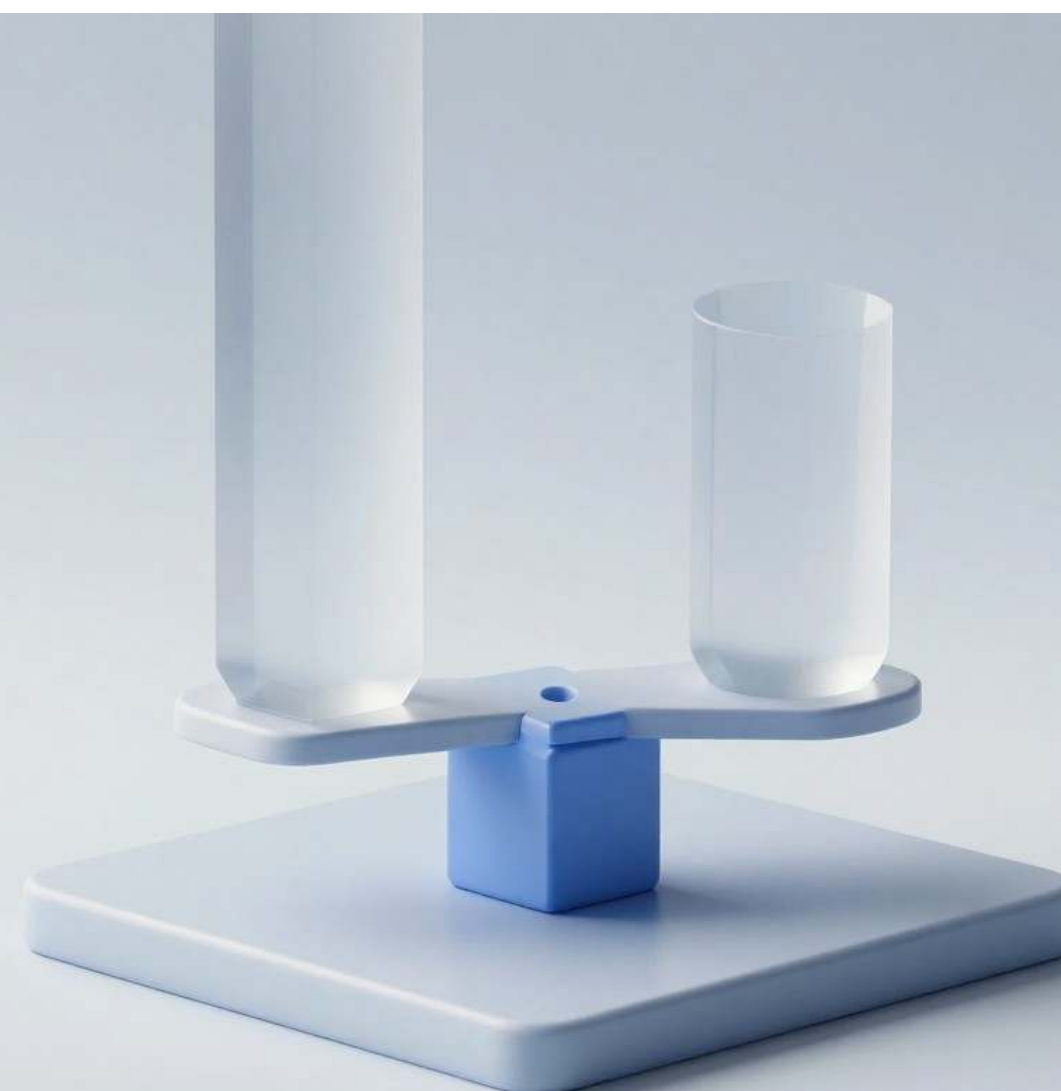
Когда числитель и знаменатель меняются местами

Чтобы получить обратную дробь, числитель и знаменатель меняют местами. Если исходная дробь записана как отношение двух выражений, то при перестановке частей получается новое выражение, удобное для деления. Такой переход работает только тогда, когда оба выражения не равны нулю.



Как деление превращается в умножение

При делении одной дроби на другую делитель не оставляют без изменений: его заменяют обратной дробью. На рисунке это видно особенно хорошо, потому что верхняя и нижняя части как бы «переходят» друг в друга, а само действие становится умножением.



Типичные ошибки при делении дробей

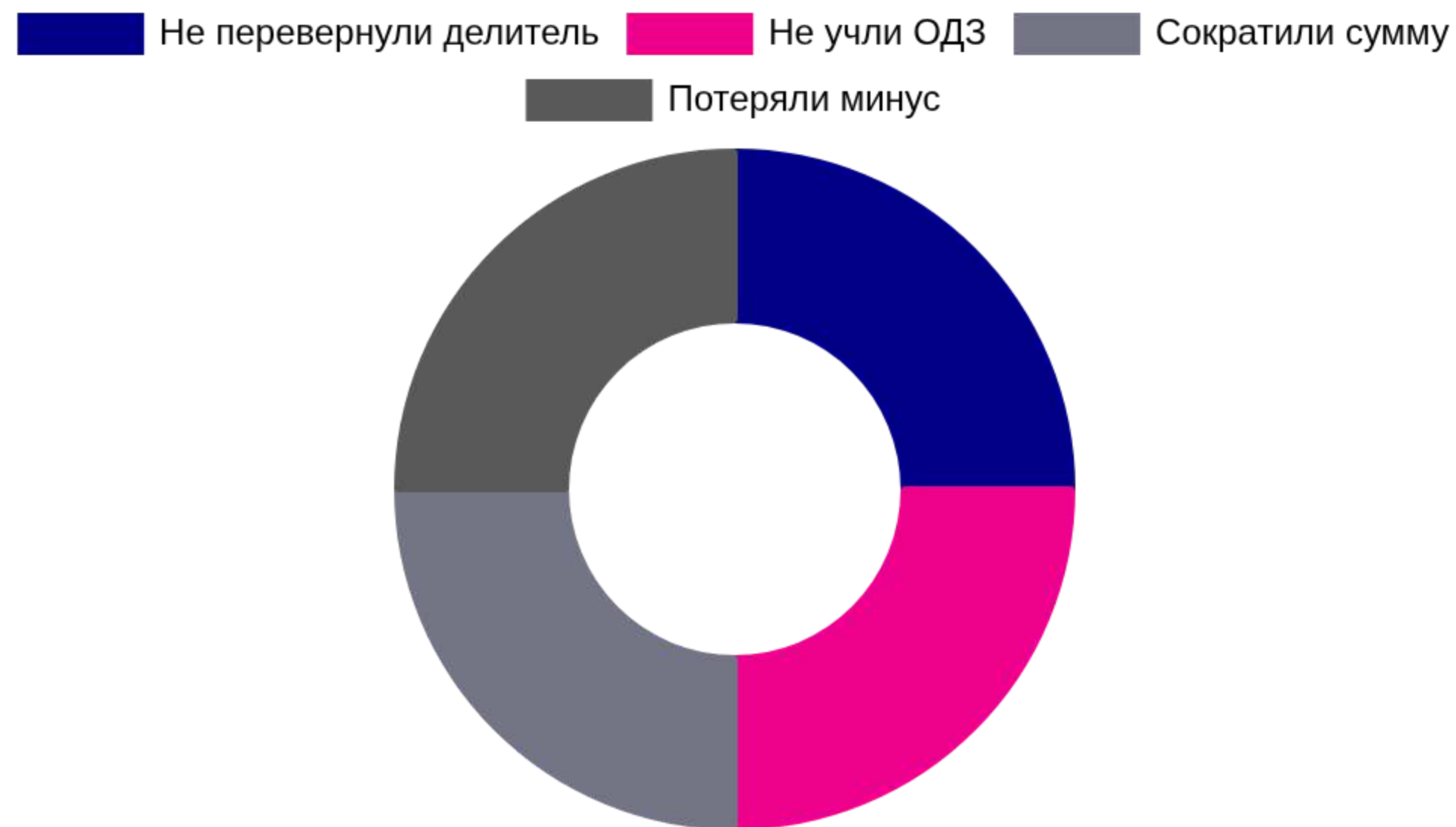


Схема помогает увидеть, какие ошибки встречаются в теме чаще всего и какие из них нужно проверять в первую очередь.

Опаснее всего забыть заменить деление на умножение и пропустить проверку знаменателя: именно эти ошибки чаще всего ломают весь ответ.

Сводка типичных ошибок по теме «алгебраические дроби»

Сокращать можно только множители

1

Сначала разложение

Сокращение возможно только после разложения выражения на множители. Пока запись не преобразована, легко перепутать сумму со множителем и получить неверный результат.

2

Нельзя сокращать слагаемые

В выражениях вида $x+3$ или $2x+5$ буквы входят в сумму, а не в общий множитель. Поэтому сокращать отдельные части таких записей нельзя.

3

Правильный пример

Если x^2-9 представить как $(x-3)(x+3)$, появляется общий множитель, который уже можно сократить. Именно так выполняют корректное упрощение дроби.

Правильные действия и ошибки при работе с дробями

Верное действие	Ошибка
Разложить на множители	Сократить сумму
Проверить ОДЗ	Не проверить ноль
Заменить на умножение	Не перевернуть дробь

Сравнение показывает, какие шаги помогают получить верный ответ, а какие приводят к ошибкам.

Верный ответ строится на последовательности действий: проверка, преобразование, сокращение. Пропуск хотя бы одного шага чаще всего приводит к ошибке.

Правила преобразования алгебраических дробей

Зачем нужны эти преобразования



Задачи на движение

В задачах на скорость, время и расстояние дроби часто появляются в формулах. После сокращения запись становится короче, а подстановка чисел — заметно проще.



Площади и пропорции

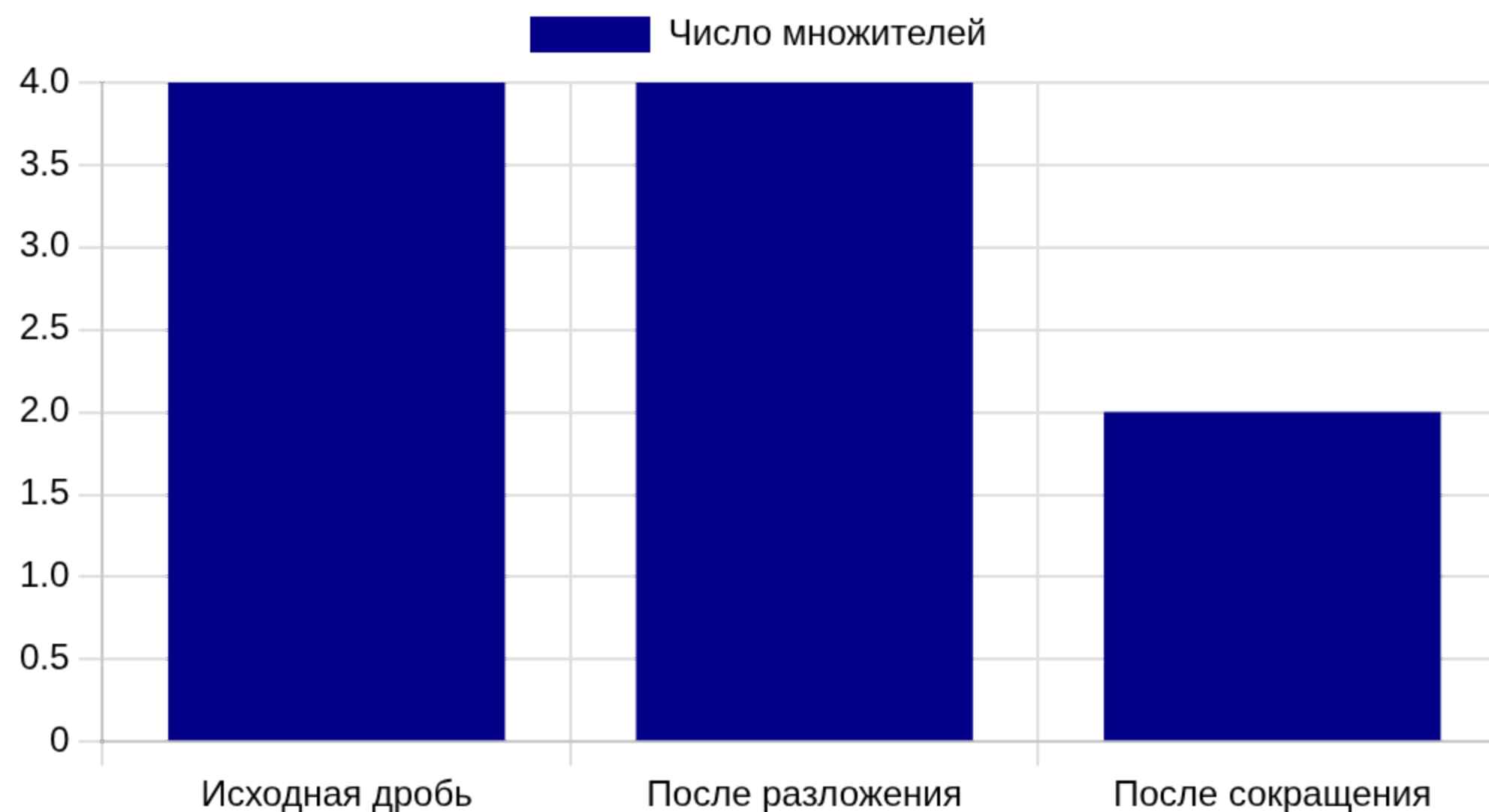
При вычислении площадей, отношениях и масштабах удобно сначала упростить дроби. Это уменьшает количество действий и помогает не запутаться в промежуточных вычислениях.



Формулы без лишних шагов

Когда выражение подставляют в формулу, лишние множители мешают считать. Сокращение заранее делает запись аккуратнее и снижает риск ошибки при работе с числами.

Пошаговое упрощение одного выражения



На каждом шаге сохраняются ограничения на переменные, даже если сама запись становится короче.

Разложение на множители не меняет смысл выражения, а сокращение убирает только общий множитель и делает дробь компактнее.

Пример из курса алгебры

Проверка ответа перед записью

1

Знаменатель не ноль

Сначала убедитесь, что ни в одной части ответа не появляется нулевой знаменатель. Даже красивый результат нельзя записывать, если он нарушает это условие.

2

Деление заменено верно

Проверьте, что при делении вторая дробь действительно перевёрнута. Без этого преобразования решение выглядит правдоподобно, но остаётся неправильным.

3

Сокращены только множители

Посмотрите, не сократили ли вы части суммы вместо общего множителя. Такая ошибка часто незаметна, но полностью меняет значение выражения.

Главное, что нужно запомнить

Умножение и деление алгебраических дробей опираются на одни и те же правила: множители раскладывают, одинаковые части сокращают, ОДЗ проверяют заранее, а деление заменяют умножением на обратную дробь.