

График и свойства функции $y = ax^2$

Парабола, таблица значений и формула: увидим связь сразу.



Зачем изучать $y = ax^2$ в 9 классе

Эта функция показывает, как формула превращается в график, и помогает понимать параболу. Она встречается в задачах о движении, площадях и изменении величин, а коэффициент a меняет направление и форму графика.



Определение функции и область определения

01

Формула функции

Функция задается выражением $y = ax^2$, где a не равно нулю. Один и тот же закон связывает каждое значение x с единственным значением y .

02

Область определения

В формулу можно подставить любое действительное число x . Поэтому область определения этой функции состоит из всех чисел, которые изучают на координатной прямой.

03

Одинаковые значения

Если взять числа x и $-x$, получится одно и то же значение y , потому что при возведении в квадрат знак исчезает. Это видно и по таблице значений.

04

Четность функции

Из-за равенства значений при противоположных x график симметричен относительно оси Oy . Поэтому функцию $y = ax^2$ относят к четным функциям.

Парабола как график функции $y = ax^2$

Название графика

График функции $y = ax^2$ называется параболой. У него всегда плавная форма, без углов и разрывов, поэтому его легко узнавать среди других линий.

Обязательная точка

Любая такая парабола проходит через начало координат. Точка $(0; 0)$ является вершиной графика и помогает быстро проверить, верно ли он построен.

Две ветви

У параболы две симметричные ветви. Они расходятся в разные стороны, а их положение зависит от знака коэффициента a и от расстояния точек от оси Oy .

Удобные точки

Для построения часто берут точки $(-2; 4a)$, $(-1; a)$, $(0; 0)$, $(1; a)$, $(2; 4a)$. Такой набор показывает, как меняются ординаты при одинаковых по модулю x .

Смысл изображения

Рисунок на координатной плоскости помогает увидеть, что противоположные значения x дают одинаковые y . Именно поэтому таблица значений и график подтверждают друг друга.



Как построить параболу по формуле

Последовательность действий при построении графика $y = ax^2$

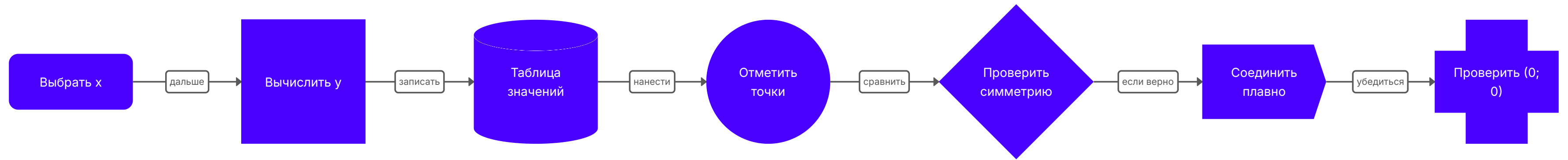


Таблица значений для разных коэффициентов a

Сравнение показывает, как меняются значения функции при разных коэффициентах a для одних и тех же значений x .

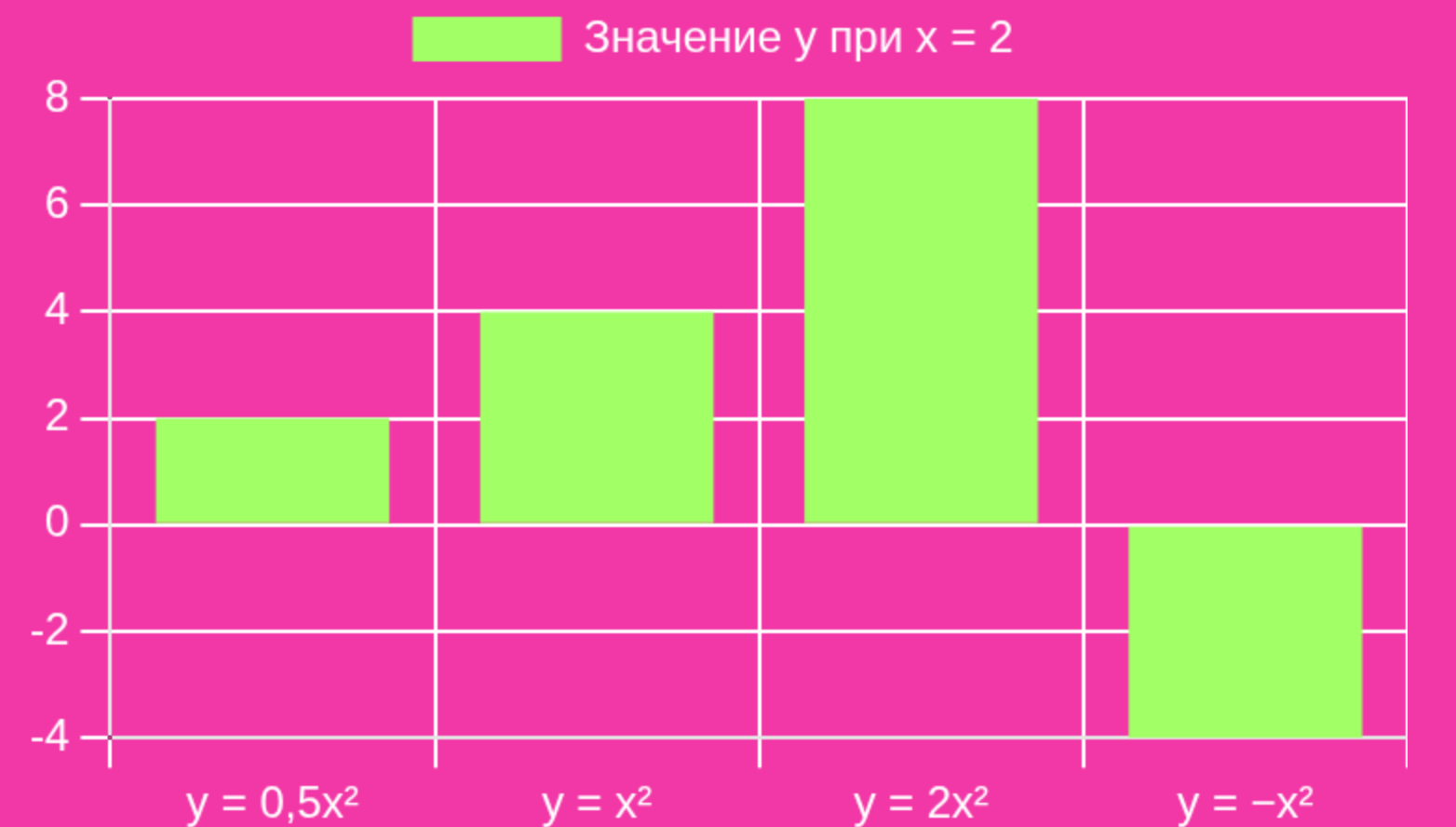
При увеличении $|a|$ значения возрастают быстрее. Отрицательный коэффициент меняет знак всех значений y , но сохраняет симметрию таблицы.

Вычисления по формуле $y = ax^2$ для $x = -2, -1, 0, 1, 2$

x	$a=1$	$a=2$	$a=-1$
-2	4	8	-4
-1	1	2	-1
0	0	0	0
1	1	2	-1

Как коэффициент а влияет на значения функции

- На диаграмме показано сравнение не самих графиков, а одного и того же x . Это удобно, чтобы увидеть, как меняется результат вычисления.
- Чем больше модуль a , тем выше столбец по модулю. Минус a переносит значение ниже оси x .



Вычисления по формуле $y = ax^2$ при $x = 2$

0

— наименьшее значение функции, которое достигается в точке $x = 0$.

Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$

Для положительного коэффициента график поднимается вверх от вершины, а все значения остаются неотрицательными.



Свойства функции при $a < 0$

01

Направление ветвей

Если коэффициент a отрицателен, парабола открывается вниз. Ее ветви расходятся к нижней части координатной плоскости, а вершина остается в начале координат.

02

Наибольшее значение

В точке $x = 0$ функция достигает самого большого значения, равного 0. Все остальные значения лежат ниже оси x и не могут стать положительными.

03

Промежутки изменения

На промежутке $(-\infty; 0]$ функция возрастает, потому что при приближении к нулю значения y становятся больше. На $[0; +\infty)$ она убывает.

04

Главный вывод

Знак коэффициента определяет только направление ветвей, но не меняет положение вершины. Поэтому график всегда симметричен относительно оси Oy .

Ось симметрии и вершина параболы

Вершина графика



Для функции $y = ax^2$ вершина всегда находится в начале координат. Это самая важная точка графика, от которой удобно начинать построение и проверку.

Ось симметрии



Прямая $x = 0$ совпадает с осью Oy и делит параболу на две равные части. Любая точка справа имеет такую же пару слева.

Парные точки



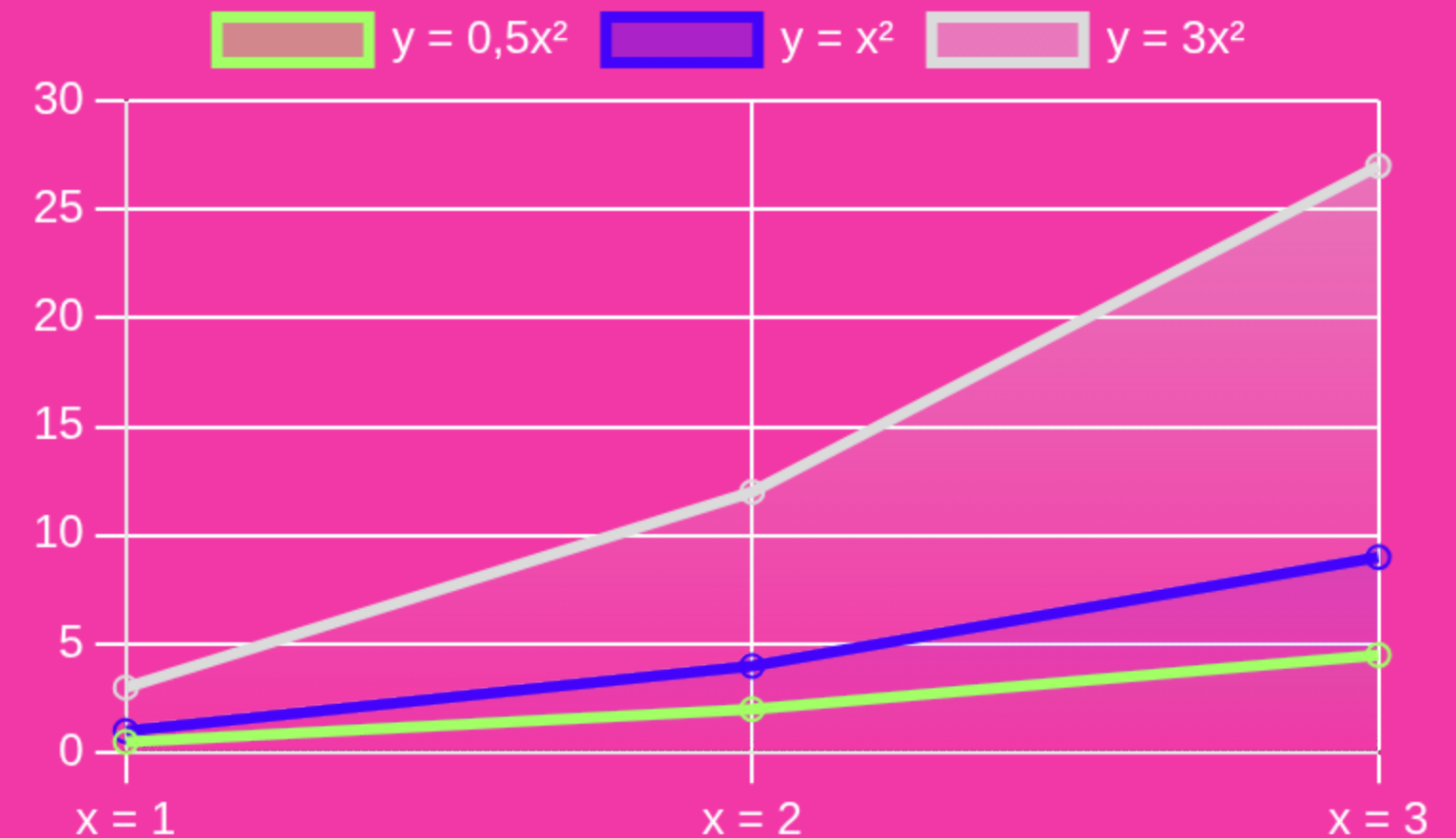
Если точка $(x; y)$ принадлежит графику, то точка $(-x; y)$ тоже принадлежит ему. Именно поэтому на рисунке легко увидеть зеркальное расположение точек.



Влияние модуля коэффициента $|a|$ на форму графика

➤ При одинаковых x значение y быстрее растёт у функции с большим $|a|$. Это видно уже по точкам $x = 1, 2$ и 3 .

➤ Чем больше $|a|$, тем график уже и круче; меньший модуль делает параболу шире, не меняя вершину в начале координат.



Расчёты по формуле $y = ax^2$

Сравнение графиков $y = x^2$, $y = 2x^2$ и $y = -x^2$



Общая опора

Все три графика проходят через начало координат и имеют одну и ту же ось симметрии $x = 0$. Поэтому их удобно сравнивать на одной координатной плоскости.

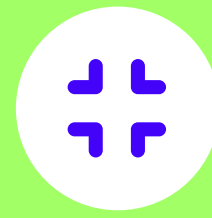


График $y = 2x^2$

У функции $y = 2x^2$ парабола уже, чем у $y = x^2$: значения y растут быстрее, а ветви выглядят более крутыми при удалении от оси Oy .



Как сравнивать

Сравнение этих парабол помогает быстро увидеть, что знак коэффициента меняет направление ветвей, а его модуль влияет только на ширину и крутизну графика.



График $y = -x^2$

Функция $y = -x^2$ сохраняет форму, но её ветви направлены вниз. Это зеркальное отражение графика $y = x^2$ относительно оси x .

Точки для построения графика $y = 2x^2$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8



Несколько точек достаточно, чтобы увидеть форму параболы и её симметрию относительно оси Oy.



Значения по обе стороны от нуля совпадают, а точка (0; 0) остаётся вершиной графика.

Расчёты по формуле $y = 2x^2$

Где в жизни встречается парабола



Мяч, который летит дугой

Если бросить мяч, его путь в воздухе часто напоминает параболу. Сначала высота растёт, потом уменьшается, и по такой траектории удобно описывать движение в задачах и на практике.



Фонтан и струя воды

Струя воды из фонтана тоже образует дугу, близкую к параболе. По её форме можно представить, где вода поднимется выше всего и как далеко она улетит.

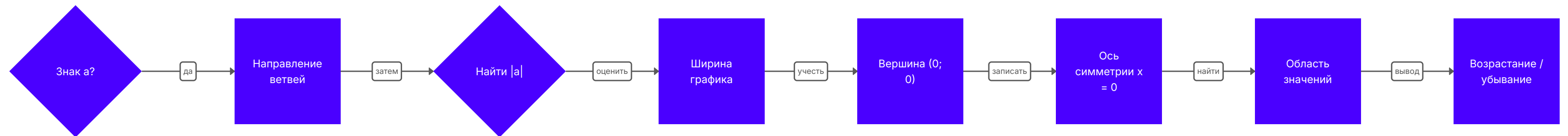


Фонари и прожекторы

В отражателях фонарей и прожекторов используют параболическую форму, потому что она помогает собирать и направлять свет. Так математика превращается в полезный инструмент для техники и повседневной жизни.

Как определить свойства графика по формуле

Последовательность рассуждений при анализе функции $y = ax^2$



Частые ошибки при работе с графиком



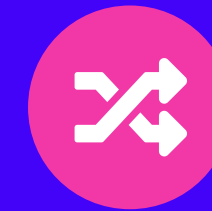
Путают знак a

Иногда считают, что модуль коэффициента отвечает за направление ветвей. На самом деле вверх или вниз парабола смотрит только из-за знака a .



Сдвигают вершину

Для функции $y = ax^2$ вершина всегда находится в начале координат. Переносить её в другую точку можно только у других квадратных функций, но не здесь.



Рисуют одну половину

График должен быть симметричным относительно оси Oy . Если построена только правая или только левая часть, изображение получается неполным и неверным.



Соединяют точки ломаной

Парабола — это плавная кривая, а не набор отрезков. Ломаная линия искажает форму графика и мешает увидеть его свойства.



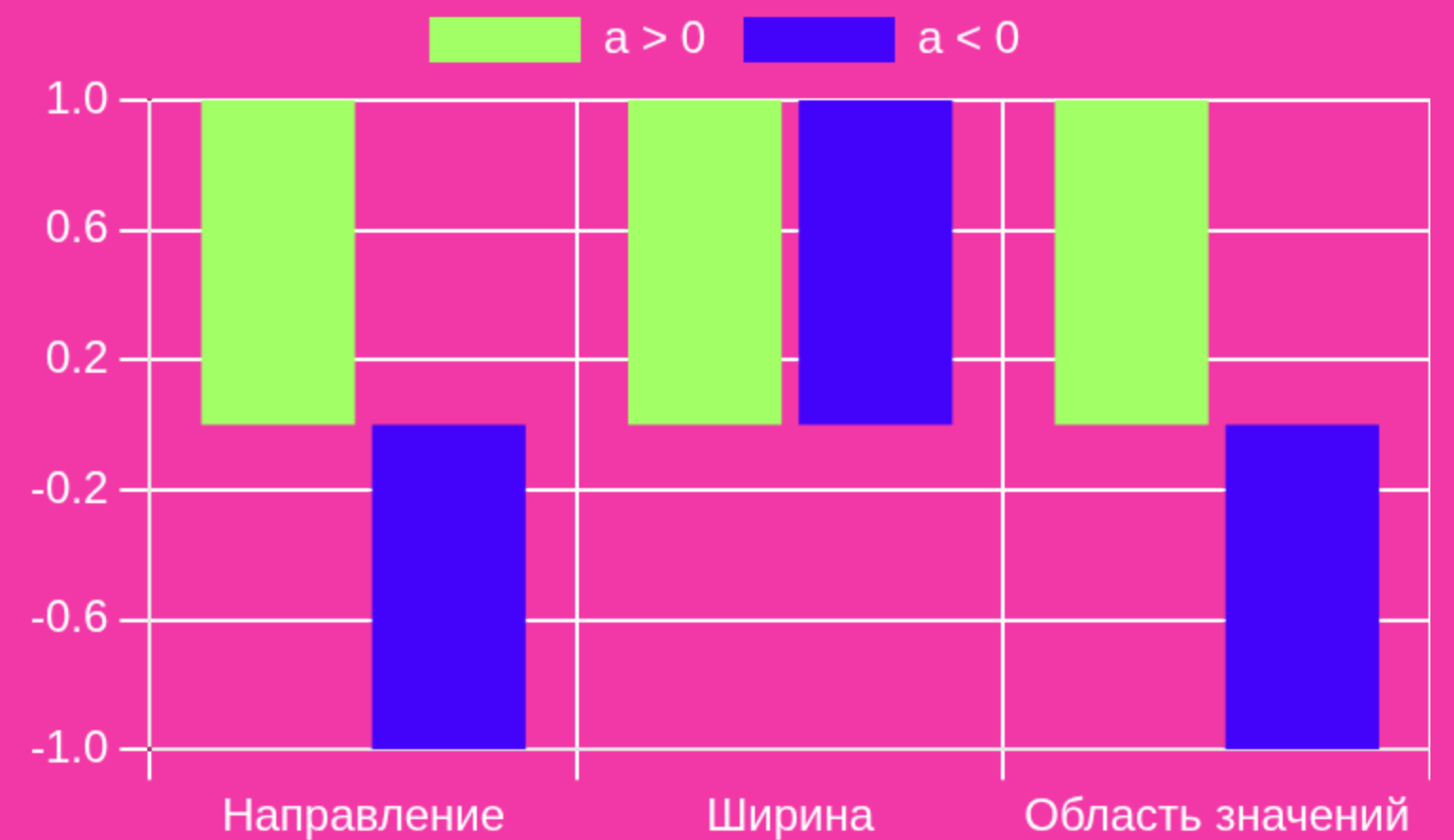
Ошибаются в вычислениях

Неверный подсчёт значений y по формуле сразу меняет рисунок. Поэтому перед построением полезно ещё раз проверить умножение и знак результата.

Сравнение свойств при разных значениях a

➤ Знак коэффициента меняет только направление ветвей и знак значений функции. Модуль $|a|$ влияет на крутизну одинаково при любом знаке.

➤ При $a > 0$ график расположен выше оси x , при $a < 0$ — ниже. Большой $|a|$ делает параболу более узкой.



Сравнение свойств функции $y = ax^2$ по её формуле

Как читать готовый график функции $y = ax^2$

01

Найти вершину

У графика $y = ax^2$ вершина всегда находится в начале координат. Это первая точка, на которую нужно смотреть при чтении рисунка.

02

Определить ось симметрии

Для этой функции ось симметрии совпадает с осью Oy , то есть с прямой $x = 0$. Она делит параболу на две одинаковые части.

03

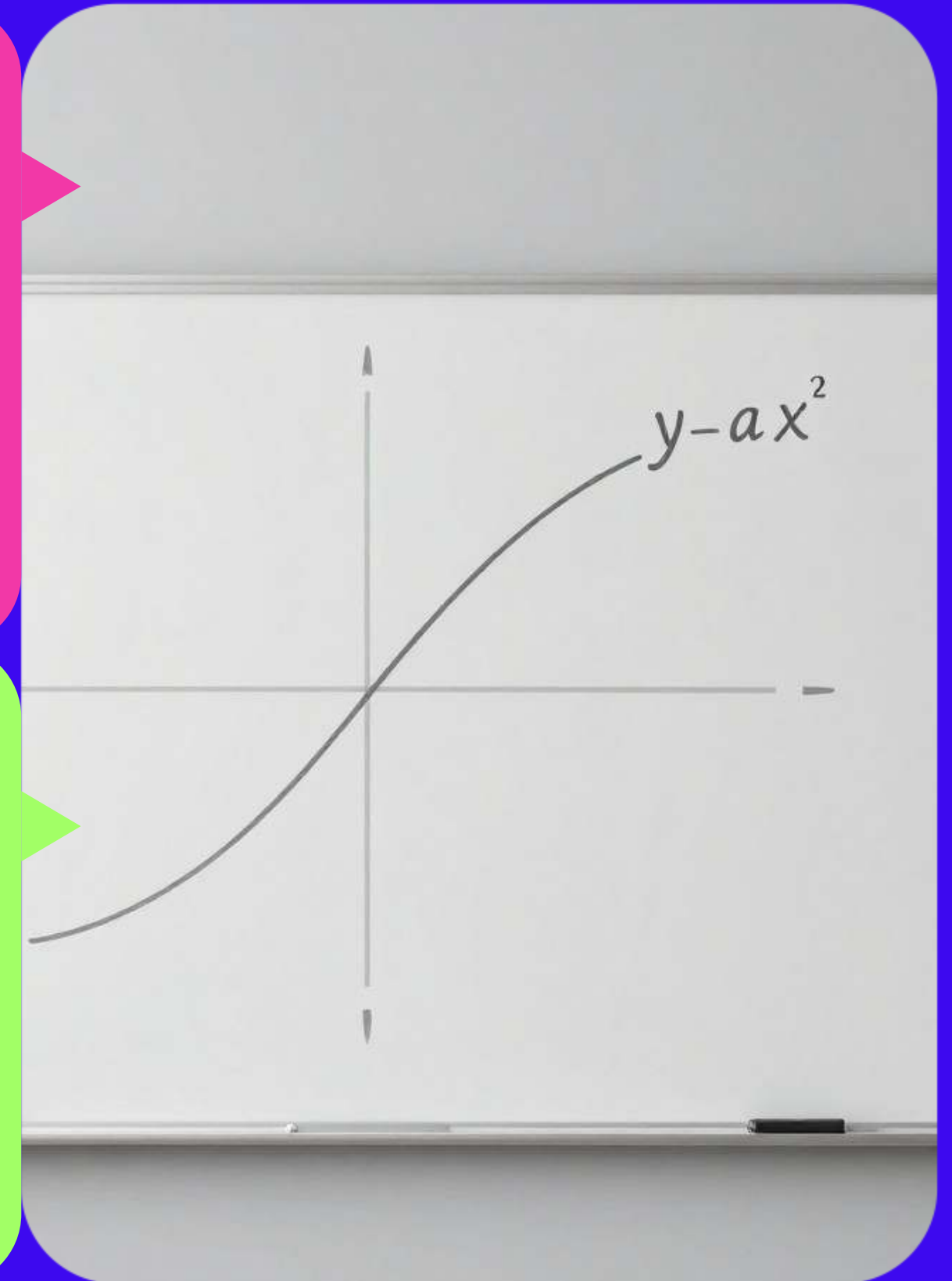
Оценить коэффициент

Если точки расположены близко к оси Oy , модуль коэффициента меньше. Если парабола узкая и крутая, значит, $|a|$ больше.

04

Сделать вывод

По виду графика легко понять направление ветвей, область значений и сравнить несколько функций между собой, не вычисляя много таблиц.



Проверка на примере функции $y = -2x^2$



01

Направление ветвей

Так как коэффициент отрицательный, ветви параболы направлены вниз. Это сразу показывает, что график расположен ниже оси x , кроме вершины.

02

Коэффициент по модулю

Значение $|-2|$ больше, чем $|-1|$, поэтому график $y = -2x^2$ уже, чем график $y = -x^2$. Он сильнее изгибается около оси Oy .

03

Точки для построения

Для построения удобно взять точки $(-2; -8)$, $(-1; -2)$, $(0; 0)$, $(1; -2)$ и $(2; -8)$. Они помогают увидеть форму и симметрию графика.

04

Проверка результата

На готовом рисунке должна быть заметна симметрия относительно оси Oy и быстрое уменьшение значений при удалении от нуля.

Что важно запомнить о графике $y = ax^2$

Функция $y = ax^2$ всегда задаёт параболу с вершиной в начале координат. Знак a определяет направление ветвей, а модуль $|a|$ помогает понять ширину и крутизну графика.