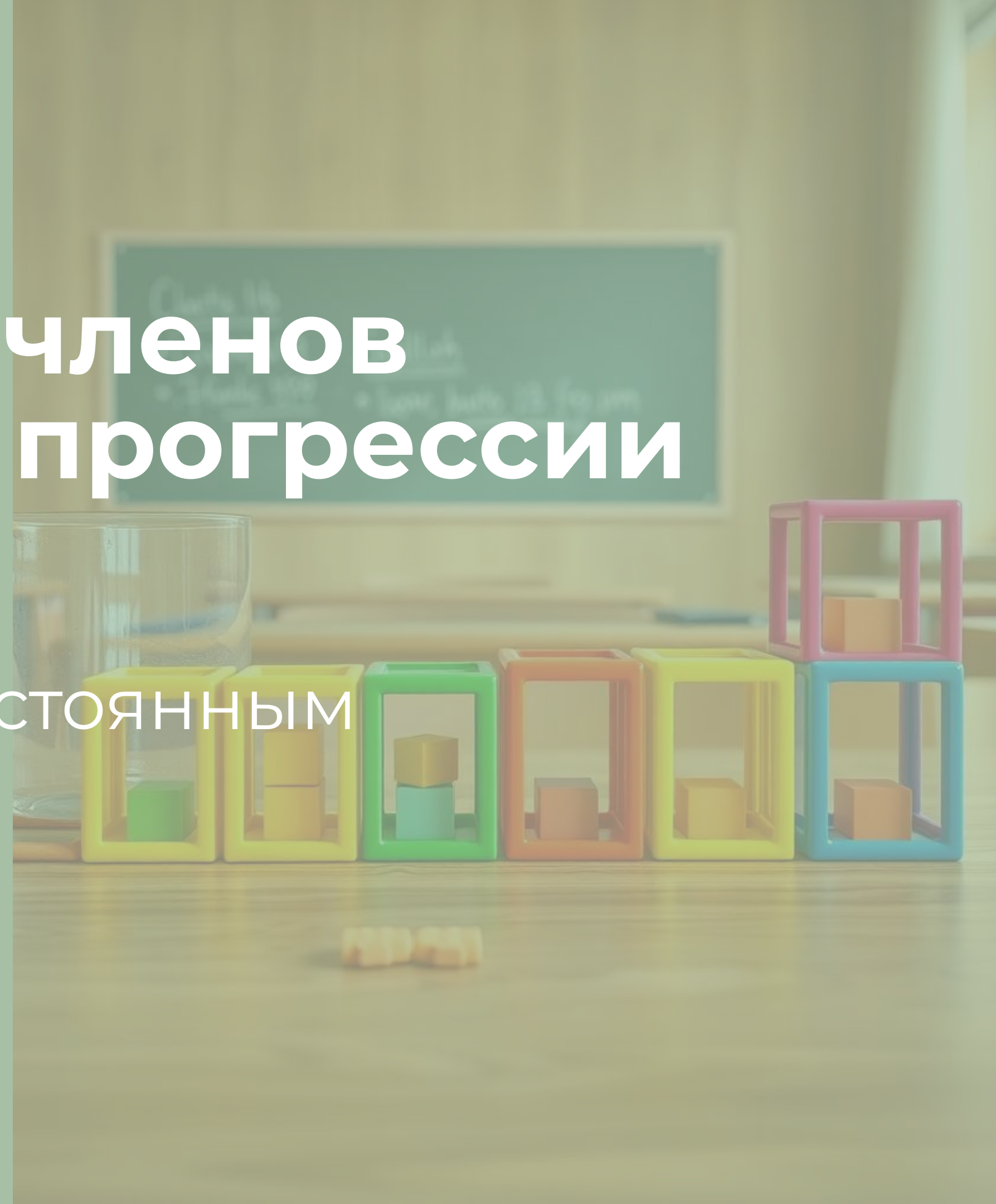


# Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии

Как быстро найти сумму  
последовательности с постоянным  
множителем?



A photograph of a classroom desk. On the desk, there is a wooden abacus with four columns of beads. To its right are two graduated cylinders filled with water; the one on the left has a blue cap and a blue dot on its side, while the one on the right has a green cap. A notebook with a red and white striped cover is partially visible on the left. In the background, a green chalkboard and a window are visible.

# Зачем нужна геометрическая прогрессия

Эта тема помогает понимать рост и убывание величин, работать со степенями и решать практические задачи из алгебры, в том числе про проценты, изменение количества объектов и вычисление суммы нескольких шагов подряд.

# Что такое геометрическая прогрессия

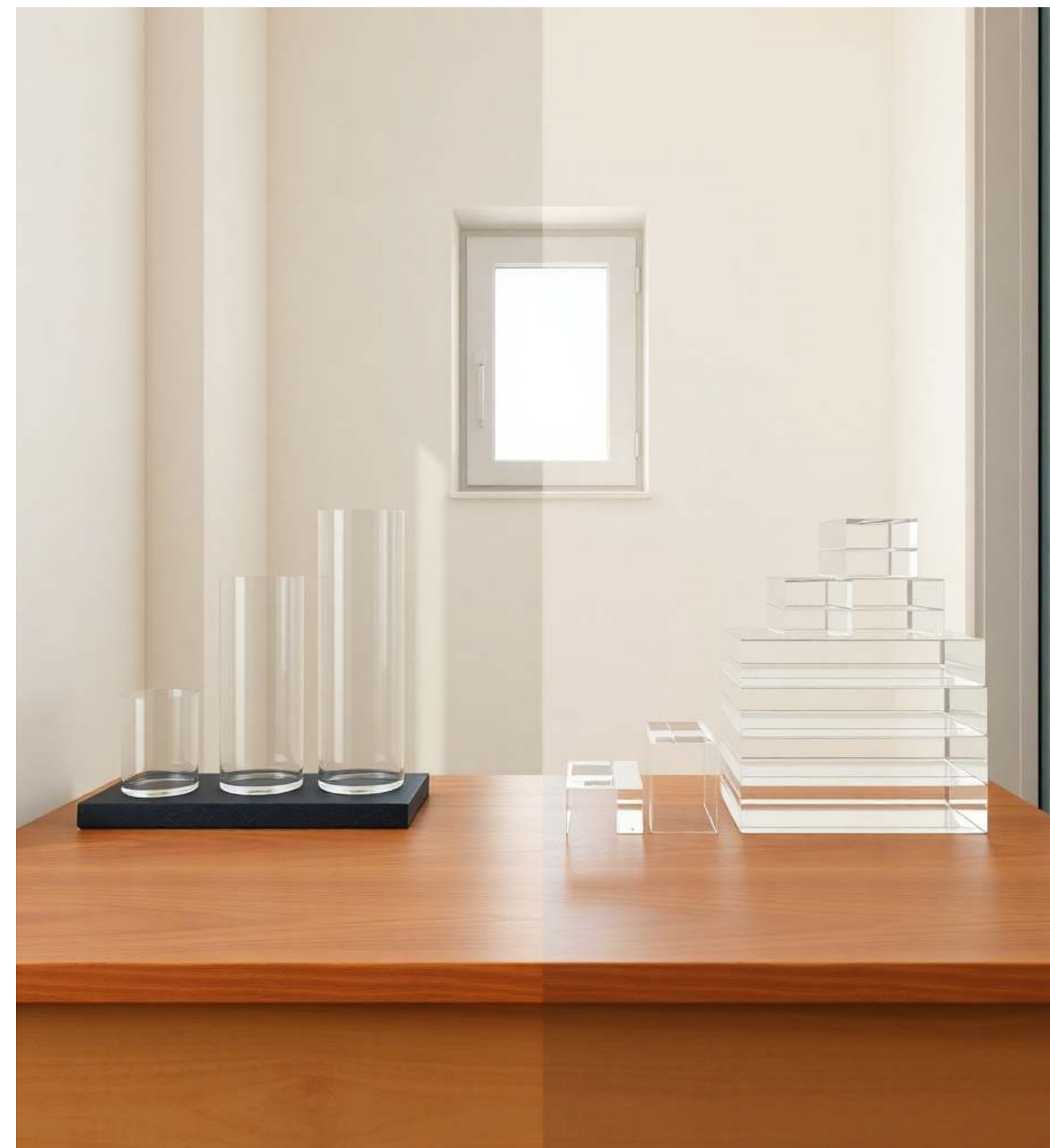
**01 Постоянное отношение**  
Геометрическая прогрессия — это последовательность, в которой каждый следующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число  $q$ .

**02 Первый член и знаменатель**  
Первый член обозначают  $b_1$ , а число  $q$  называют знаменателем прогрессии. Именно они определяют, как будет развиваться вся последовательность.

**03 Примеры роста**  
Записи 2, 4, 8, 16 и 5, 10, 20, 40 показывают увеличение, потому что  $q$  больше 1.

**04 Примеры убывания**  
Последовательность 81, 27, 9, 3 уменьшается, так как каждый член в три раза меньше предыдущего, то есть  $q$  меньше 1.

**05 Как влияет  $q$**   
При  $q > 1$  члены быстро растут, а при  $0 < q < 1$  постепенно уменьшаются, но остаются положительными.





# Первые $n$ членов и их запись

## Запись последовательности

Первые  $n$  членов геометрической прогрессии записывают так:  $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}$ . Каждый следующий член получается по одному и тому же правилу.

## Почему степень начинается с нуля

У первого члена степень  $q$  отсутствует, поэтому дальше показатели степени идут по порядку: 1, 2, 3 и так далее до  $n-1$ .

## Что означает $S_n$

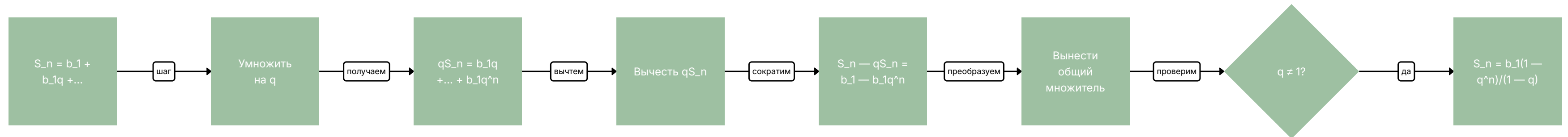
Сумма первых  $n$  членов обозначается  $S_n$ . Это сокращённая запись для суммы всех членов от первого до  $n$ -го включительно.

## Количество слагаемых

Если  $n = 5$ , в сумме будет пять слагаемых, а если  $n = 10$  — десять. Число  $n$  всегда показывает, сколько членов нужно сложить.

# Как выводится формула суммы

Преобразование суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии



# 2

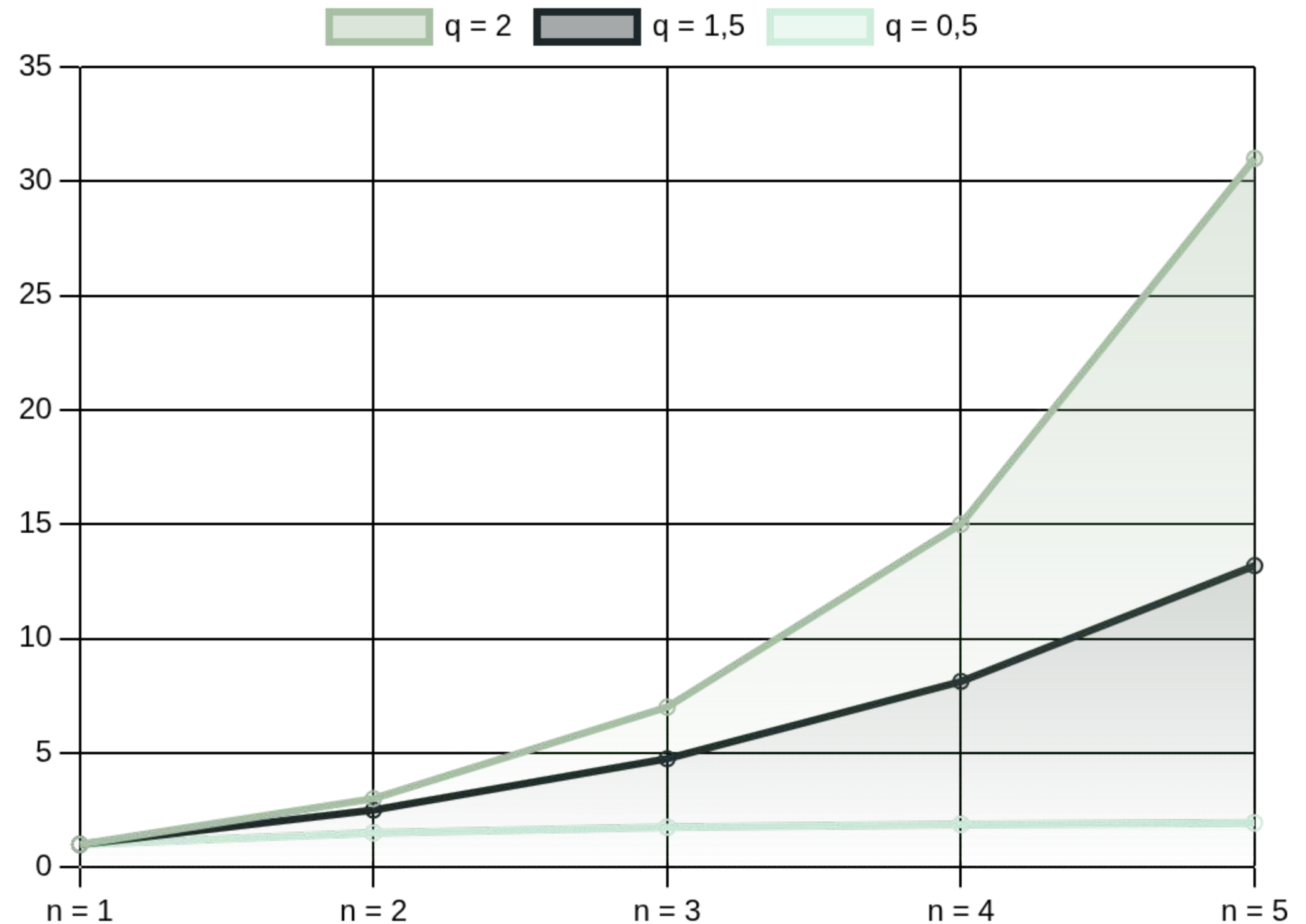
равносильные записи  
формулы дают  
одинаковый результат  
при вычислениях

Формула суммы помогает быстро  
находить результат без поэтапного  
сложения всех членов.

## Как меняется сумма при разных значениях $q$

На графике удобно сравнивать не отдельные члены, а итоговую сумму после каждого шага.

Чем больше  $q$ , тем быстрее растёт  $S_n$ ; при  $q$  меньше 1 прибавка становится всё слабее.



Расчёт по формуле  $S_n$  для  $b_1 = 1$ ; значения приведены для  $n = 1-5$

# Пример с удвоением каждого члена



## Исходная последовательность

Последовательность 3, 6, 12, 24, 48 — это геометрическая прогрессия, где первый член равен 3, а каждый следующий член вдвое больше предыдущего.

---

## Вычисление суммы

Для пяти членов используем формулу  $S_5 = 3(1 - 2^5)/(1 - 2)$ . После подстановки получаем 93, что подтверждает быстрый рост суммы.

---

## Что показывает пример

Когда  $q$  больше 1, каждый новый член заметно увеличивает общий результат. Поэтому сумма растёт намного быстрее, чем в последовательностях с маленьким знаменателем.

---



# Сравнение нескольких примеров вычисления суммы

Таблица показывает, как меняется результат в зависимости от первого члена, знаменателя и числа членов.

Сумма зависит не только от  $n$ , но и от  $q$ :  
при  $q > 1$  она растёт особенно быстро,  
а при  $q = 1$  считается отдельно.

| Последовательность | Параметры            | $S_n$ | Комментарий      |
|--------------------|----------------------|-------|------------------|
| 2, 4, 8, 16, 32    | $b_1=2; q=2; n=5$    | 62    | быстрый рост     |
| 81, 27, 9, 3       | $b_1=81; q=1/3; n=4$ | 120   | быстрое убывание |
| 5, 5, 5, 5         | $b_1=5; q=1; n=4$    | 20    | все члены равны  |

Примеры по формуле суммы геометрической прогрессии

# Частный случай $q = 1$

## 01 Одинаковые члены

Если  $q = 1$ , каждый следующий член равен предыдущему. Тогда вся последовательность состоит из одинаковых чисел:  $b_1, b_1, b_1$  и так далее.

## 02 Новая формула

В этом случае сумму находят просто:  $S_n = n \cdot b_1$ . Нужно умножить первый член на количество членов, потому что все слагаемые одинаковые.

## 03 Почему дробь не подходит

Подставлять  $q = 1$  в дробную формулу нельзя: в знаменателе получится  $1 - q = 0$ . Такой случай всегда проверяют отдельно перед вычислением.



# Почему формула работает



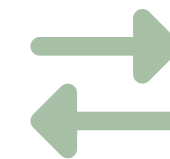
Записываем сумму

Сначала выписывают сумму первых  $n$  членов:  $b_1, b_1q, b_1q^2$  и так далее до  $b_1q^{n-1}$ . Так видно, какие слагаемые должны появиться после умножения на  $q$ .



Вычитаем суммы

При вычитании  $S_n - qS_n$  остаются только первый член  $b_1$  и последний член  $b_1q^n$ . Все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, поэтому выражение становится намного проще.



Умножаем на  $q$

Если всю сумму  $S_n$  умножить на  $q$ , каждый член сдвигается на одно место вправо. Тогда почти все слагаемые совпадают с исходной записью и готовы к сокращению.



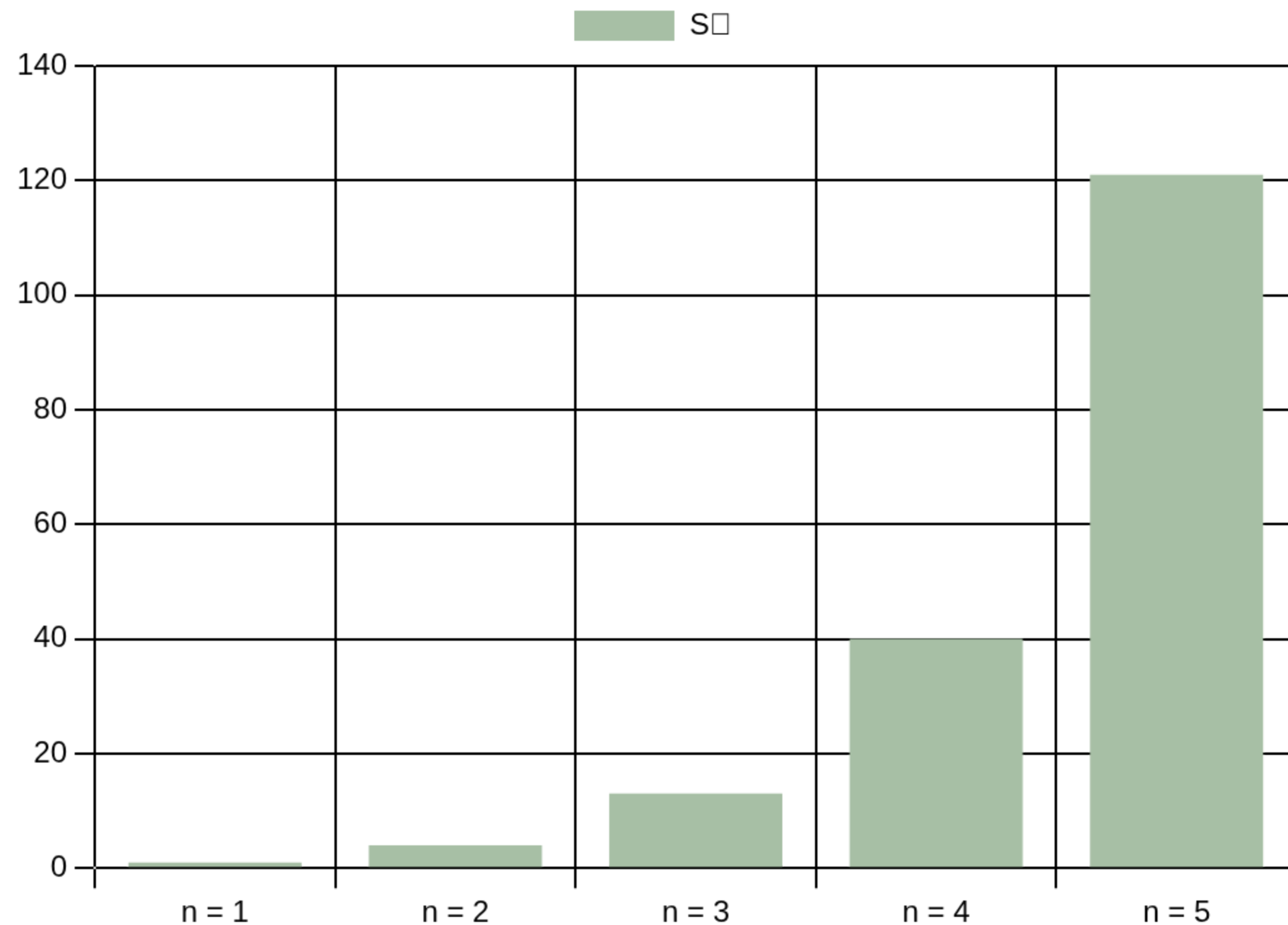
Получаем формулу

После вынесения общего множителя и деления на  $1 - q$  получается формула суммы. Она работает именно потому, что между соседними членами всегда один и тот же множитель  $q$ .

## Как растёт сумма по мере увеличения $n$

Для одной и той же прогрессии каждый новый член добавляет всё больший вклад в общий результат, поэтому разница между соседними столбцами быстро увеличивается.

При  $q > 1$  сумма растёт ускоренно: чем больше  $n$ , тем заметнее вклад последних членов.



Расчёты по формуле  $S_n$  для прогрессии 1, 3, 9, 27, 81.

# Типичные ошибки при вычислении суммы

## ■ Путают $b_1$ и $q$

Первый член  $b_1$  задаёт начало прогрессии, а  $q$  показывает, во сколько раз меняется каждый следующий член. Если их перепутать, все последующие вычисления будут неверными.

## ■ Неверная степень

В записи  $n$  первых членов последний показатель равен  $q^{n-1}$ , а не  $q^n$ . Ошибка в степени меняет последний член и сразу искажает всю сумму.

## ■ Забывают про $q = 1$

Формулу с дробью нельзя применять, когда  $q = 1$ , потому что знаменатель становится нулём. В этом случае сумма находится отдельно:  $S_n = n \cdot b_1$ .

## ■ Ошибаются в степенях

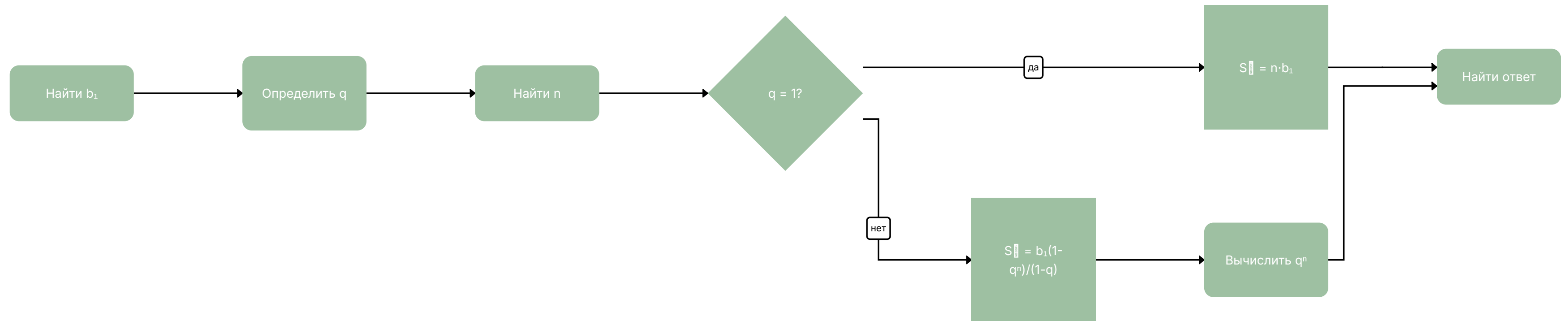
Часто неверно считают  $2^5$  или  $(\frac{1}{2})^4$ . Перед подстановкой полезно проверить, правильно ли вычислена степень и не потерян ли знак.

## ■ Не проверяют ответ

После вычисления стоит сравнить результат с первыми членами прогрессии. Если сумма не соответствует росту или убыванию последовательности, в решении есть ошибка.

# Алгоритм нахождения $S_n$

Последовательность действий при вычислении суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии



# Как знак и значение $q$ влияют на последовательность

| $q$            | Вид членов    | Сумма                |
|----------------|---------------|----------------------|
| 2              | положительные | быстро растёт        |
| $\frac{1}{2}$  | уменьшаются   | растёт медленнее     |
| -2             | чередуются    | то растёт, то падает |
| $-\frac{1}{2}$ | чередуются    | сближаются к нулю    |

Сравнение показывает, что знак и величина  $q$  меняют не только скорость роста, но и характер всех членов прогрессии.

Положительное  $q$  даёт одинаковый по знаку ряд, а отрицательное  $q$  вызывает чередование знаков и меняет поведение суммы.

*Свойства геометрической прогрессии и примеры вычислений.*

# Где встречается геометрическая прогрессия в жизни

## Банк и проценты

Когда вклад растёт на одинаковый процент каждый период, сумма увеличивается не на одно и то же число, а в одинаковое число раз. Поэтому через несколько шагов получается заметный прирост, как в геометрической прогрессии.



## Уменьшение по шагам

Геометрическая прогрессия помогает описывать не только рост, но и уменьшение: например, яркость, громкость или значение величины после каждого шага становится меньше в одно и то же число раз.



## Рост и размножение

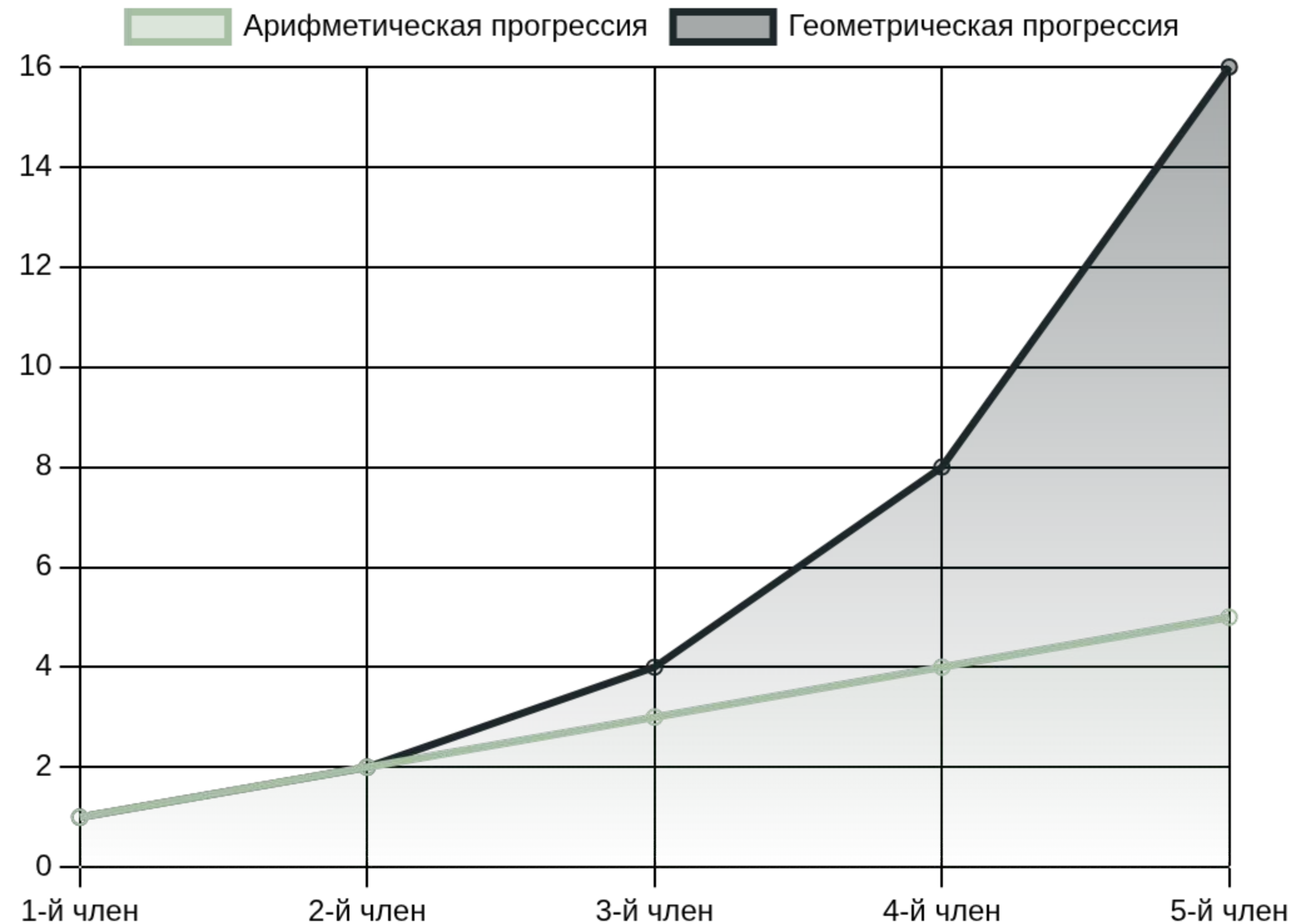
Размножение бактерий и рост числа подписчиков часто описывают повторным умножением на один коэффициент. Каждая новая группа становится больше предыдущей, если условия остаются одинаковыми.



# Сравнение арифметической и геометрической прогрессий

Обе последовательности начинаются одинаково, но дальше ведут себя по-разному: одна прибавляет, другая умножает. Это хорошо видно уже на первых пяти членах.

Геометрическая прогрессия при  $q > 1$  нарастает значительно быстрее, чем арифметическая, даже если стартовые значения совпадают.



Иллюстративные последовательности из условия задания.

# Связь с бесконечной геометрической прогрессией

## Первые члены уменьшаются

Если  $0 < q < 1$ , каждый следующий член становится меньше предыдущего. Последовательность постепенно приближается к нулю.

## Конечная сумма считается отдельно

В формуле  $S_n$  всегда важно точное число членов  $n$ . Для конечной прогрессии находят именно сумму первых  $n$  членов, а не предел.

## Сумма может иметь предел

При бесконечном продолжении такая прогрессия может стремиться к конечному числу. Это возможно только при условии  $|q| < 1$ .



# Мини-практикум по теме

Проверьте, как меняется сумма при разных значениях  $b_1$ ,  $q$  и  $n$ . В каждом примере ответ находится по одной и той же формуле.

Во всех заданиях ответ определяется тремя параметрами: первым членом, знаменателем и числом членов. Изменение любого из них меняет сумму.

| Пример                 | $S_n$ | Ответ          |
|------------------------|-------|----------------|
| 1, 3, 9, 27, 81        | $n=5$ | 121            |
| 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ | $n=4$ | $\frac{15}{2}$ |
| 7, 7, 7                | $n=3$ | 21             |
| 10, 5, 2,5, 1,25       | $n=4$ | 18,75          |

Расчёты по формуле суммы геометрической прогрессии.

# Главные итоги темы

Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии находится по формуле  $S_n = b_1(1 - q^n)/(1 - q)$ , а при  $q = 1$  — по формуле  $S_n = n \cdot b_1$ . Эта тема учит видеть рост, убывание и закономерности в числах.