
Комплексные числа: расширение числовой системы и новые возможности алгебры



Когда действительных чисел
недостаточно, математика открывает
комплексные.

Зачем школьнику нужны комплексные числа

При решении квадратных уравнений иногда появляется отрицательный дискриминант. Тогда в математике вводят новую единицу i и расширяют числовую систему, чтобы сохранить возможность находить решения и связать алгебру с геометрией.



Определение комплексного числа и его запись

01

Общая форма

Комплексное число записывают как $z=a+bi$, где a называют действительной частью, а b — мнимой. Здесь i — новая единица, для которой выполняется равенство $i^2=-1$.

02

Действительные числа

Если мнимая часть равна нулю, число не выходит за пределы привычной системы действительных чисел. Такие записи, как 7 или -3 , тоже рассматриваются как комплексные.

03

Чисто мнимые числа

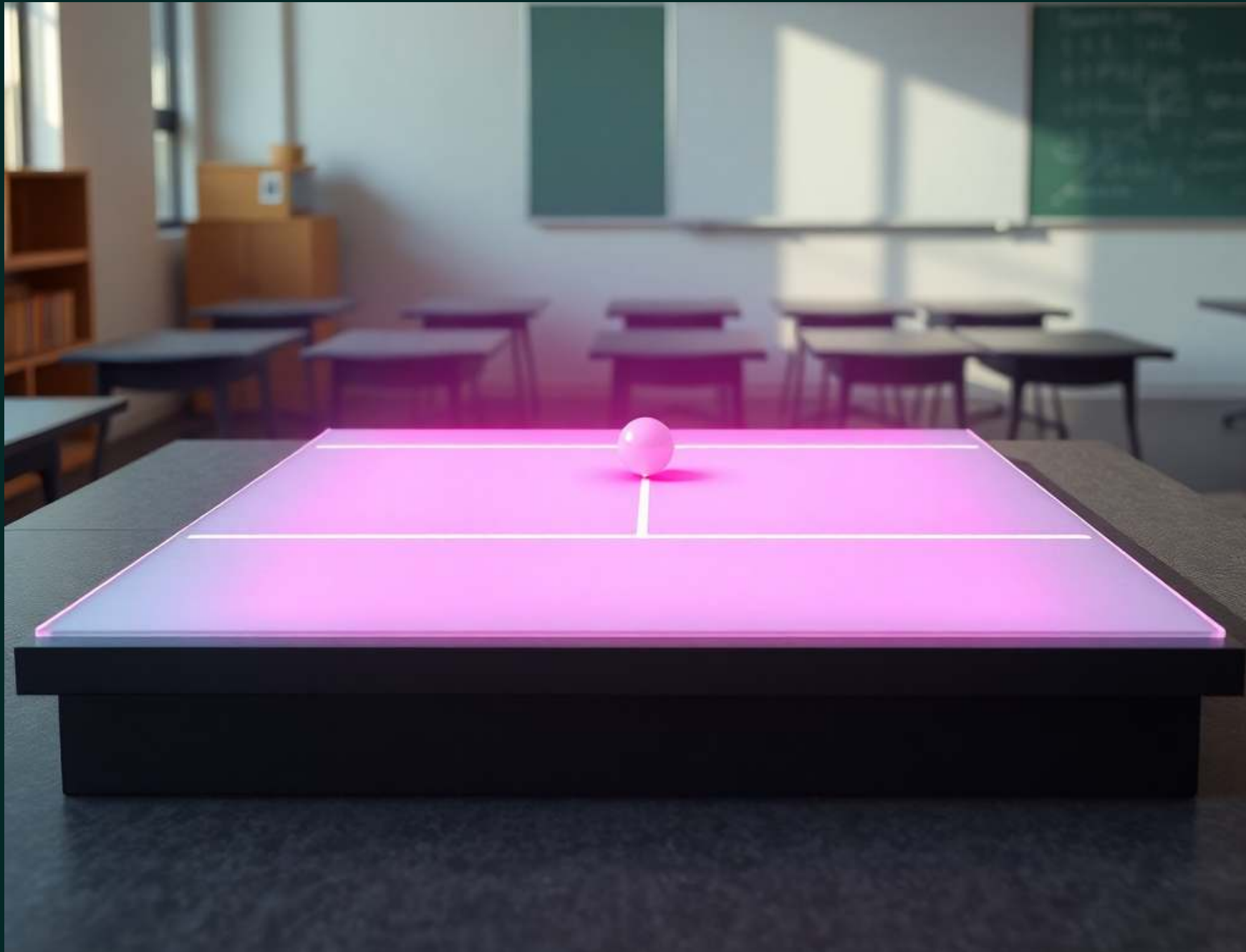
Если действительная часть равна нулю, получается чисто мнимое число. Примером служит $-5i$: оно не является действительным, но полностью принадлежит комплексной системе.

04

Разные примеры

Записи $3+2i$, $-5i$ и 7 показывают три случая одной и той же системы: число с обеими частями, чисто мнимое и обычное действительное число.

Комплексная плоскость и геометрический смысл записи $a+bi$



Оси координат

На комплексной плоскости горизонтальная ось отвечает действительной части, а вертикальная — мнимой. Поэтому запись $a+bi$ можно читать как координаты точки (a, b) .



Точка и вектор

Число z удобно изображать не только точкой, но и вектором из начала координат. Это делает видимыми направление и положение числа на плоскости.



Связь с модулем

Расстояние от начала координат до точки показывает модуль комплексного числа. Геометрически это длина вектора, соответствующего записи $z=a+bi$.



Связь с аргументом

Угол между положительным направлением оси Ox и вектором числа называют аргументом. Именно он показывает, в каком направлении расположен вектор на плоскости.

Формы записи комплексного числа и их назначение

Одна и та же величина может записываться по-разному в зависимости от задачи. Это помогает выбирать более короткий и удобный путь вычислений.

Форма записи выбирается по действию: координатная — для простых операций, тригонометрическая и показательная — для более сложных преобразований.

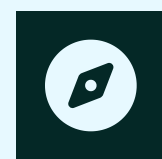
Форма	Запись	Назначение
Алгебраическая	$a+bi$	Сложение и вычитание
Тригонометрическая	$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$	Умножение и степени
Показательная	$re^{i\varphi}$	Формулы и преобразования

Модуль и аргумент комплексного числа



Модуль

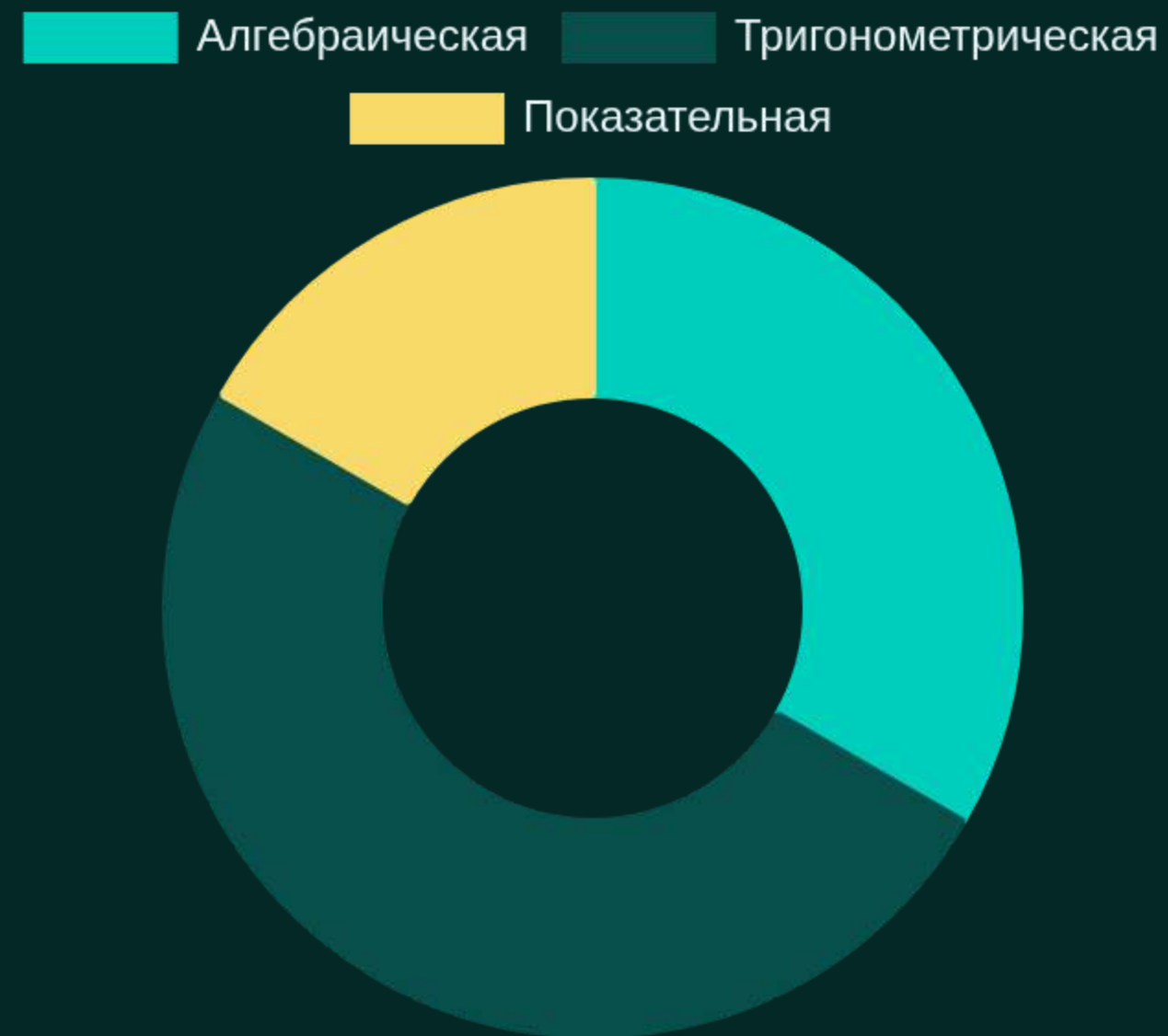
Модуль числа $z=a+bi$ равен $\sqrt{a^2+b^2}$.
Он показывает расстояние от точки до начала координат и всегда неотрицателен, поэтому не может быть отрицательной величиной.



Аргумент

Аргумент — это угол, который вектор числа образует с положительным направлением оси Ox .
Одному числу соответствует бесконечно много аргументов, отличающихся на $2\pi k$.

Основные операции над комплексными числами



- Разные формы записи не конкурируют между собой: каждая удобна для своей группы действий и сокращает вычисления.
- Алгебраическая форма лучше для суммы и разности, а тригонометрическая и показательная — для произведений, частных и степеней.

Школьные формулы действий над комплексными числами

Как находят комплексные корни квадратного уравнения

Последовательность действий при анализе дискриминанта и формулы корней

Сопряжённые комплексные числа и их свойства

Определение

Сопряжённым к $z=a+bi$ называют число $\bar{z}=a-bi$. Действительная часть сохраняется, а мнимая часть меняет знак, поэтому пара отличается только направлением мнимой составляющей.

Произведение

Если перемножить число и его сопряжённое, получится действительное число: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Этот результат равен квадрату модуля и часто используется в вычислениях.

Деление

Сопряжение особенно полезно при делении комплексных чисел. Умножение числителя и знаменателя на сопряжённое позволяет убрать мнимую часть из знаменателя.

Проверка вычислений

Сопряжённые числа помогают быстро контролировать ответ: если исходное число $4-3i$, то сопряжённое равно $4+3i$, а их произведение даёт 25.

Комплексные числа в геометрических преобразованиях

01 | Поворот

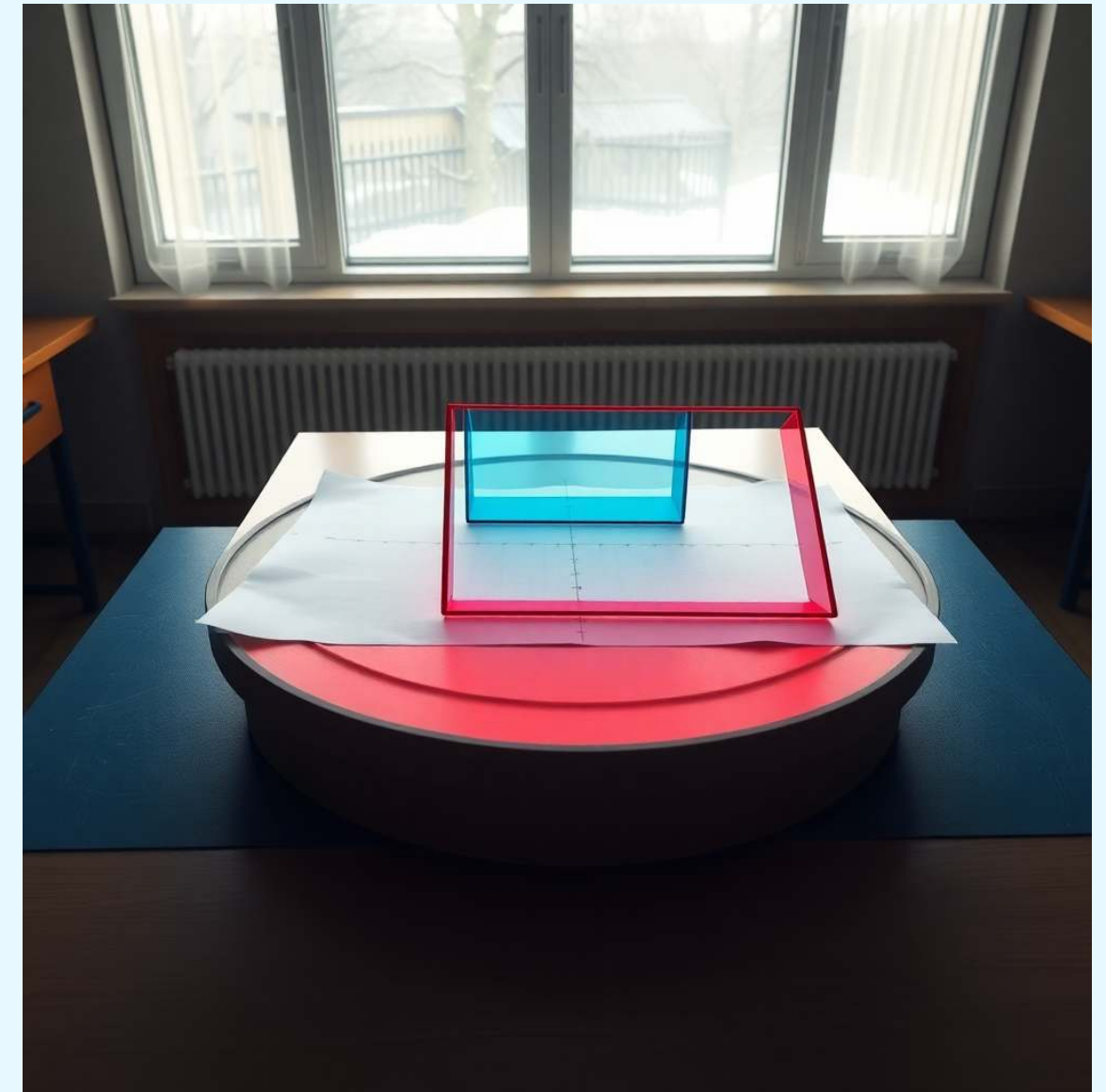
Умножение на число с модулем 1 соответствует повороту на плоскости. Аргумент такого множителя задаёт угол поворота, а модуль не изменяет длину.

02 | Растяжение и сжатие

Если модуль множителя равен r , то все расстояния увеличиваются или уменьшаются в r раз. Так комплексные числа описывают подобные преобразования фигур без лишних построений.

03 | Последовательные действия

При нескольких умножениях углы складываются, а коэффициенты перемножаются. Поэтому вращения и масштабирования удобно объединять в одной алгебраической записи, а не отслеживать отдельно.



Формула Муавра и корни n -й степени



Иллюстративный пример по формуле Муавра, школьный курс алгебры

- Для n -го корня аргументы образуют равномерную последовательность, а сами точки располагаются на одной окружности. Это позволяет сразу видеть все решения.
- Формула Муавра превращает поиск корней в геометрически понятную задачу: решения распределяются симметрично и не дублируются.

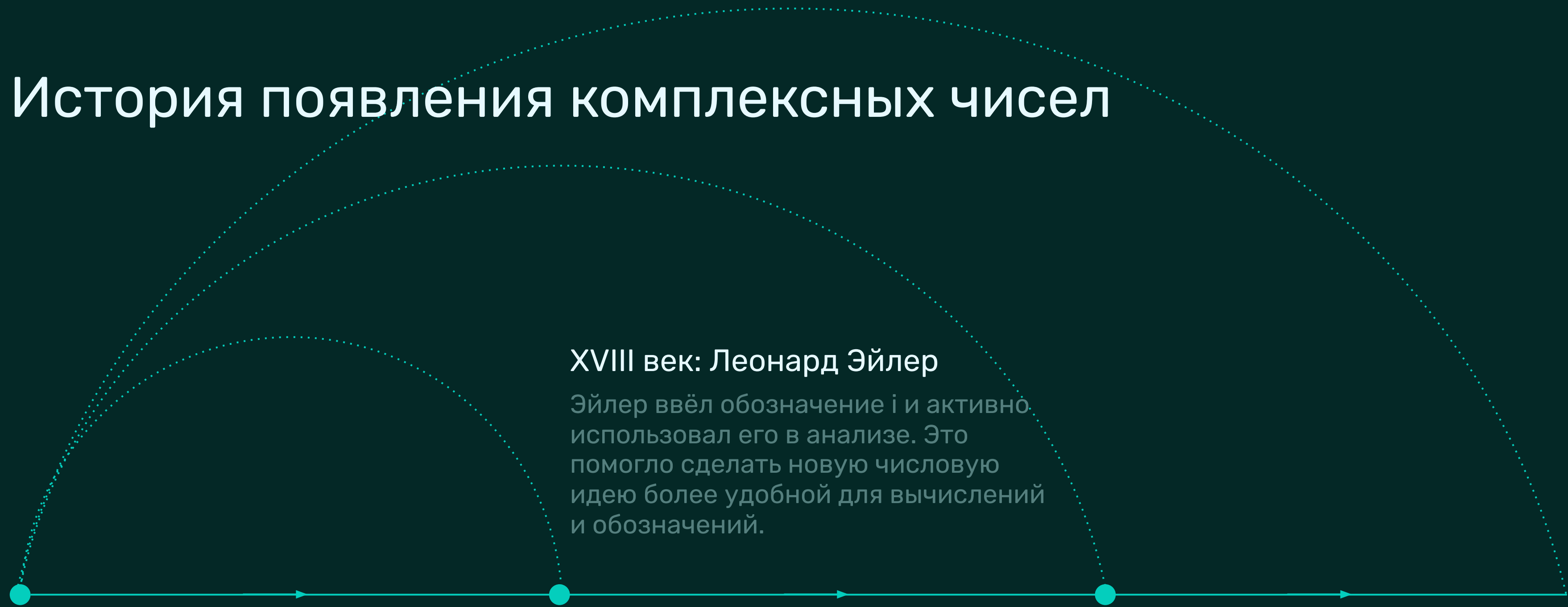
Какая форма записи удобна для разных действий

Действие	Форма	Причина
Сложение, вычитание	$a+bi$	Складываются части
Умножение, деление	$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$	Меняются r и φ
Степени	$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$	Формула Муавра
Модуль	$a+bi$	Формула $\sqrt{a^2+b^2}$

Разные формы записи комплексного числа удобны для разных операций: одна ускоряет вычисления, другая делает видимым геометрический смысл.

Алгебраическая форма удобна для координатных действий, а тригонометрическая – для преобразований, где важны модуль и аргумент.

История появления комплексных чисел

A horizontal timeline with three red dots representing key historical points. Three curved dotted lines arch over the timeline, connecting the dots. The first arch connects the 16th and 18th centuries, the second connects the 18th and 19th centuries, and the third connects the 16th and 19th centuries directly.

XVIII век: Леонард Эйлер

Эйлер ввёл обозначение i и активно использовал его в анализе. Это помогло сделать новую числовую идею более удобной для вычислений и обозначений.

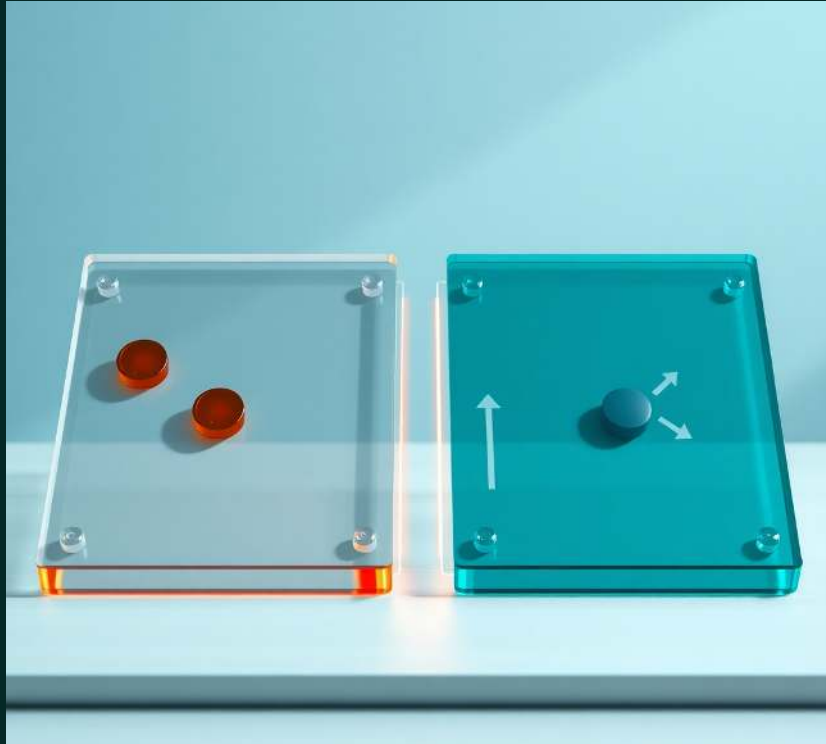
XVI век: Рафаэль Бомбелли

Бомбелли одним из первых систематически работал с мнимыми величинами при решении уравнений. Его записи показали, что формальные вычисления с такими числами могут быть полезны.

XIX век: Карл Фридрих Гаусс

Гаусс связал комплексные числа с точками на плоскости. Геометрическое толкование сделало теорию наглядной и окончательно укрепило её место в математике.

Примеры вычислений с комплексными числами



Сложение без лишних шагов

Вычисление $(3+2i)+(1-5i)=4-3i$ показывает, что складываются отдельно действительные и мнимые части. Такой приём сохраняет структуру числа и позволяет быстро проверить ответ по координатам на плоскости.



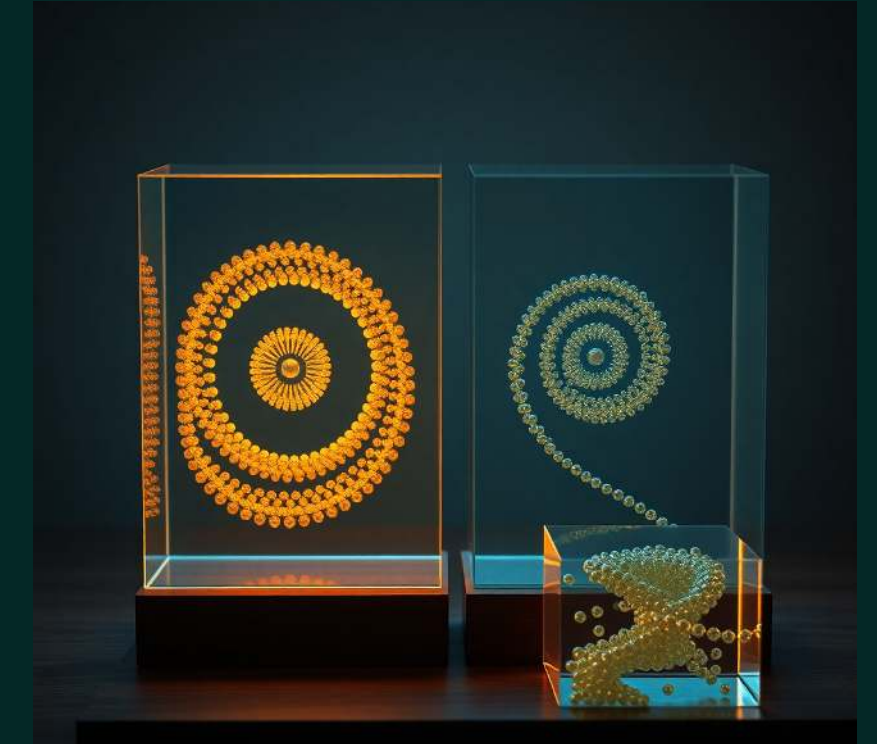
Произведение с учетом i^2

При умножении $(2+i)(2-i)$ раскрывают скобки и заменяют i^2 на -1 . В результате получается 5, то есть обычное действительное число, хотя исходные множители были комплексными.



Модуль как расстояние

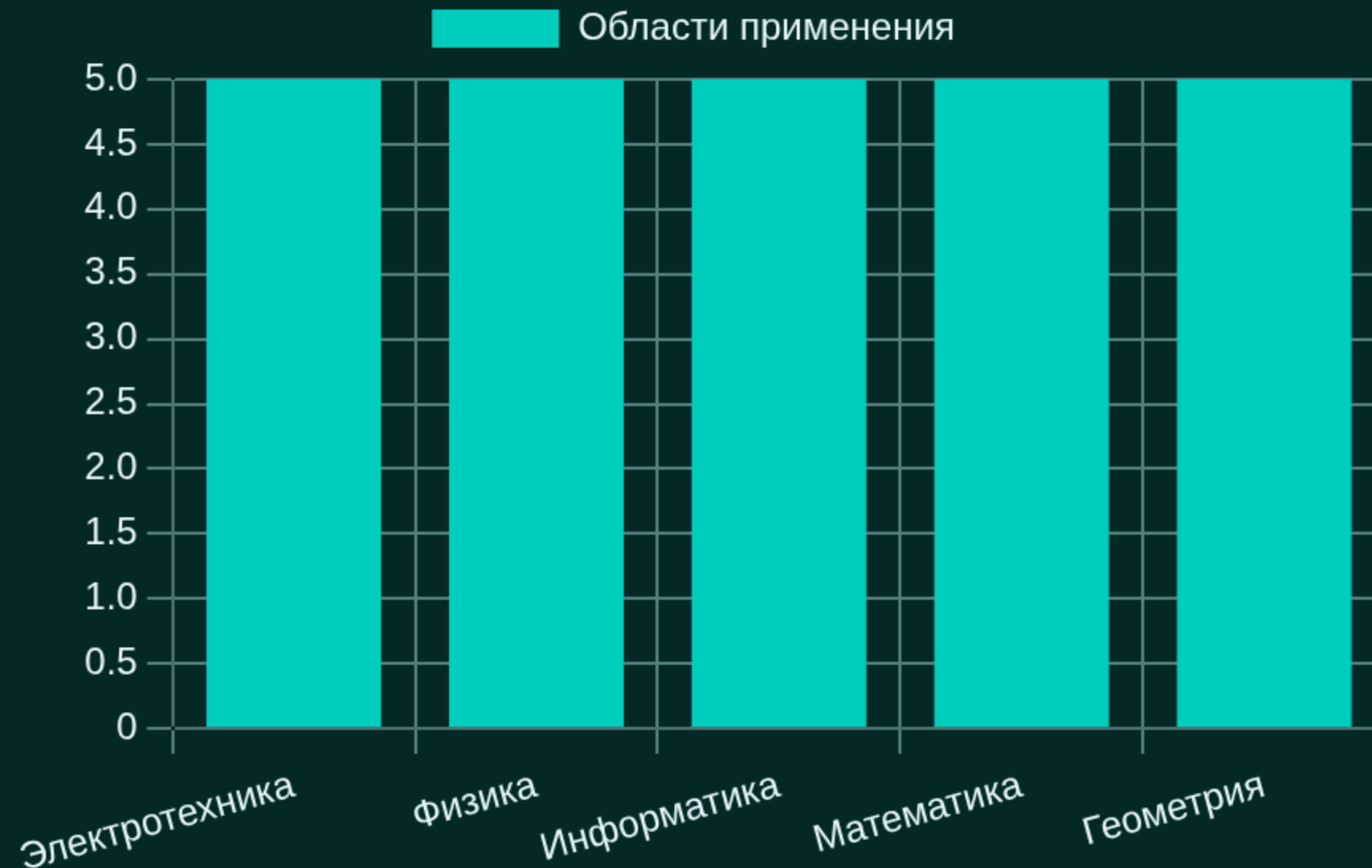
Для числа $3-4i$ модуль равен $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Здесь особенно видно геометрическое содержание: модуль показывает расстояние от точки до начала координат, а не просто величину записи.



Сопряжение и проверка

Если $z=5+12i$, то $\bar{z}=5-12i$, а произведение равно 169. Это удобно для контроля вычислений: результат становится действительным и равен квадрату модуля исходного числа.

Где применяются комплексные числа



Обобщение по школьному курсу и стандартным областям применения;
иллюстративная схема

- Во многих разделах математики и естественных наук комплексные числа позволяют объединить величину и фазу в одной записи.
- Одинаковая роль комплексной формы в разных областях показывает её универсальность: она упрощает описание процессов, где важны и число, и направление.

Типичные ошибки при работе с комплексными числами

01

Ищут $\sqrt{-1}$ в $\mathbb{R}$

Ошибка возникает, когда пытаются найти корень из отрицательного числа в множестве действительных чисел. В комплексной системе это выражается через i , поэтому важно сразу менять область рассмотрения.

02

Путают модуль и часть числа

Модуль — это не действительная часть, а расстояние до начала координат. Он всегда неотрицателен и вычисляется по формуле $\sqrt{a^2+b^2}$, даже если a или b отрицательны.

03

Складывают модули вместо чисел

При сложении нужно объединять сами комплексные числа по компонентам, а не их модули. Иначе теряется информация о мнимой части и ответ становится неверным.

04

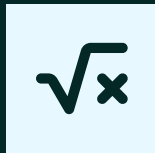
Забывают про $i^2 = -1$

При умножении часто пропускают замену i^2 на -1 . Именно этот шаг превращает выражение из формального произведения в правильный результат и предотвращает алгебраические ошибки.

Как выбрать способ решения задачи с комплексными числами

Последовательность выбора формы записи и метода зависит от типа действия и цели вычислений.

Комплексные числа в курсе алгебры 10 класса



Понимание расширения чисел

Тема показывает, почему уравнения с отрицательным дискриминантом не имеют решений в $\mathbb{R}$ и как введение i делает систему чисел более полной и логически согласованной.



Связь разделов математики

Комплексные числа объединяют алгебру, тригонометрию и геометрию. Благодаря этому ученик видит, что формула, график и преобразование на плоскости описывают одну идею.



Экономия вычислений

На задачах повышенного уровня комплексная форма часто сокращает длинные преобразования. Это особенно заметно при степени, корнях и анализе многочленов.

Ключевые факты о комплексных числах

Ниже собраны основные определения и записи, которые нужно уверенно различать при решении задач.

Эти факты образуют рабочий набор для вычислений: они позволяют переходить от алгебраической записи к геометрическому смыслу и обратно.

Понятие	Запись	Смысл
Комплексное число	$z=a+bi$	Две части
Мнимая единица	$i^2=-1$	Новая основа
Модуль	$ z =\sqrt{a^2+b^2}$	Расстояние
Сопряжённое число	$\bar{z}=a-bi$	Полезно в делении

Базовые определения школьного курса алгебры

Комплексные числа: от расширения системы к решению задач

Комплексные числа показывают, как математика развивается через расширение понятий. Они делают доступными новые решения, связывают алгебру с геометрией и помогают быстрее работать с уравнениями, степенями и преобразованиями.