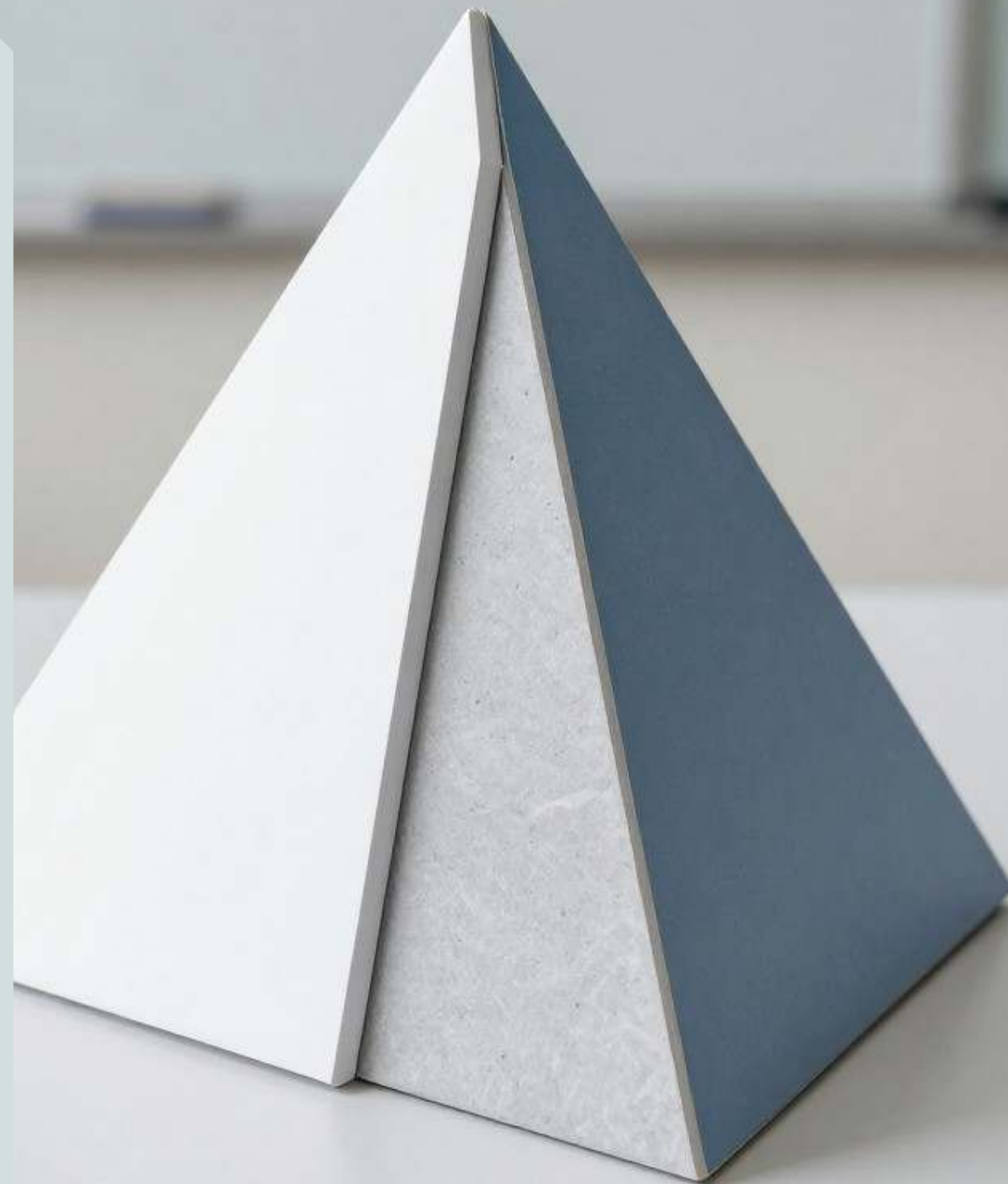
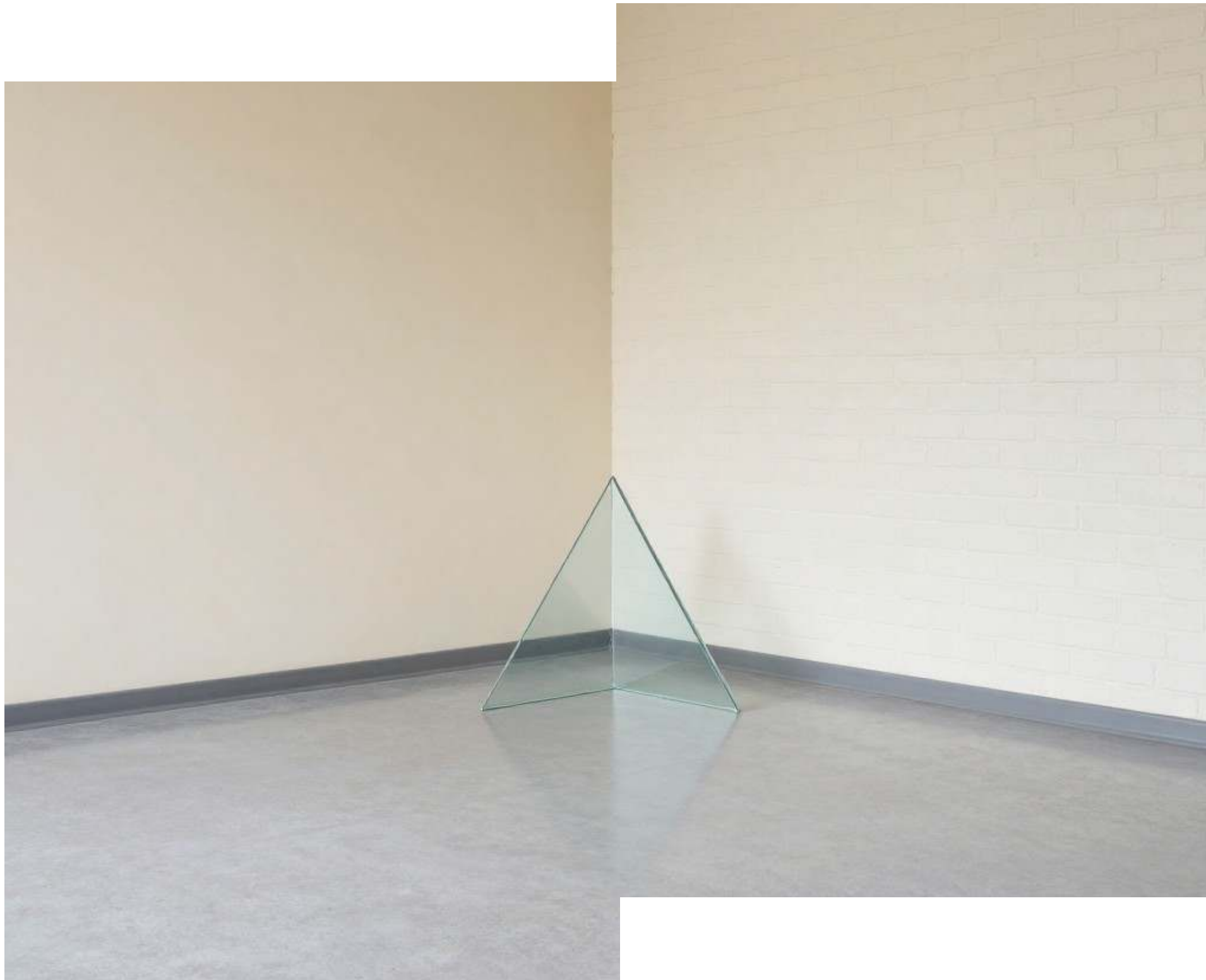


Трехгранный угол: базовый объект стереометрии в школьном курсе

Фигура из трех плоскостей, пересекающихся в одной точке:
вершина, ребра и плоские углы.



Зачем это нужно именно в 11 классе



Трехгранный угол моделирует «локальную форму» многогранника в его вершине. Через связь с двугранным углом, перпендикулярностью, проекциями и расстояниями он помогает перейти от плоских построений к стереометрии. Особенно нагляден на кубе и пирамидах.

Определение и элементы трехгранного угла

01

Трехгранный угол образуют три полуплоскости с общей границей и общей вершиной. Общая точка называется вершиной трехгранного угла и фиксирует начало «пространственного» построения.

02

Попарное пересечение полуплоскостей задает три общие прямые. Эти прямые называют ребрами трехгранного угла — по ним сходятся «границы» между гранями.

03

В каждой полуплоскости образуется угол между двумя ребрами; это плоский угол трехгранного угла. В школьных задачах обозначение задают через вершину и точки на ребрах, например $SABC$.

Элементы трехгранного угла и их геометрический смысл

Трехгранный угол удобно понимать через соответствие каждому элементу «роль» в пространстве и в измерениях.



Трехгранный угол полностью определяется тремя пересекающимися плоскостями; его «внутренность» задается их взаимным расположением в одной точке.



Элемент	Что это	Где встречается
Вершина	Общая точка трех граней	Куб: вершина
Ребра	Пересечения пар граней	Пирамида: ребра у вершины
Плоские углы	Углы в каждой грани	Комната: угол стены и потолка
Грани	Три полуплоскости	Любой многогранник: «окружение» вершины

Плоские углы трехгранного угла

01

У трехгранного угла всегда три плоских угла: каждый лежит в своей грани и определяется углом между двумя ребрами. Измеряют их в градусах так же, как обычные углы на плоскости.

02

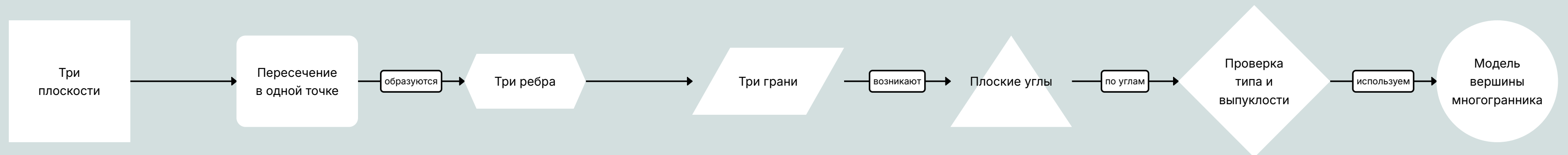
Для прямоугольного трехгранного угла все три плоских угла равны 90° . Это происходит, когда каждая пара граней взаимно перпендикулярна.

03

Для острого трехгранного угла все плоские углы меньше 90° . Для выпуклого — каждый плоский угол меньше 180° ; если хотя бы один «разворачивается», выпуклость теряется.

От трех плоскостей к трехгранному углу

Логическая цепочка возникновения фигуры в пространстве



Трехгранный угол на примере вершины куба



01

Три ребра как «оси» одной точки

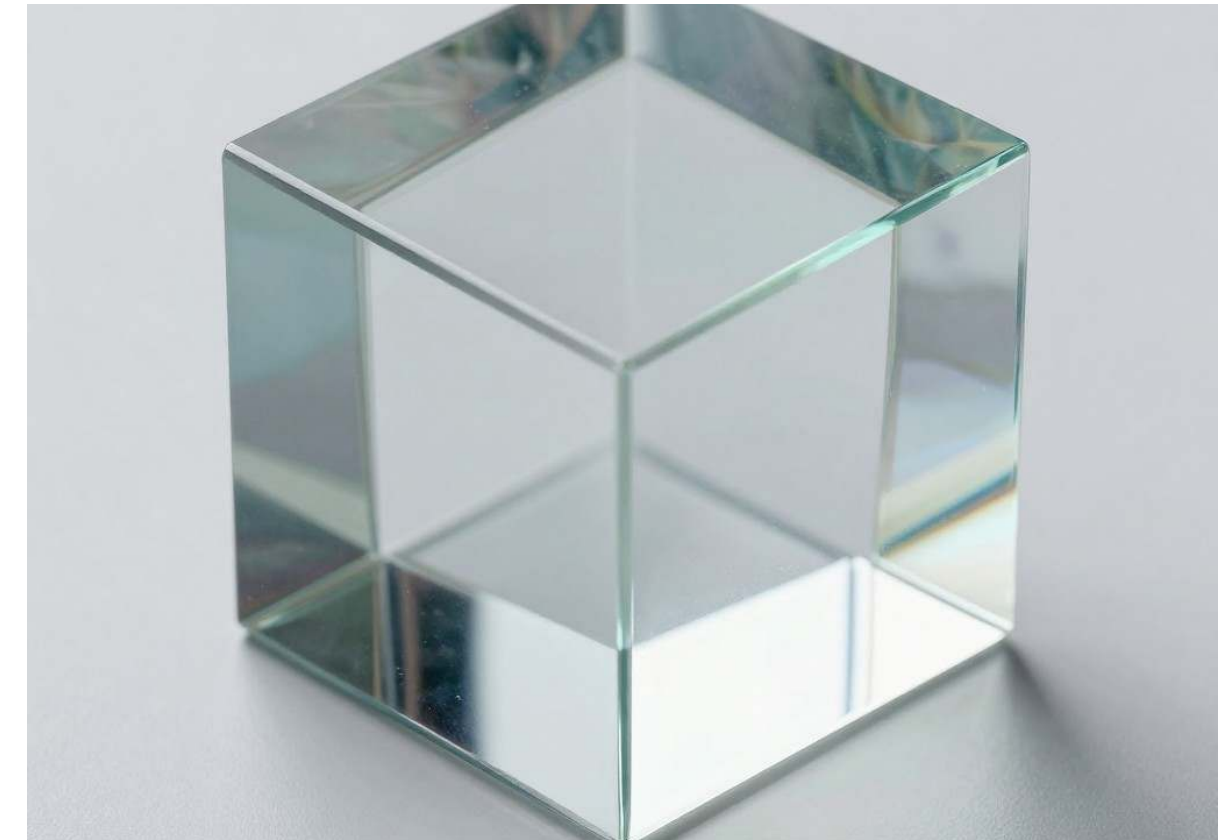
Представьте вершину куба: от нее расходятся три ребра, которые образуют сразу три направления в пространстве. Это удобно мысленно соотнести с тем, как задают координаты на плоскости: только здесь координатные направления «развернуты» в 3D.



02

Три грани дают три плоских угла

В кубе прилегающие грани взаимно перпендикулярны. Поэтому в каждой грани возникает плоский угол ровно 90° . Так видно, что трехгранный угол — это не «один» угол, а согласованная тройка углов.



03

Почему пример куба проще всего для понимания

Куб действует как наглядная модель: его геометрия симметрична, а углы в вершинах одинаковы. На рисунке это особенно хорошо видно в «угловой» части параллелепипеда, где три плоских угла складываются в единую пространственную конфигурацию.

Чем трехгранный угол отличается от двугранного



Количество граней

Двугранный угол описывает две грани, а трехгранный — три. Поэтому в задачах первый отвечает за «поворот» между соседними поверхностями, а второй — за форму в вершине.



Сколько ребер участвует

У двугранного угла выделяется одно ребро, тогда как у трехгранного — три ребра. Это сразу усложняет конфигурацию, потому что углы нужно рассматривать в трех разных плоскостях.



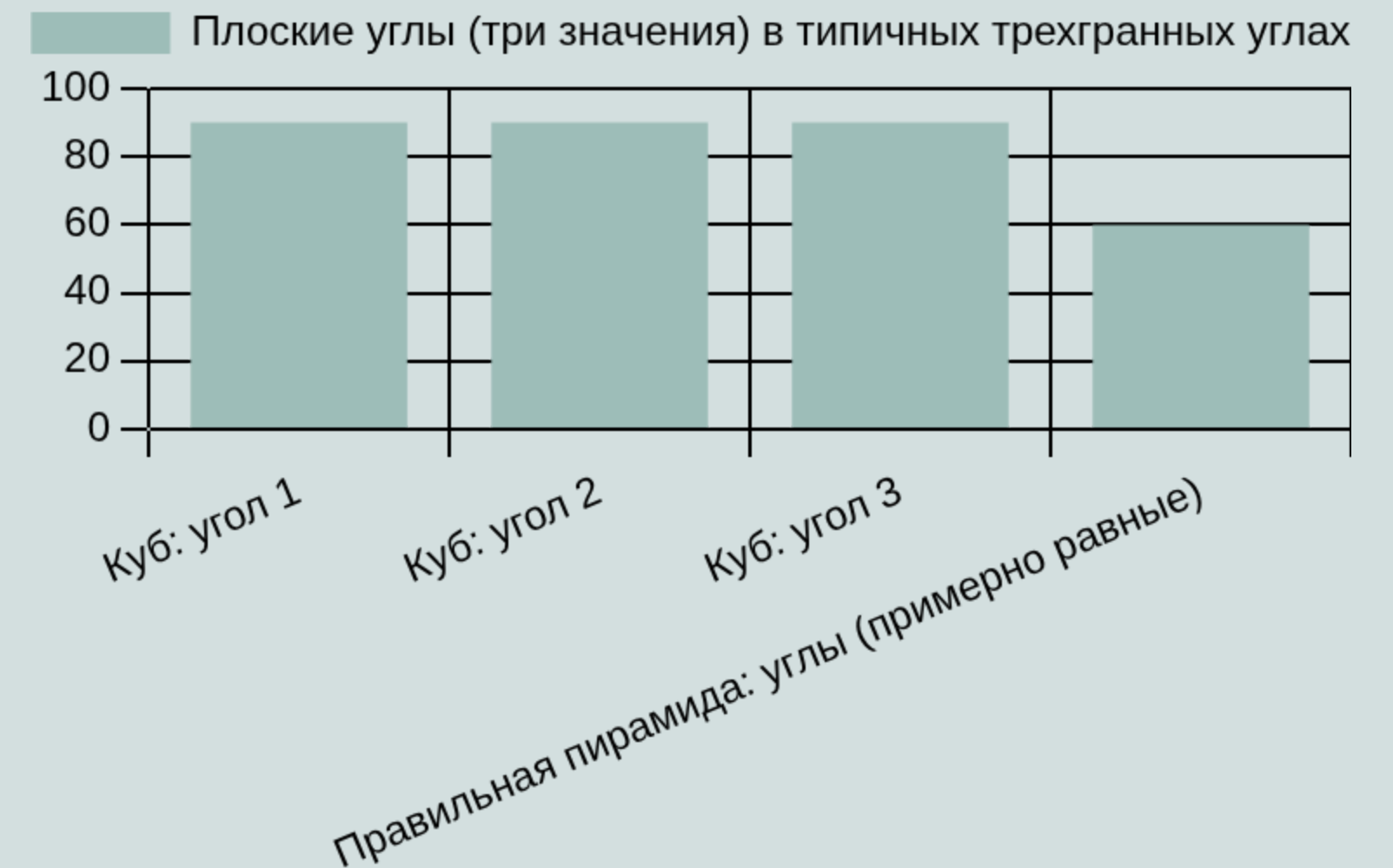
Связь с задачами на многогранники

Вершина многогранника естественно задается через трехгранный угол: там сходятся сразу три грани. Двугранный угол чаще привязывают к отношению двух соседних граней.

Сравнение плоских углов в типичных трехгранных углах

В общем выпуклом случае углы различаются, поэтому задача часто сводится к определению каждого плоского угла в своей грани.

Главный вывод: «вид» трехгранного угла задают не только количество граней, но и численные значения трех плоских углов и их соотношение.



Выпуклый трехгранный угол

Выпуклый трехгранный угол расположен в одной части пространства и не содержит внутренних «вогнутых» участков. Его внутренние точки лежат по одну сторону от каждой из ограничивающих плоскостей.



Эта геометрическая картина соответствует вершинам выпуклых многогранников, с которыми школьники чаще всего работают в стереометрии. Поэтому выпуклость — ключевое свойство при классификации углов.



Если хотя бы один плоский угол становится развернутым (приближается к 180°) или фигура «заворачивается» внутрь, трехгранный угол перестает быть выпуклым. Тогда поведение углов и построений меняется.



В задачах на углы проверка выпуклости помогает избежать неверного чертежа и подобрать корректную модель вершины многогранника для дальнейших вычислений.



Трехгранный угол и вершина многогранника

Каждая вершина многогранника задает локальную пространственную форму, которую удобно описывать трехгранным углом: в окрестности сходятся три грани, и их пересечения формируют три ребра и три плоских угла.

У куба все вершины одинаковы: рядом с каждой вершиной сходятся три взаимно перпендикулярные грани, поэтому соответствующий трехгранный угол везде имеет одинаковые плоские углы 90° .

У пирамиды различаются углы при вершине и при вершинах основания: в разных точках меняются расстояния между гранями, а значит меняется набор плоских углов трехгранного угла при этих точках.

Трехгранные углы в разных многогранниках

Фигура	Число граней у вершины	Характер плоских углов	Пример
Куб	3	три прямых	90°, 90°, 90°
Прямоугольный параллелепипед	3	три прямых	прямые углы
Правильный тетраэдр	3	три равных острых	одинаковые острые
Правильная четырехугольная пирамида	4	набор острых	различные величины

Таблица связывает вершину многогранника с числом граней, сходящихся в ней, и характером плоских углов, образующих трехгранный угол.

Форма вершины определяется тем, какие плоские углы образуются пересечением граней: при одинаковом числе граней различаться может их “угловая” геометрия.

Свойства трехгранного угла и сравнение фигур



Признак равенства

Трехгранные углы равны, если можно совместить их соответствующие ребра и плоские углы: тогда совпадает и локальная конфигурация граней в пространстве.



Симметрия и упорядочивание

При сравнении используют симметрию фигуры и равенство плоских углов в гранях. Важно сохранять порядок граней, иначе можно “перепутать” ориентацию пространства.



Значимость для правильных многогранников

Особенно полезно это свойство для правильных многогранников: у них симметрия гарантирует одинаковость “углового” строения в вершинах, что упрощает доказательства.

Какие величины чаще всего находят в задачах

В практических заданиях последовательность обычно такая: сначала находят углы в гранях, затем переходят к углам в пространстве и только после — к длинам и расстояниям.

Диаграмма показывает “мост” трехгранного угла: угловая информация в плоскостях грани помогает корректно интерпретировать пространственные измерения.



Теорема о трех перпендикулярах в задачах с трехгранным углом

01

Теорема связывает перпендикуляр к прямой в плоскости с пространственным перпендикуляром к этой плоскости. В задачах по трехгранному углу она помогает переносить перпендикулярность “вглубь” пространства.

02

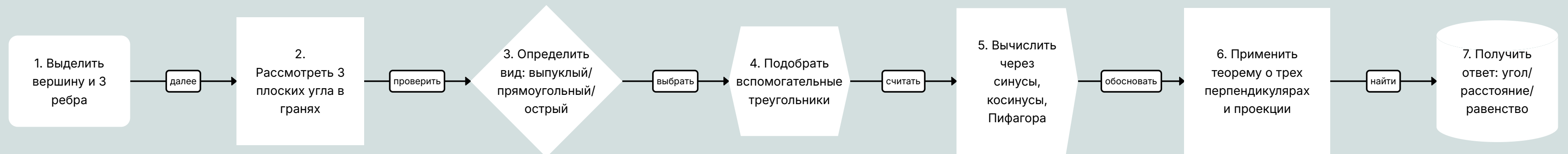
С ее помощью доказывают взаимную перпендикулярность ребер, находят расстояния до плоскостей и строят проекции: от удобной плоскостной схемы переходят к требуемой пространственной фигуре.

03

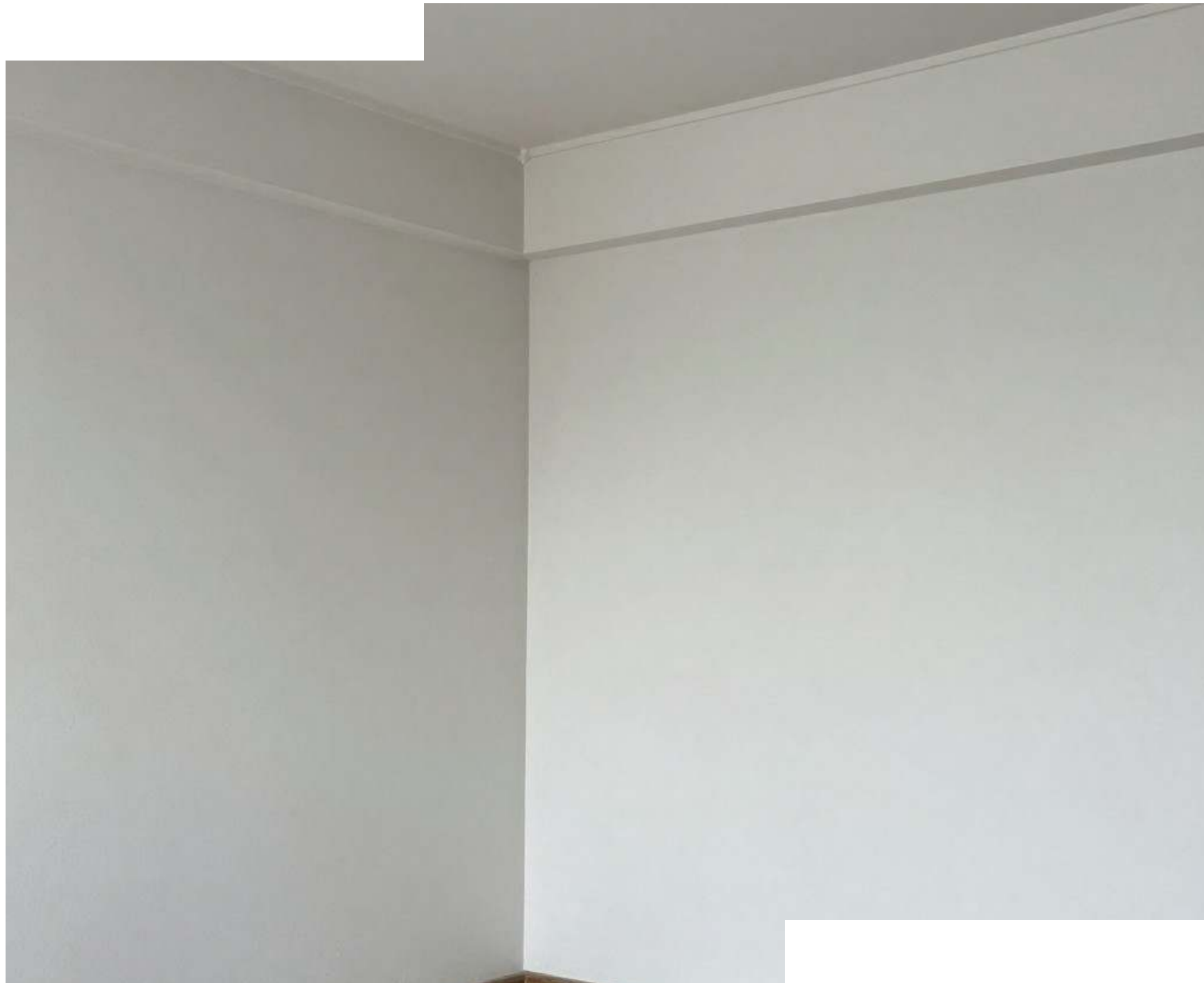
Для пирамид и призм теорема особенно уместна при работе с высотой, апофемой и наклонными ребрами: после установления перпендикуляров проще вычислять длины и углы через треугольники.

Алгоритм решения задач на трехгранный угол

От идеи вершины к искомому углу или расстоянию — через плоские углы, проекции и перпендикуляры.



Где в реальной жизни встречается трехгранный угол



Трехгранные углы встречаются в углах комнат, где сходятся стены и потолок, а также в стыках архитектурных элементов. Аналогичный принцип есть в каркасах крыш: пересечение несущих плоскостей образует “угловую” локальную форму.

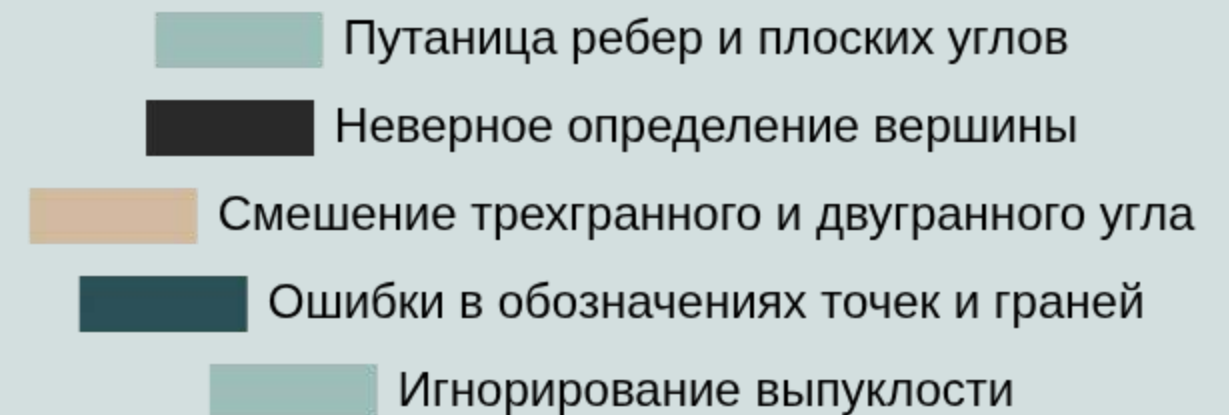
→

В инженерных конструкциях вершины пирамидальных форм — например, у некоторых кровельных обшивок — тоже описываются трехгранными углами. В природе похожие конфигурации наблюдают в кристаллах, где грани сходятся под характерными углами.

Типичные ошибки при изучении темы

Чаще всего ошибки проявляются на этапе “что именно я называю трехгранным углом”: без проверки количества граней легко принять неправильный фрагмент фигуры.

Пик ошибок связан с визуальным чтением чертежа. Поэтому перед вычислениями нужно проговаривать: какие именно три грани сходятся и где расположены ребра.



Обобщение наблюдений преподавателей по типовым работам; доли оценочные и могут отличаться по группам.

Ключевые факты и опорные формулировки

01

Трехгранный угол образован тремя полуплоскостями с общей вершиной. Его элементы удобно запоминать сразу: вершина, три ребра и три плоских угла, лежащих в соответствующих гранях.

03

Для решения задач на тему ключевыми инструментами остаются чертеж, проекции, перпендикуляры и теорема Пифагора. В гранях также помогают свойства треугольников, где вычисления становятся более привычными.

02

Вершина многогранника часто представляет собой трехгранный угол: локальная форма определяется тем, как именно расположены грани относительно друг друга. Поэтому при разных типах многогранников плоские углы различаются.

04

Чтобы доказать равенство или найти величины, полезно последовательно переходить от плоских углов в гранях к пространственным отношениям. Так меньше вероятность потерять геометрический смысл ответа.

Итоги темы: зачем нужен трехгранный угол

Трехгранный угол объединяет плоскую и пространственную геометрию, помогая описывать форму многогранников в их вершинах. Понимание фигуры поддерживает задачи на углы, расстояния, перпендикулярность и построения в стереометрии 11 класса.