

Уравнения с двумя переменными и их системы

Ищем пару чисел, которая делает равенство верным.



Две переменные вокруг нас

Цена и количество, скорость и время, длина и ширина — в таких задачах одна величина зависит от другой. Уравнения помогают описать связь, а система — выбрать только подходящую пару значений.



В одном уравнении с двумя переменными
решений обычно несколько: подходят разные
сочетания x и y .

Определение из школьного курса алгебры

2

неизвестные входят
в одно равенство
и могут принимать
разные пары значений.

Пары решений на координатной плоскости

Точка для каждой пары

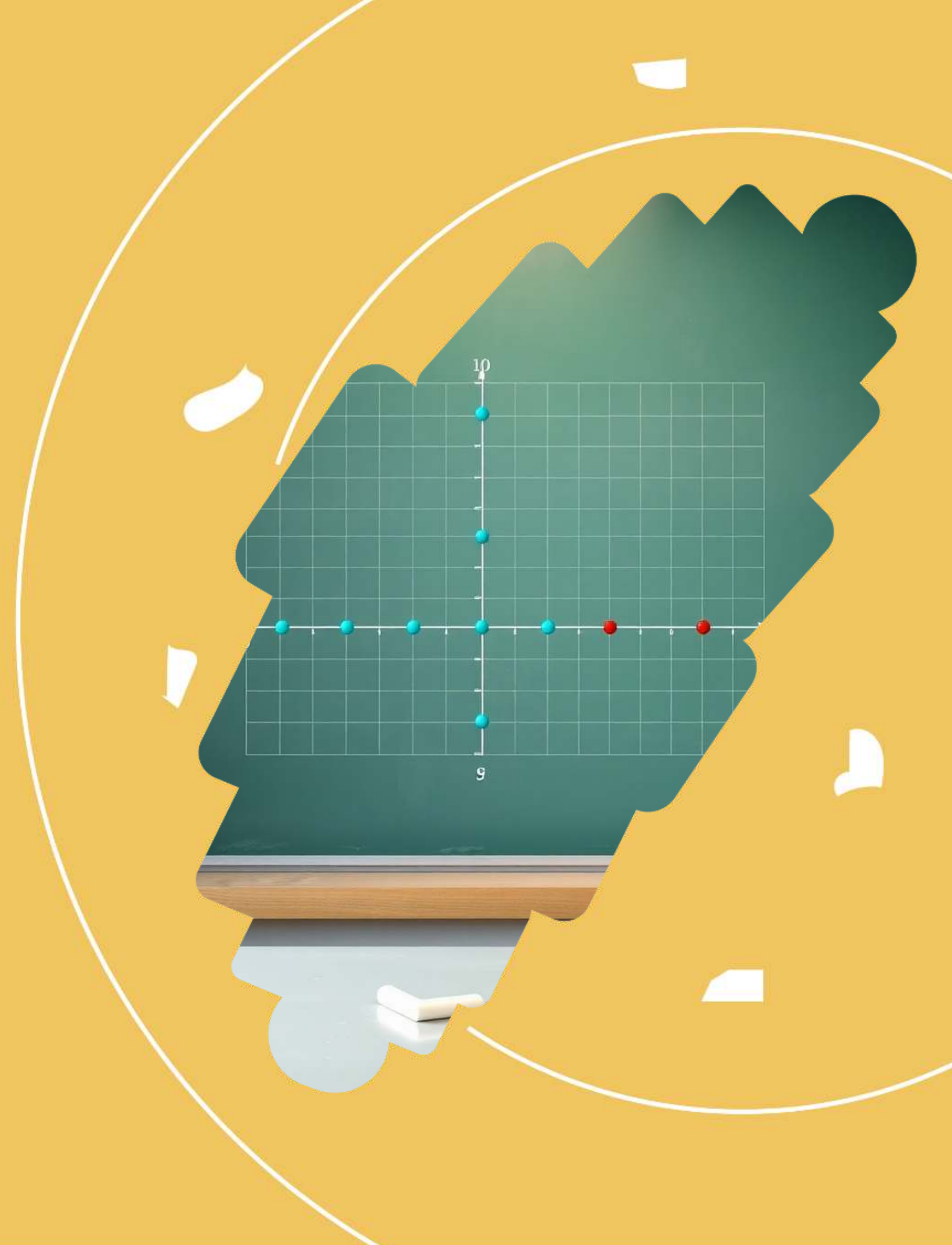
Каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует своя точка на плоскости. Поэтому решение можно не только записать, но и увидеть на рисунке.

Все подходящие точки

Если отметить все точки, удовлетворяющие одному уравнению, получится целое множество. Для линейных уравнений эти точки обычно выстраиваются в прямую.

График как подсказка

По расположению точек легче понять, сколько решений имеет уравнение. График показывает не один ответ, а весь набор подходящих пар значений.



Примеры решений уравнения $2x + y = 6$

Несколько пар чисел проверяют одно и то же равенство и все подходят.

Одно уравнение с двумя переменными может иметь несколько решений.

Проверка подстановкой в уравнение $2x + y = 6$

x	y	Результат
0	6	верно
1	4	верно
2	2	верно
3	0	верно

Сколько решений бывает в разных случаях

Количество решений зависит не от формулы сама по себе, а от того, как графики расположены на плоскости.

Одно уравнение даёт множество решений; система может иметь одно, ни одного или бесконечно много решений.

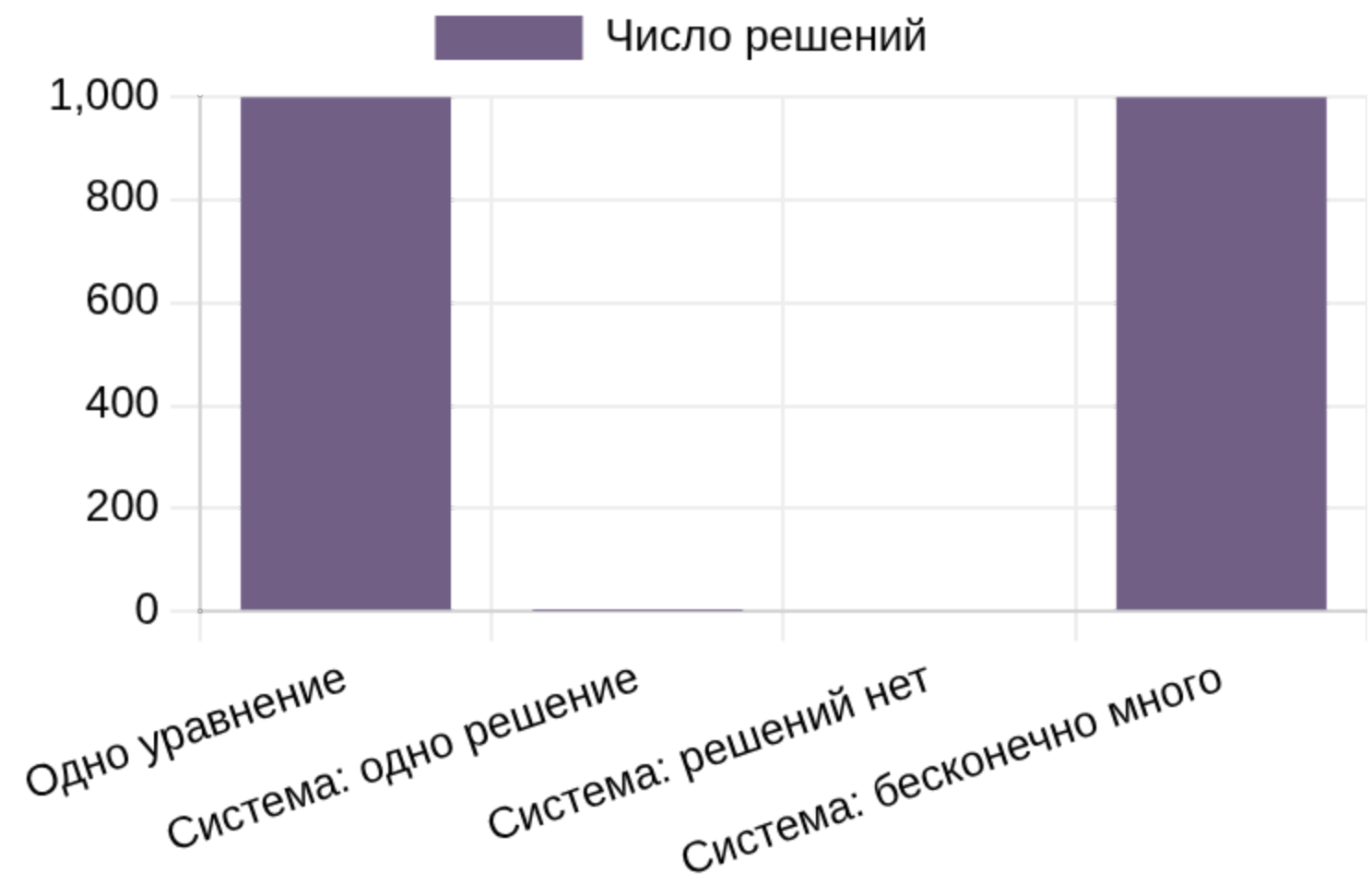
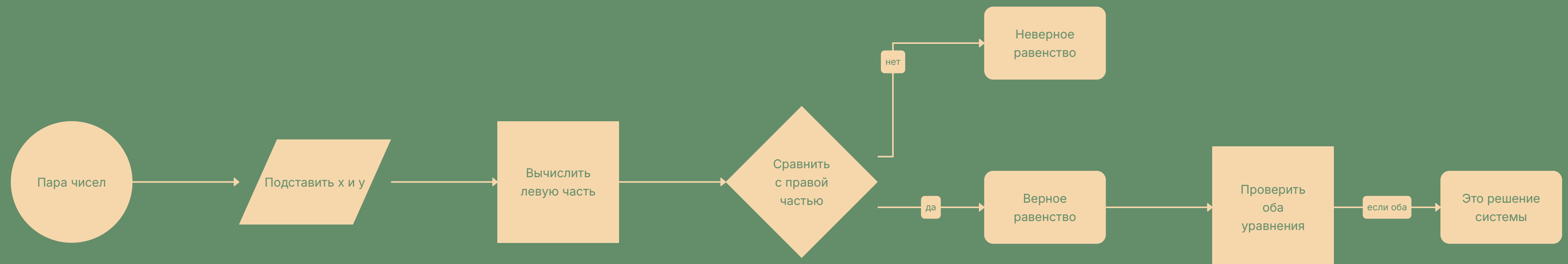


Схема по теме «Уравнения с двумя переменными и их системы»

Проверка пары чисел

Последовательность действий при подстановке значений в уравнение и систему



Что такое система уравнений



1

Общие переменные

Система объединяет два или несколько уравнений с одними и теми же переменными. Это значит, что каждое уравнение описывает одну и ту же ситуацию с разных сторон.



2

Единый ответ

Решением системы считают пару чисел, которая подходит всем уравнениям сразу. Если хотя бы одно уравнение не выполняется, такая пара не считается ответом.



3

Общая цель

При решении системы важно не найти отдельный ответ для каждого уравнения, а отыскать их общее решение. Именно оно удовлетворяет всем условиям задачи.

Графический смысл системы

Точка пересечения

Если графики двух уравнений пересекаются, координаты точки пересечения являются решением системы. Это самый наглядный способ увидеть общий ответ.

Проверка на рисунке

Если линии не пересекаются или совпадают, по рисунку сразу видно, что решений либо нет, либо их бесконечно много.

Одна точка — один ответ

Когда прямые пересекаются ровно в одной точке, система имеет единственное решение. Координаты этой точки подходят обоим уравнениям одновременно.



Три случая для графиков двух уравнений



Положение прямых на координатной плоскости показывает, сколько решений имеет система.



Число решений системы определяется взаимным положением графиков.

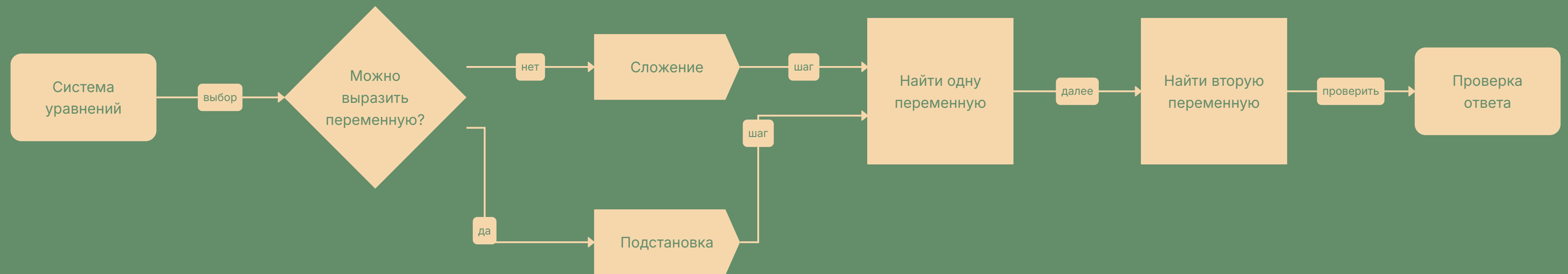


Свойства графиков линейных уравнений

Положение графиков	Сколько решений
Пересекаются	одно
Параллельны	нет
Совпадают	бесконечно много

Основные способы решения системы

Алгоритм выбора метода: сначала определить вид системы, затем применить подстановку или сложение, найти обе переменные и обязательно проверить ответ.



Способ подстановки

1

Выразить переменную

Сначала преобразуют одно из уравнений так, чтобы одна переменная была записана через другую. Это удобно, когда коэффициент равен 1 или -1, и выражение получается коротким.

2

Подставить во второе

Полученное выражение заменяют во втором уравнении. Так система превращается в уравнение с одной переменной, которое уже проще решить обычным способом.

3

Найти вторую переменную

После вычисления первой переменной подставляют её значение обратно в любое из исходных уравнений. Так находят вторую переменную и получают полную пару решений.

4

Проверить результат

В конце полезно подставить найденные значения в оба уравнения. Если оба равенства верны, ответ записан правильно и система решена полностью.

Способ сложения

1

Сделать коэффициенты равными

Сначала смотрят, можно ли сложить уравнения так, чтобы одна переменная исчезла. Если коэффициенты разные, одно или оба уравнения умножают на подходящее число.

3

Вернуться к системе

Когда первая переменная найдена, её подставляют в одно из исходных уравнений. Затем вычисляют вторую переменную и проверяют, подходит ли пара чисел обоим уравнениям.

2

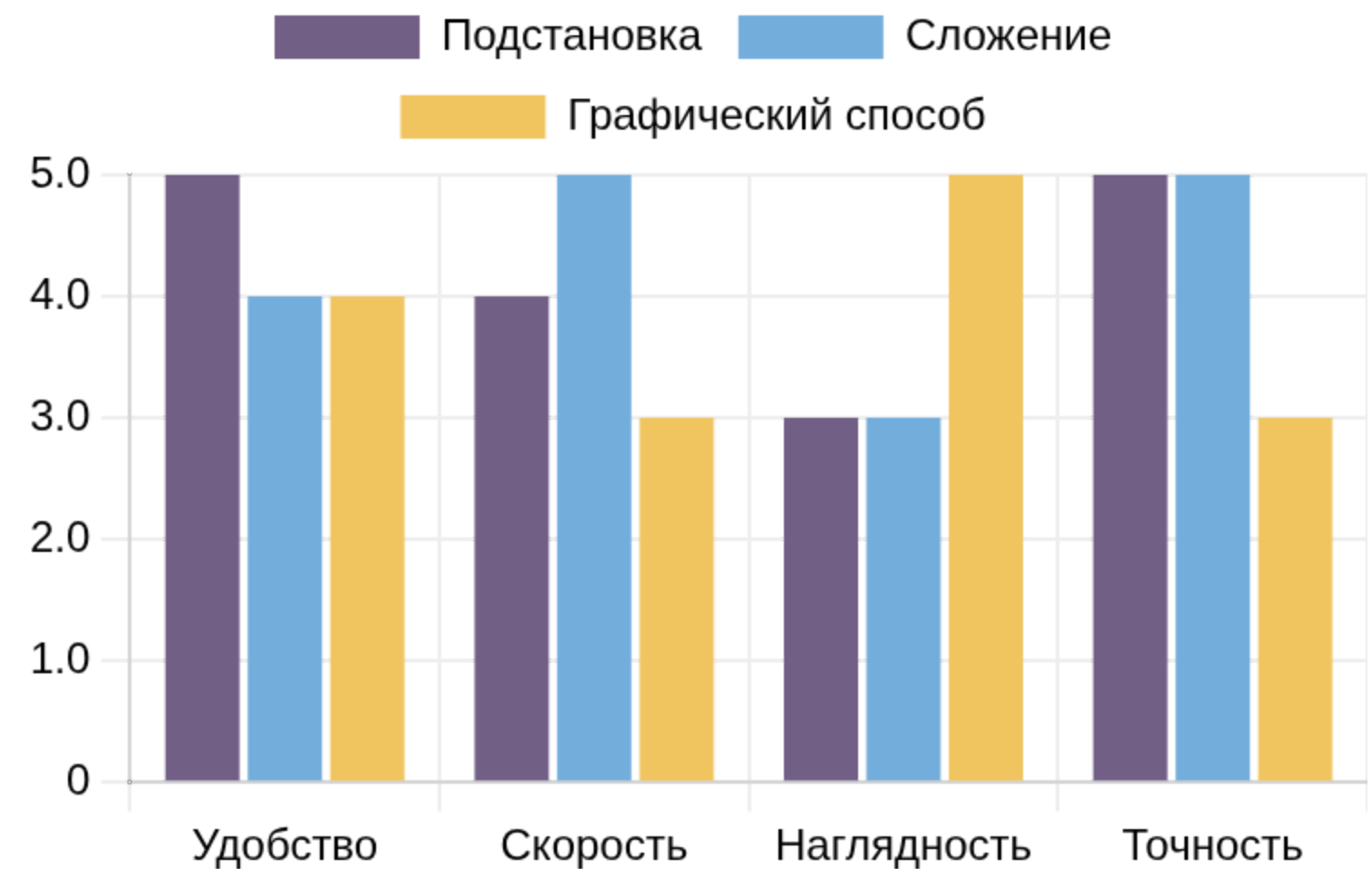
Сложить уравнения

После преобразования уравнения складывают или вычитают. В результате остаётся уравнение только с одной переменной, которое можно решить без лишних шагов.

Сравнение способов решения

Оценка показывает, что у каждого способа есть сильная сторона: один помогает быстро выразить переменную, другой — быстрее убрать её, третий лучше объясняет смысл ответа.

Выбор метода зависит от вида системы: для точного вычисления чаще удобны подстановка и сложение, а график полезен для понимания ситуации.



Сравнительная учебная оценка по свойствам методов, 2025

Алгоритм решения и проверки ответа

1

Выбрать способ

Сначала внимательно смотрят на систему и выбирают удобный метод: подстановку, если легко выразить одну переменную, или сложение, если коэффициенты можно быстро сделать одинаковыми.

2

Найти одну переменную

После преобразований получают уравнение с одной неизвестной. Его решают обычным способом и записывают найденное значение аккуратно, без перестановки знаков.

3

Вычислить вторую

Найденное значение подставляют в одно из исходных уравнений. Так находят вторую переменную и получают пару чисел, которую нужно проверить.

4

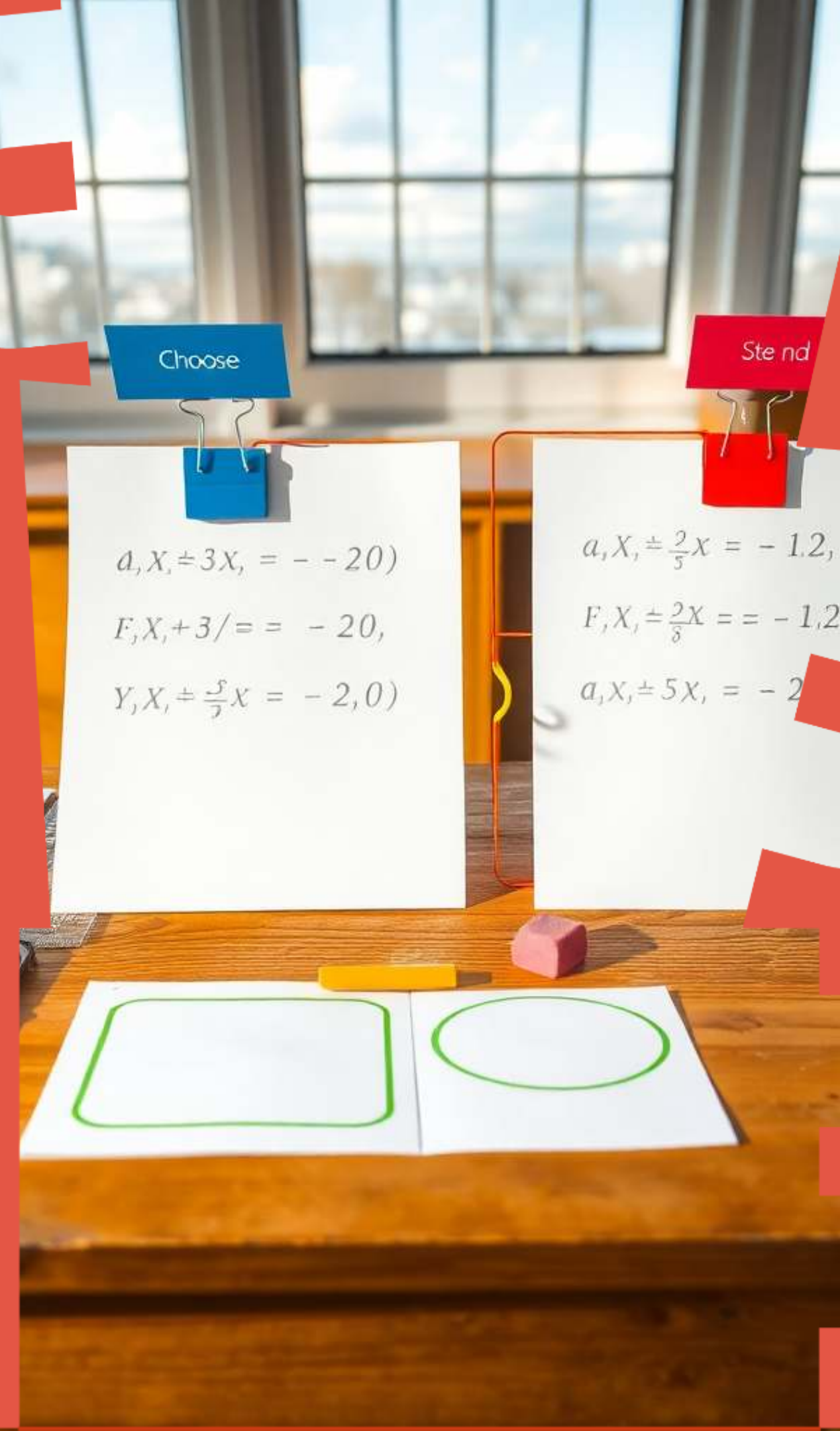
Проверить в обоих

Подставляют обе переменные сразу в два уравнения. Если каждое равенство верно, решение системы найдено правильно и его можно записывать в ответ.

5

Записать ответ

Ответ оформляют в виде пары чисел: сначала x , затем y . Такой порядок помогает не перепутать значения и делает запись одинаковой для любых задач.



Типичные ошибки при решении систем

Небольшие ошибки в записи или вычислениях часто меняют весь ответ. Таблица показывает самые частые промахи и напоминает, где особенно нужна внимательность.

Большинство ошибок связано не со сложностью метода, а с невнимательностью. Проверка по двум уравнениям помогает заметить неточность до записи ответа.

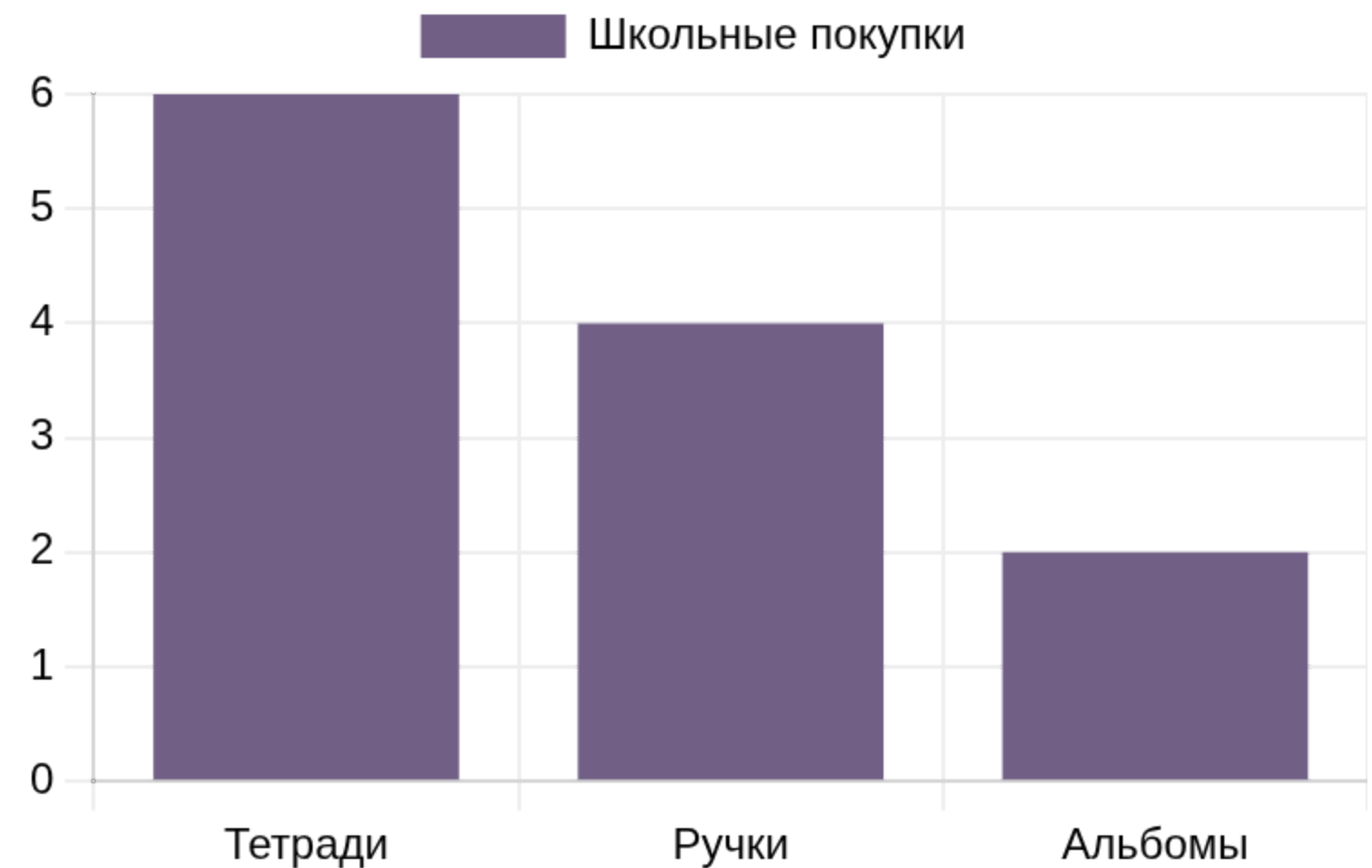
Учебный разбор типичных ошибок при решении систем уравнений

Ошибка	Чем опасна
Путаница x и y	Меняется ответ
Неверный знак	Сбивается вычисление
Проверен один пример	Ответ неполный
Нет проверки	Ошибка незаметна

Реальная задача про школьные покупки

Такая диаграмма помогает увидеть, какие предметы купили чаще, а какие реже. В задаче переменные могут обозначать количество товаров и общую стоимость покупки.

Система уравнений связывает количество и цену, поэтому позволяет восстановить состав покупки и проверить, совпадает ли найденная сумма с условием.



Учебный пример задачи о школьных покупках, без использования внешних данных

Как распознать верный ответ

1

Подстановка в уравнения

Правильная пара чисел должна делать верными все уравнения системы. Если после подстановки хотя бы одно равенство не выполняется, ответ нужно пересмотреть.

2

Порядок записи

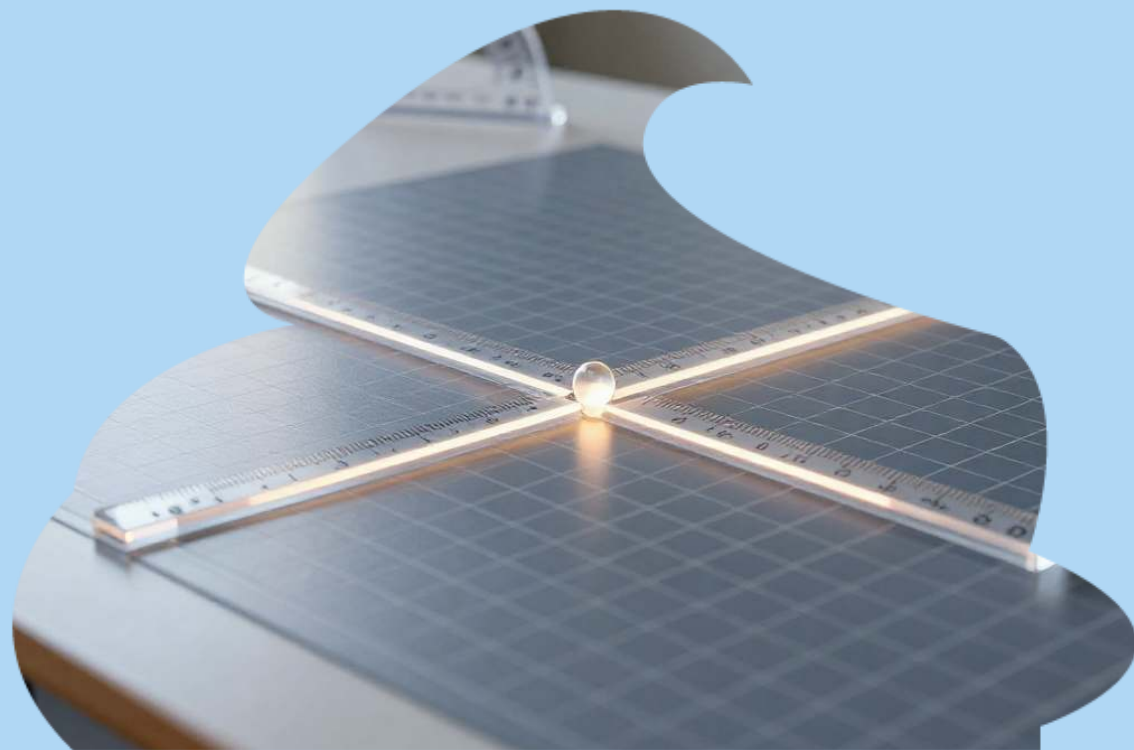
Ответ записывают в виде пары чисел: сначала значение x , затем значение y . Такой порядок важен, чтобы не возникло путаницы при проверке и оформлении.

3

Точный вывод

Если оба уравнения выполняются, найденная пара является решением системы. Если нет, значит, допущена ошибка в вычислениях, и нужно вернуться к предыдущим шагам.

Где тема используется дальше



Геометрия на координатной плоскости

В геометрии системы уравнений помогают находить точки пересечения, длины отрезков и координаты фигур. Координатная плоскость становится удобным способом увидеть, как связаны два условия одновременно. Это особенно полезно при построении чертежей и решении задач на движение.



Физика и движение

В физике две переменные часто связывают расстояние и время, скорость и путь, массу и объём. Такие зависимости удобно записывать уравнениями, а затем проверять, при каких значениях условия задачи выполняются вместе. Так математика помогает описывать реальные процессы.



Экономика и покупки

Уравнения с двумя переменными: итог урока

Одно уравнение задаёт много пар решений, а система ищет только общую пару. Графики показывают, сколько ответов возможно, а подстановка и сложение помогают найти точное решение и проверить его.