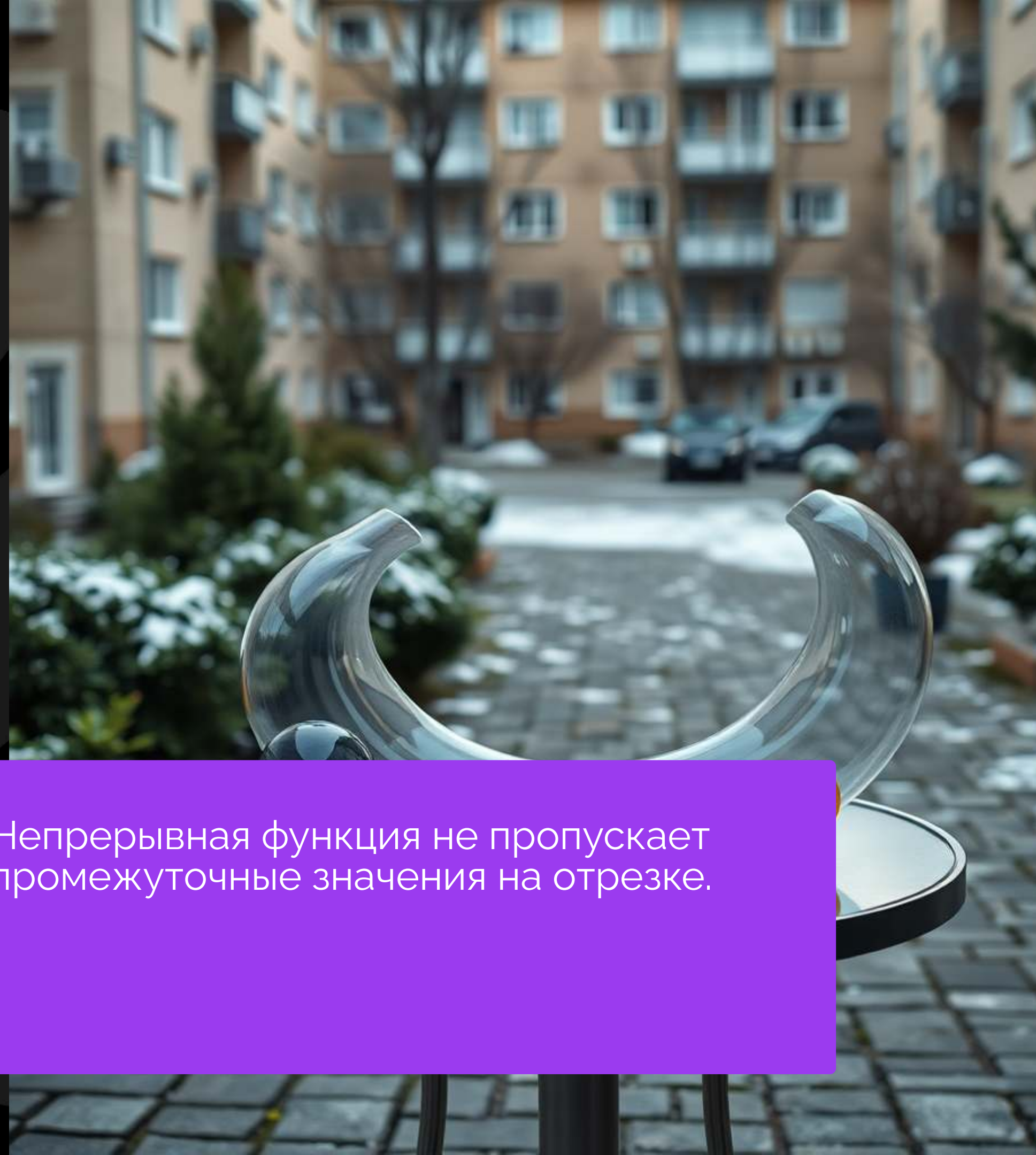


Теоремы о промежуточных значениях функций

Непрерывная функция не пропускает промежуточные значения на отрезке.



Зачем изучать эти теоремы в 10 классе



Эти теоремы помогают строго доказывать существование корня, даже когда его нельзя сразу вычислить. Они связывают график, непрерывность и значения функции, а также лежат в основе многих методов анализа уравнений.



Непрерывность функции на отрезке

01 Внутренние точки

Функция считается непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке его внутренней части. Это означает, что при малом изменении аргумента значение функции меняется плавно и предсказуемо.

02 Края отрезка

В точках a и b непрерывность проверяют по односторонним пределам. Для школьного уровня важно, чтобы график подходил к концам отрезка без разрыва, скачка или выколотой точки.

03 Графическое понимание

На рисунке непрерывная функция выглядит как единая линия без разрывов. Такой график можно проследить взглядом от начала до конца отрезка, не встречая пропусков или резких перепадов.

04 Почему это важно

Именно непрерывность делает возможным вывод о промежуточных значениях. Без неё функция может «перепрыгнуть» через нужный уровень, и теоремы уже не будут работать.



Геометрический смысл непрерывности

Линия без отрыва

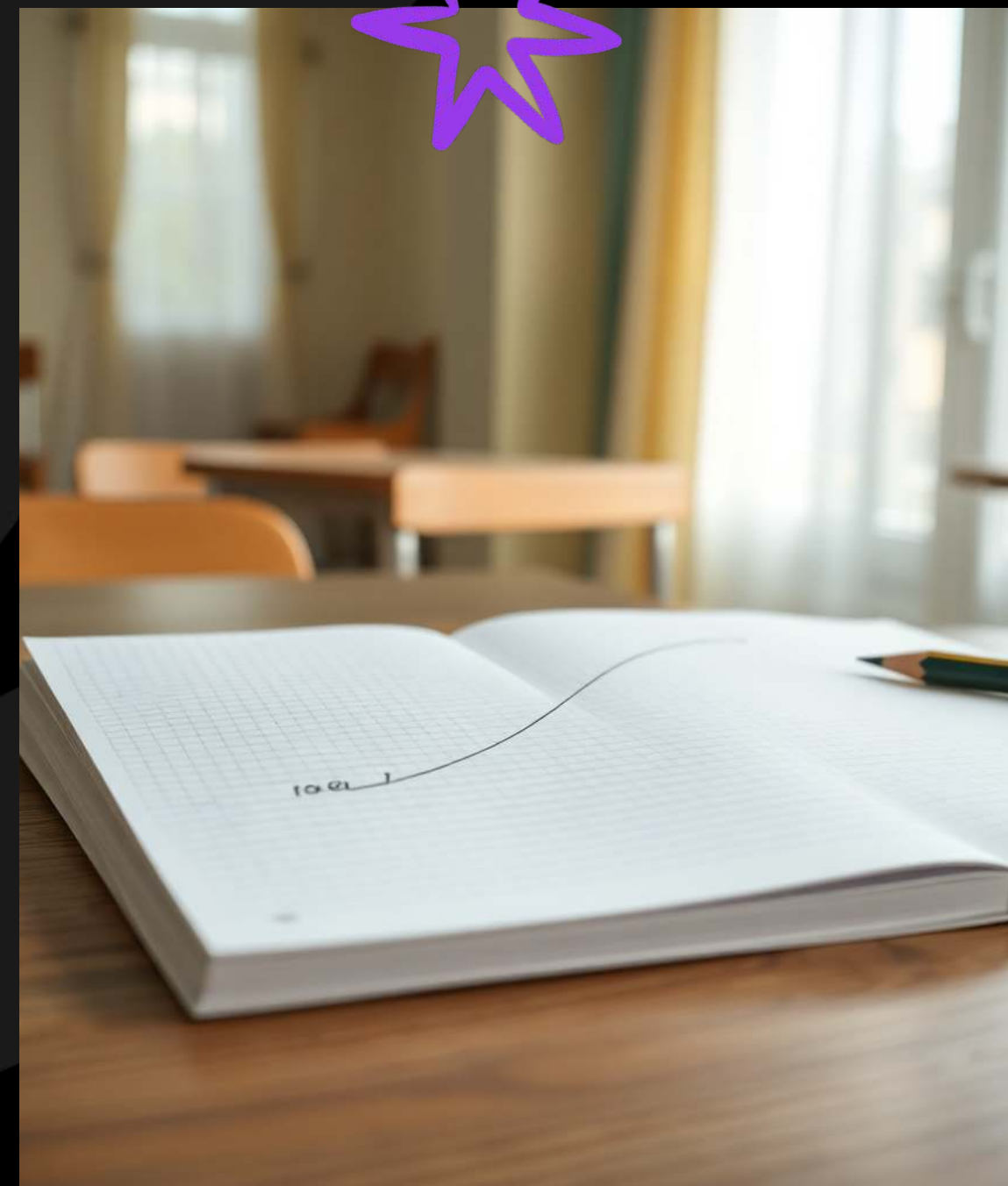
График непрерывной функции на отрезке можно провести без отрыва карандаша. Это наглядно показывает, что между соседними точками графика нет разрывов и пустых промежутков.

Плавное изменение

Значения функции меняются постепенно, а не скачком. Поэтому кривая соединяет точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ одной непрерывной линией, сохраняя целостность изображения.

Наглядность для задач

Такой образ особенно полезен при работе с уравнениями и графиками. Он помогает понять, почему непрерывная функция может пройти через любой промежуточный уровень между крайними значениями.



Основные теоремы и их формулировки



Сравнение двух ключевых утверждений о непрерывных функциях на отрезке.

Теорема	Условие	Вывод
Больцано	$f(a) \cdot f(b) < 0$	Есть корень
Коши	k между $f(a)$ и $f(b)$	Есть c : $f(c) = k$

Обе теоремы показывают, что непрерывная функция не пропускает промежуточные уровни и может иметь корень внутри отрезка.

Формулировки теорем о промежуточных значениях для непрерывной функции на отрезке

Теорема Больцано о существовании корня

Смена знака

Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, значит, между ними расположен ноль. Это и есть главное условие теоремы Больцано.

Гарантия существования

Теорема утверждает, что внутри отрезка найдётся хотя бы одна точка c , где $f(c)=0$. Она не указывает точное место корня, но надёжно доказывает его наличие.

Практический смысл

В школьных задачах это особенно полезно, когда уравнение сложно решить точно. Достаточно проверить знак функции на концах отрезка, чтобы обосновать существование решения.

Логика доказательства существования корня

Схема показывает, как сужается отрезок при сохранении смены знака.

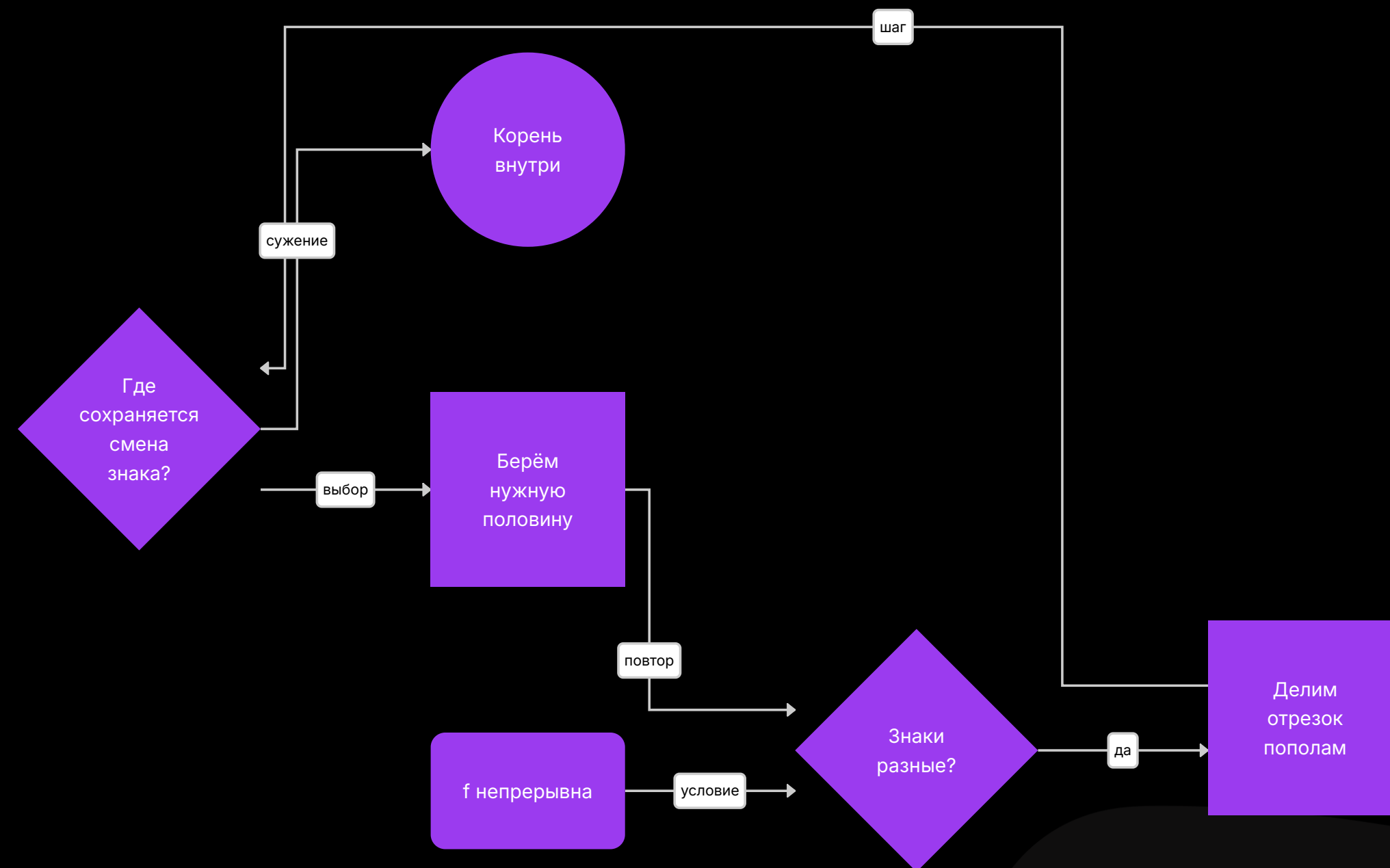
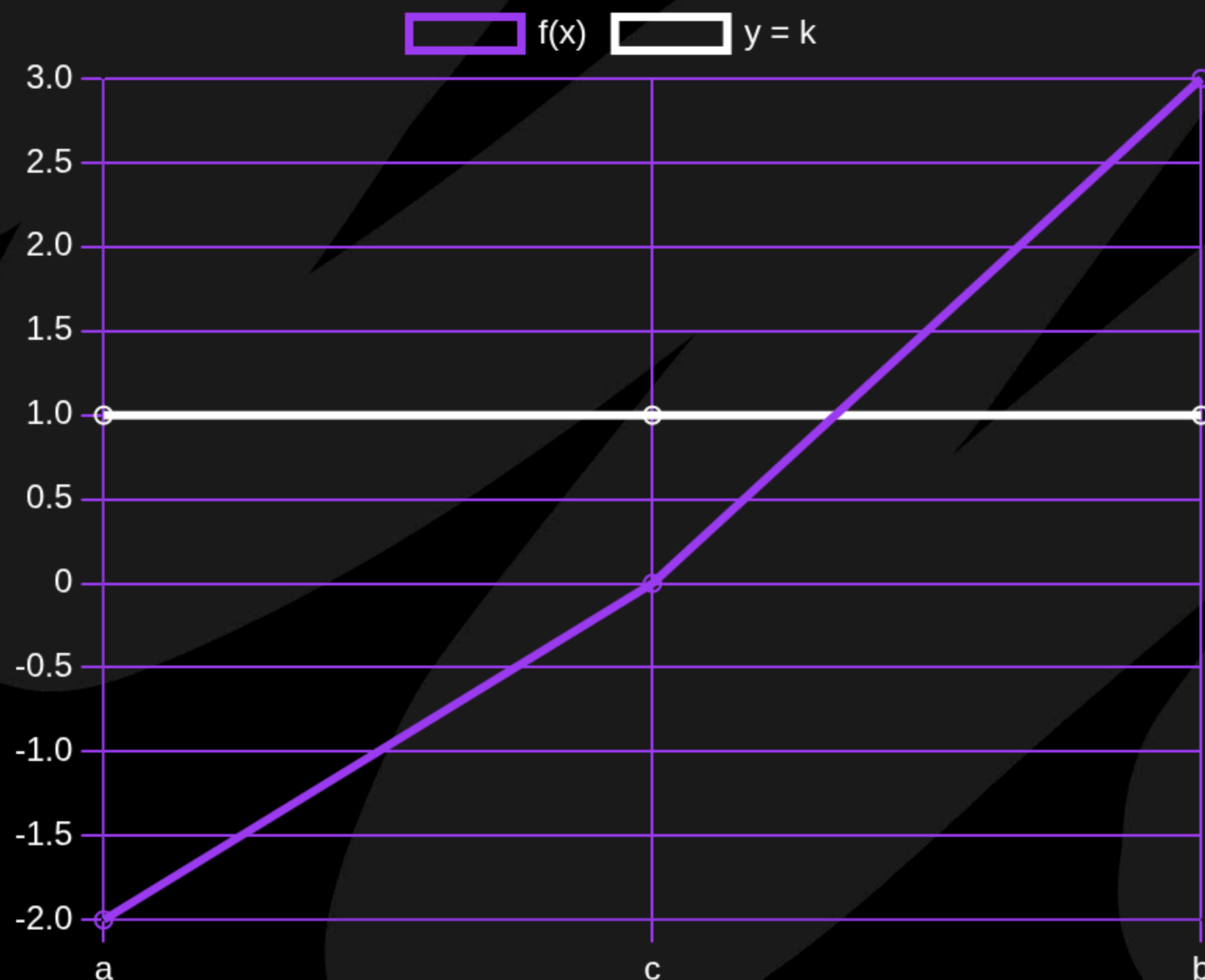


Иллюстрация промежуточных значений на графике



Горизонтальный уровень k выбран между значениями функции на концах отрезка. Точка c показывает место, где непрерывная кривая достигает этого уровня.

Если график непрерывен, он обязательно пересекает любой промежуточный горизонтальный уровень между крайними значениями.

Схематическая иллюстрация по теореме Коши о промежуточных значениях

Теорема Коши о промежуточных значениях

Общее утверждение

01

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает не только крайние значения, но и любое число между ними. Это делает теорему Коши более общей, чем утверждение о корне.

Что означает k

02

Число k выбирают между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда обязательно найдётся точка c на отрезке, в которой значение функции совпадёт с выбранным уровнем: $f(c)=k$.

Связь с Больцано

03

Теорема Больцано получается как частный случай, когда $k=0$. Поэтому существование корня — это лишь один из вариантов более широкого свойства непрерывной функции.

Главный смысл

04

Непрерывная функция достигает всех промежуточных уровней без пропусков. Именно поэтому её график нельзя представить как набор разрозненных точек или отдельных скачков.

Как непрерывность связана с промежуточными значениями



01 Одна кривая — все уровни

Если график непрерывен на отрезке, он проходит через каждый горизонтальный уровень между $f(a)$ и $f(b)$. На рисунке это удобно показать несколькими прямыми $y = k$, которые пересекают одну и ту же плавную кривую. Такой образ делает свойство особенно наглядным.



02 Отрезок значений

Непрерывная функция не оставляет «пустот» в множестве своих значений. Поэтому образ отрезка снова является отрезком, а не набором разрозненных чисел. Из этого следует, что все промежуточные значения действительно достигаются.



03 Почему это убеждает

График помогает увидеть не только факт, но и его причину: если линия не прерывается, она не может миновать промежуточный уровень. Именно поэтому теоремы о промежуточных значениях так полезны при анализе функций и уравнений.

Когда теорема работает, а когда нет

Функция	Непрерывность	Вывод
$x^2 - 2$ на $[1; 2]$	Да	Теорема применима
$1/x$ на $[-1; 1]$	Нет	Теорема неприменима
Ступенчатая функция	Нет	Условия нарушены

Сравнение примеров показывает, что решающим условием применения теорем промежуточных значений является непрерывность функции на всём отрезке.

Примеры на основе определений непрерывности и теорем Больцано и Коши

Если на отрезке есть разрыв или скачок, промежуточные значения не гарантируются; при непрерывности вывод о существовании решения становится строгим.

Основные области применения



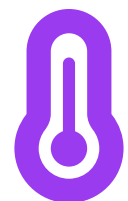
Корни уравнений

Теоремы позволяют доказать существование корня, даже когда его нельзя быстро найти точно. Это особенно полезно в задачах, где важнее подтвердить наличие решения, чем сразу вычислить его.



Анализ графиков

По графику непрерывной функции можно сделать вывод о прохождении через заданный уровень, не строя детальное исследование. Такой подход помогает сравнивать поведение функции на разных отрезках.



Естественные процессы

В физике теоремы обосновывают достижимость определённой температуры, скорости или давления. Если величина меняется непрерывно, она не может миновать нужный уровень без его принятия.



Школьные задачи

В алгебре эти теоремы служат строгим инструментом проверки решения. Они связывают вычисления на концах отрезка с выводом о существовании нужного значения внутри него.

Метод бисекции как следствие теоремы Больцано

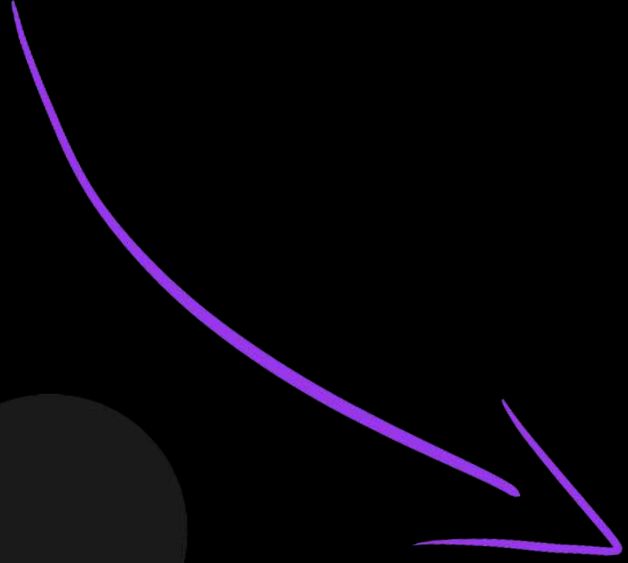


На каждом шаге выбирается половина отрезка, на концах которой сохраняется смена знака. Это делает поиск корня устойчивым и удобным для приближённых вычислений.

Сужение отрезка вдвое сохраняет гарантию существования корня и постепенно повышает точность ответа без сложных аналитических преобразований.

Схема метода бисекции, следствие теоремы Больцано

Теорема Больцано сначала подтверждает, что решение существует внутри отрезка, а затем численные методы уточняют его значение.


$$\sqrt{2}$$

— это корень уравнения $x^2 - 2 = 0$ на отрезке $[1; 2]$.

Функция $f(x)=x^2-2$; вычисления $f(1)=-1$ и $f(2)=2$

Функция $\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$

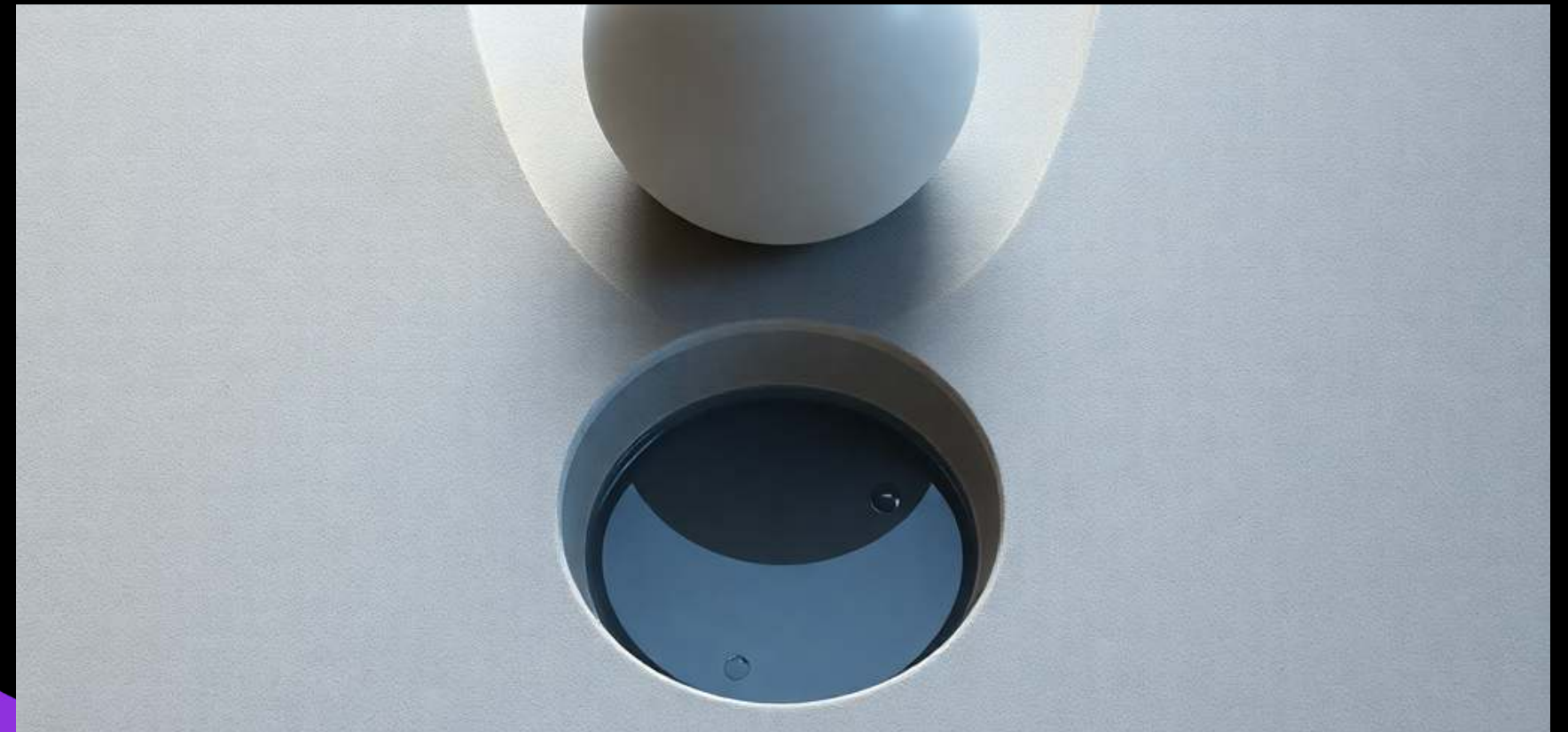
От нуля к вершине

На левом конце отрезка график начинается в точке с нулевым значением, затем плавно поднимается к максимуму. Непрерывность обеспечивает постепенное изменение высоты без скачков, поэтому каждый промежуточный уровень между 0 и 1 действительно достигается.



Возвращение к нулю

После вершины график симметрично опускается обратно к нулю на правом конце отрезка. Из-за этого одно и то же промежуточное значение, например 0,5, встречается дважды: при подъёме и при спуске.



Свойства непрерывной функции на отрезке

Свойство	Формулировка	Следствие
Промежуточные значения	Все уровни достигаются	Нет пропусков
Смена знака	Есть корень	$f(c)=0$
Наибольш./наименьш.	Экстремумы существуют	Значения ограничены



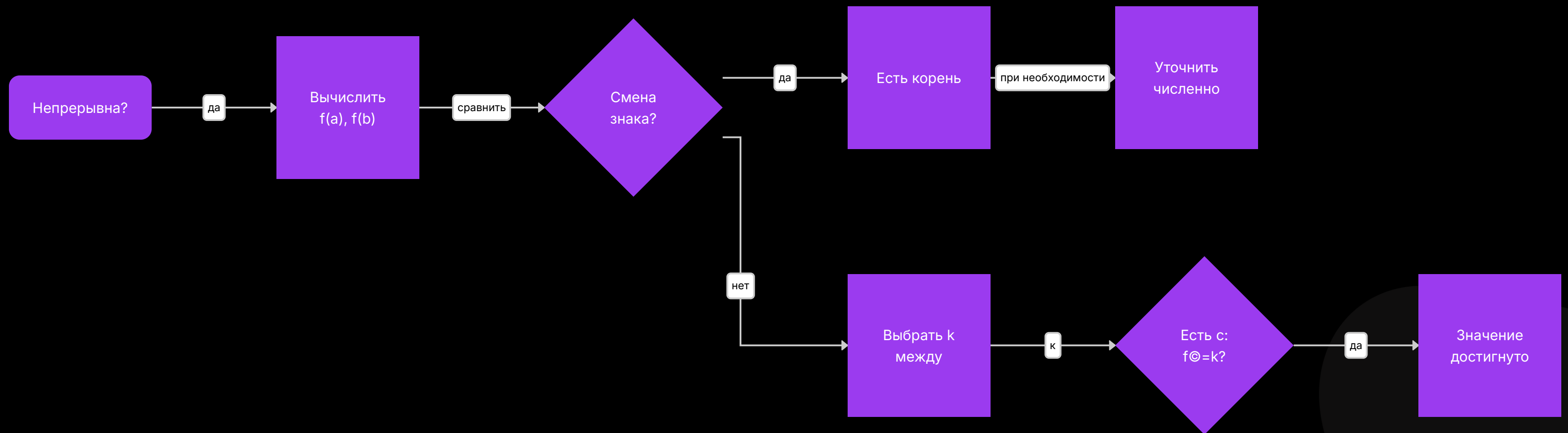
Таблица объединяет три ключевых свойства непрерывной функции и показывает, какие выводы можно делать о значениях на всём отрезке.

Непрерывность одновременно гарантирует «полноту» значений, существование корней и наличие экстремумов, связывая локальные и глобальные свойства функции.

Свойства непрерывных функций на отрезке
из курса математического анализа

Алгоритм проверки существования решения

Последовательность основана на теореме Больцано и её обобщении — теореме Коши.



Типичные ошибки при применении теорем



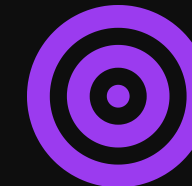
Разрыв на отрезке

Нельзя применять теорему к функции с вертикальной асимптотой, скачком или выколотой точкой. Даже один разрыв разрушает основное условие и делает вывод о промежуточных значениях неверным.



Пропущенная проверка концов

Перед применением нужно обязательно вычислить значения функции на концах отрезка. Без этого невозможно установить смену знака или выбрать промежуточный уровень для теоремы Коши.



Лишняя уверенность

Теорема гарантирует существование хотя бы одного решения, но не его единственность. На отрезке может быть несколько корней, поэтому нельзя делать более сильный вывод без дополнительного анализа.



Неполная область определения

Если функция не определена на всём отрезке, теорема неприменима. Важно сначала убедиться, что каждый пункт отрезка входит в область определения и не нарушает непрерывность.

Роль теорем в математике и прикладных задачах

01 Фундамент анализа

Теоремы о промежуточных значениях входят в базовый аппарат математического анализа. Они формируют строгий язык для описания того, как непрерывная функция ведёт себя на отрезке.

02 Численные методы

Приближённый поиск корней часто начинается с проверки смены знака и затем переходит к последовательному уточнению. Без теоремы Больцано такой алгоритм не имел бы надёжного обоснования.

03 Прикладные расчёты

В инженерных и компьютерных моделях важно знать, что нужный уровень показателя достижим. Теоремы помогают обосновывать такие выводы для температуры, давления, скорости и других величин.

04 Школьный смысл

В курсе алгебры эти результаты соединяют вычисления, графики и первые идеи анализа. Они показывают, как из строгих условий вытекает практический вывод о существовании решения.



Непрерывность делает выводы надёжными

Если функция непрерывна на отрезке, она проходит через все промежуточные значения без скачков. Именно поэтому теоремы Больцано и Коши дают уверенный критерий существования решения и помогают исследовать функции.