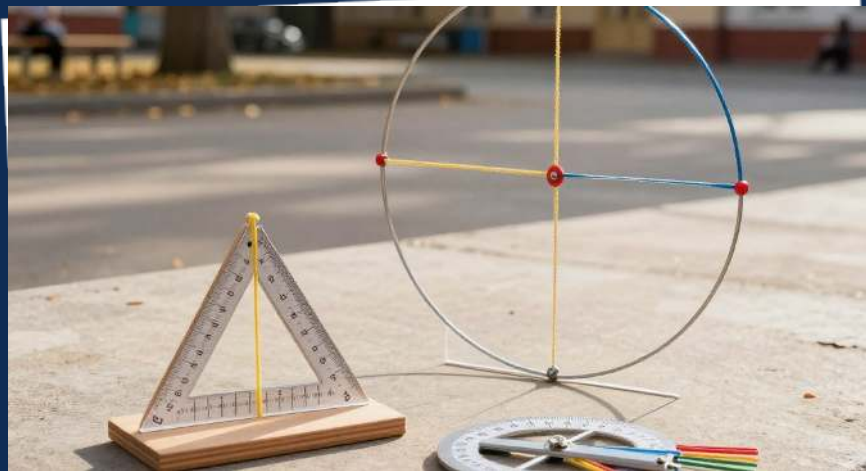


Определение синуса и косинуса: как связаны треугольник и окружность

Две формы записи одного угла: через
стороны и координаты.



Зачем нужны синус и косинус в 9 классе



Эти понятия помогают находить стороны, углы, высоты и расстояния. Сначала их изучают в прямоугольном треугольнике, а затем расширяют через единичную окружность на любые углы.

Прямоугольный треугольник как основа определения

3



Прямой угол

В таком треугольнике один угол равен 90° , а два других обязательно острые. Именно для этих острых углов вводят синус и косинус как отношения сторон.

01

Гипотенуза

Сторона, лежащая напротив прямого угла, называется гипотенузой. Она всегда самая длинная в прямоугольном треугольнике и входит в оба определения тригонометрических функций.

02

Катеты

Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами. В зависимости от выбранного острого угла один катет будет противолежащим, а другой — прилежащим.

03

Основа формул

Именно эти три стороны позволяют выразить синус и косинус через простые отношения длин. Поэтому чертёж треугольника становится удобным способом измерять угол.

04

Как выбирают стороны относительно угла

➤ Противлежащий катет

Это катет, который находится напротив выбранного острого угла. Он не образует этот угол, а расположен на другой стороне треугольника.

➤ Прилежащий катет

Это катет, который вместе с гипотенузой образует выбранный угол. Он лежит рядом с углом и помогает составить отношение для косинуса.

➤ Названия зависят от угла

В одном и том же треугольнике при выборе другого острого угла названия катетов меняются. Поэтому сначала всегда отмечают именно нужный угол.

➤ Что важно на схеме

На рисунке полезно подписать угол, гипотенузу и оба катета. Это помогает не перепутать стороны и правильно записать формулы без лишних ошибок.



Определения синуса и косинуса в прямоугольном треугольнике

5

Таблица показывает, как через стороны треугольника записываются основные тригонометрические отношения.

Синус и косинус — это безразмерные отношения длин; для острого угла они лежат между 0 и 1.

Функция	Формула	Смысл
$\sin \alpha$	противолежащий / гипотенуза	отношение сторон
$\cos \alpha$	прилежащий / гипотенуза	отношение сторон

Определения из курса геометрии 9 класса

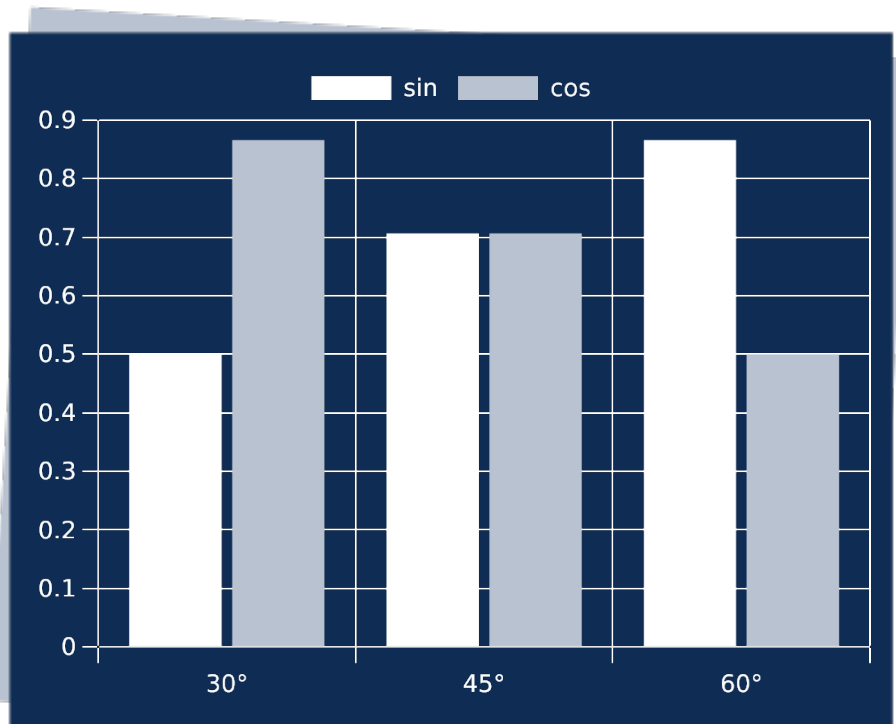
*

1/2

— это одно и то же значение для угла 30°
в любом подобном треугольнике.

У подобных треугольников стороны растут или уменьшаются пропорционально, поэтому отношение соответствующих сторон не меняется. Значение функции зависит от угла, а не от размера чертежа.

Опорные значения для углов 30° , 45° и 60°



Эти значения удобно запомнить как базу для решения многих задач и быстрой проверки ответов.

При переходе от 30° к 60° значения синуса и косинуса меняются местами, а при 45° становятся равными.

Точные значения для стандартных углов из школьного курса геометрии

*

Единичная окружность как второй способ определения

Что это такое

Единичная окружность имеет радиус 1 и центр в начале координат. Она служит удобной моделью для изучения углов на плоскости.

Координаты точки

Точка, соответствующая углу α , имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Так одна запись сразу показывает и горизонтальное, и вертикальное положение точки.

Что показывают оси

Горизонтальная координата отражает косинус, а вертикальная — синус. Поэтому по положению точки на окружности легко определить значения обеих функций.

Преимущество способа

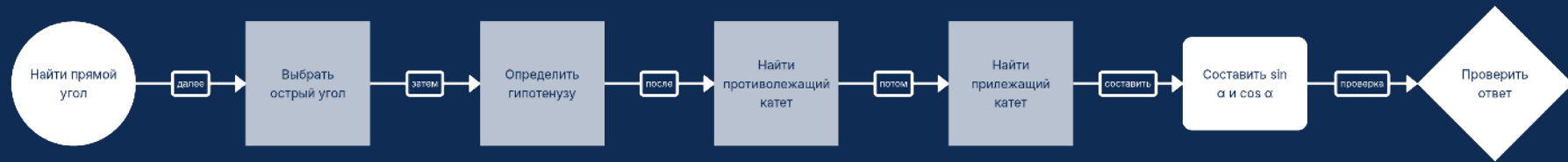
Этот подход работает не только для острых углов, но и для 0° , 90° , 180° , 270° и других значений, где треугольник уже не помогает.



Как находят синус и косинус по чертежу

9

Последовательность действий при работе с прямоугольным треугольником



Главные значения синуса и косинуса для углов 0° , 90° и 180°

01

Угол 0°

Для нулевого угла точка на единичной окружности находится справа от центра. Поэтому синус равен 0, а косинус равен 1: это начало отсчёта на окружности.

02

Угол 90°

При повороте на прямой угол точка оказывается в верхней части окружности. Тогда синус становится равным 1, а косинус — 0, что удобно помнить как вертикальную вершину.

03

Угол 180°

После половины оборота точка переходит в левую крайнюю точку окружности. Здесь синус снова равен 0, а косинус принимает значение -1 .



Как связаны синус и косинус одного угла

» Взаимное дополнение

Для одного острого угла синус и косинус связаны как две части одного описания: когда один увеличивается, другой уменьшается. Поэтому по одному значению можно судить о втором.

» Рост и спад

Если острый угол становится больше, противолежащий катет «выигрывает» в сравнении с гипотенузой, поэтому синус растёт. При этом прилежащий катет относительно гипотенузы уменьшается, и косинус убывает.

» Равенство при 45°

В равнобедренном прямоугольном треугольнике катеты равны, и угол между ними составляет 45° . Из-за этого $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$ совпадают и равны $\sqrt{2}/2$.

» Одна идея, два числа

Синус и косинус не противоречат друг другу: они вместе показывают, как расположен угол в треугольнике. Их удобно рассматривать как взаимосвязанные характеристики одной геометрической ситуации.

Два определения одной и той же идеи

Признак	Треугольник	Окружность
Что это	отношения сторон	координаты точки
Для каких углов	острые	любые

Сравнение показывает, что синус и косинус можно задавать двумя способами: через стороны прямоугольного треугольника и через координаты точки на единичной окружности.

Оба определения описывают одни и те же значения. Первый способ удобен для чертежей, второй расширяет тему на все углы.

Школьный курс геометрии: определение синуса и косинуса
* в прямоугольном треугольнике и на единичной окружности

Пример вычисления синуса и косинуса по сторонам

Выбираем стороны

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, противолежащий катет — 6 см, а прилежащий — 8 см. Сначала определяем, какая сторона относится к выбранному углу.

01

Считаем значения

По формулам получаем $\sin \alpha = 6/10 = 0,6$ и $\cos \alpha = 8/10 = 0,8$. Оба числа безразмерны, потому что это отношения длин, а не сами длины.

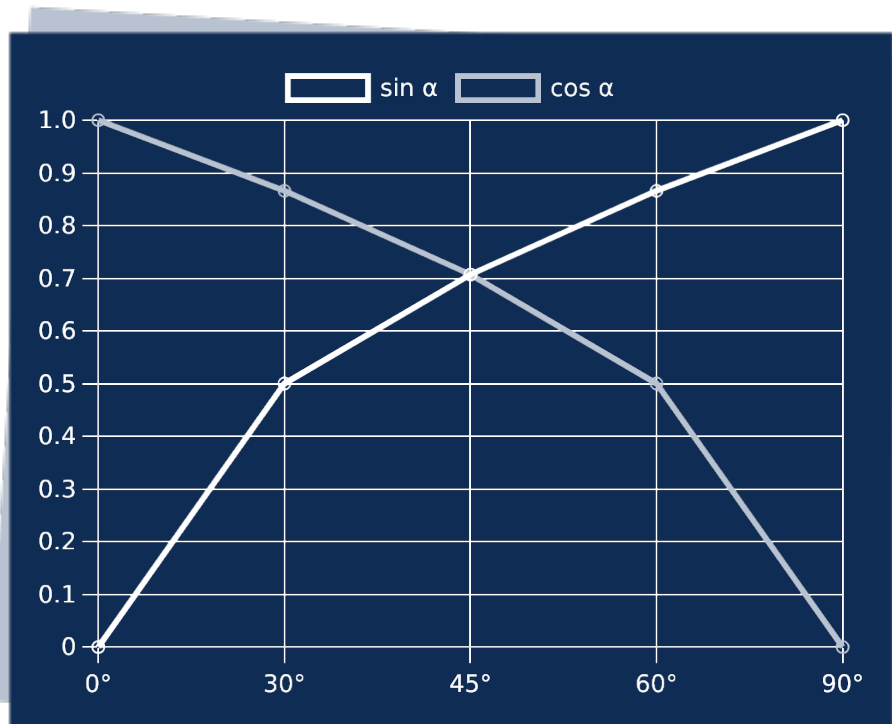
02

Проверяем ответ

Значения согласуются с правилом $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$: $0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$. Такой пример помогает быстро заметить ошибку в вычислениях.

03

Как меняются $\sin$ и $\cos$ при увеличении угла от 0° до 90°



На графике удобно сравнивать оба значения в одних и тех же точках. Это помогает увидеть, что функции изменяются согласованно, но в противоположных направлениях.

Чем больше острый угол, тем выше $\sin \alpha$ и ниже $\cos \alpha$. Пересечение в 45° показывает их равенство для равнобедренного прямоугольного треугольника.

Опорные значения тригонометрических функций для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°

*

Знаки синуса и косинуса в четырёх четвертях



I четверть

В первой четверти обе функции положительны. Точка на единичной окружности находится справа и выше оси x , поэтому $\sin$ и $\cos$ имеют знак плюс.



II четверть

Во второй четверти синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным. Точка расположена слева от оси y , но выше оси x , поэтому меняется только знак горизонтальной координаты.



III четверть

В третьей четверти обе координаты отрицательны. Точка находится ниже оси x и левее оси y , поэтому $\sin$ и $\cos$ имеют знак минус.



IV четверть

В четвёртой четверти синус отрицателен, а косинус положителен. Это удобно помнить по положению точки: она справа от оси y , но ниже оси x .

Типичные ошибки при работе с синусом и косинусом

16

Чаще всего ошибки возникают из-за невнимательного чтения чертежа и путаницы между сторонами треугольника. Таблица помогает быстро увидеть причину неверного ответа.

Чтобы не ошибиться, сначала определяют угол и стороны, затем записывают отношение и только после этого проверяют знак и значение.

Ошибка	Причина	Как избежать
Катеты перепутаны	не выбран угол	сначала отметить угол
Взята не та сторона	ошибка в гипотенузе	найти прямой угол
30° и 60° смешаны	похожий чертёж	сверить опорные значения
Не учтён знак	забыта четверть	проверить положение точки

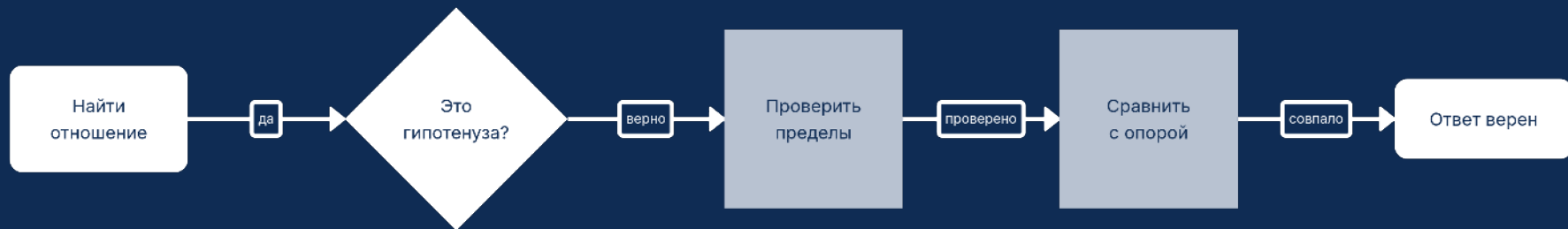
Типовые ошибки при изучении синуса и косинуса в школьном курсе геометрии

*

Проверка правильности найденного значения

17

Последовательность действий при самопроверке ответа в задачах на синус и косинус



Примеры применения в жизни и других предметах

18

Высота по углу взгляда

Когда нужно узнать высоту дерева или башни, измеряют расстояние до объекта и угол подъёма. Затем используют синус или косинус, чтобы перейти от чертежа к числу. Такой способ особенно полезен там, где невозможно добраться до вершины напрямую.



Наклон крыши и дороги

В строительстве синус и косинус помогают описывать наклоны крыши, пандуса или лестницы. Эти функции позволяют сравнить длину ската с горизонтальной основой и заранее понять, насколько удобной и безопасной будет конструкция.



Движение по окружности

В физике и информатике синус и косинус описывают положение точки, которая движется по окружности. Координаты меняются плавно, поэтому с их помощью удобно строить модели вращения, колебаний и повторяющихся процессов.



Что нужно запомнить по теме

- Синус = противолежащий / гипотенуза
- Косинус = прилежащий / гипотенуза
- На окружности: y и x



Эти три идеи нужно уметь быстро вспоминать и применять в задачах. Они связывают чертёж, формулу и координаты в одну понятную схему.

Если помнить эти основы, легче находить значения функций, проверять ответы и переходить от треугольника к единичной окружности.

Обобщение ключевых определений темы «Синус и косинус»

*

Итог: две формы записи одного математического отношения

Синус и косинус описывают угол двумя способами: через стороны прямоугольного треугольника и через координаты точки на единичной окружности. Эти записи согласованы и полезны в разных задачах.

