

Объёмы прямой призмы и цилиндра

Учим находить объём прямой призмы и цилиндра через площадь основания и высоту, в кубических единицах.

Почему эта тема важна в курсе геометрии

Прямая призма и цилиндр встречаются и в задачах, и в жизни: коробки, баки, трубы, банки, колонны, резервуары. В 10 классе это часть стереометрии: опираемся на площади плоских фигур и аккуратно работаем с формулами.



Прямая призма: определение и основные элементы

- Прямая призма — многогранник с двумя равными основаниями, лежащими в параллельных плоскостях. Основания — многоугольники, а соответствующие им вершины соединены отрезками.

- Боковые рёбра прямой призмы перпендикулярны основаниям, поэтому высота совпадает с длиной бокового ребра. Для обозначений используют $S_{осн}$, h и V .

- Форма основания бывает разной: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и другие многоугольники. При этом высота задаёт «протяжённость» призмы в третьем измерении.

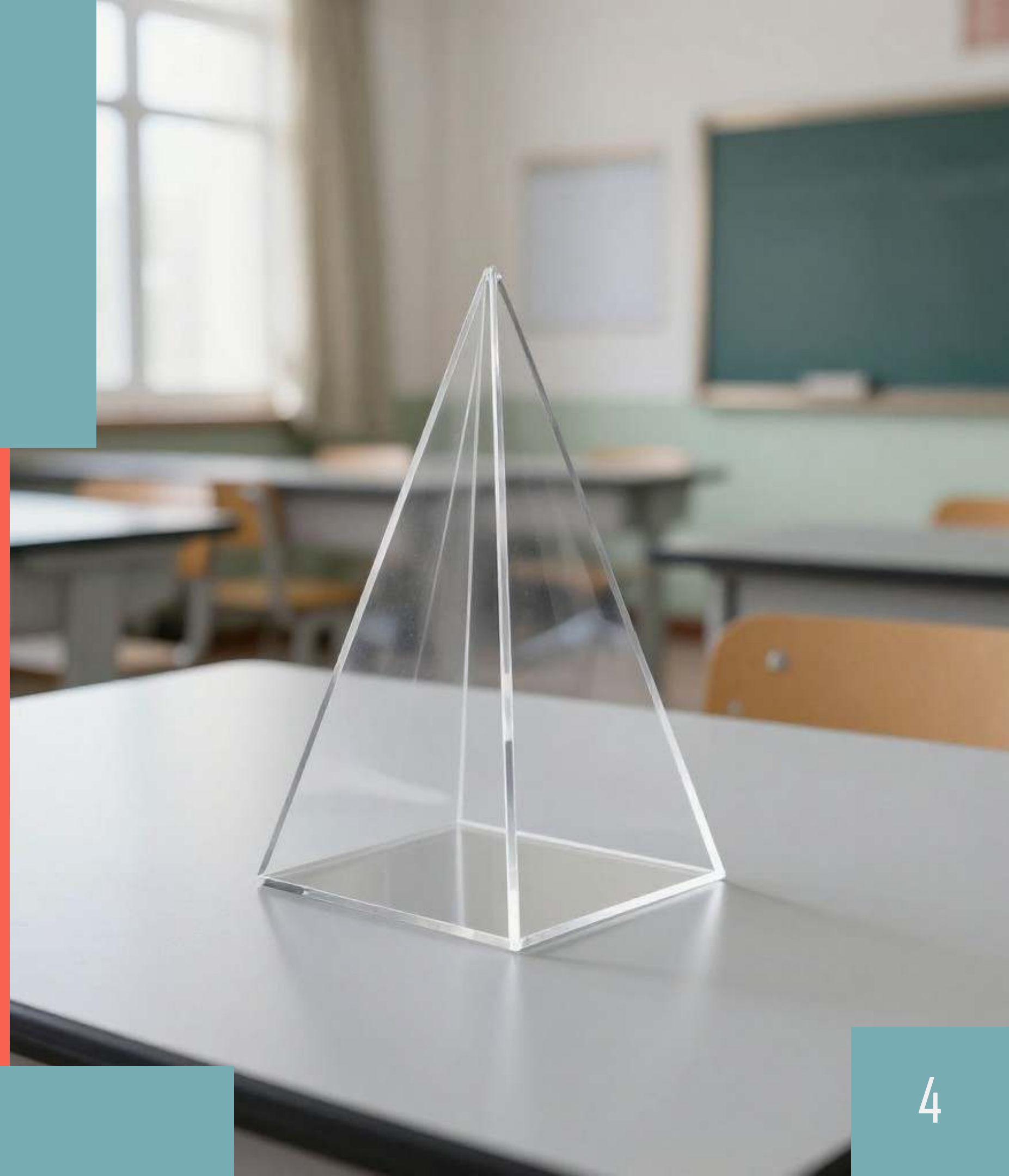
Как выглядит прямая призма на чертеже

Что обязательно видно на схеме

На чертеже отмечают два равных многоугольника-основания, соединённые параллельными боковыми рёбрами. У основания подписывают $S_{осн}$, а высоту обозначают h , показывая прямые углы к плоскости основания.

Чем прямая призма отличается от наклонной

Важно различать тип призмы: у прямой призмы боковые рёбра перпендикулярны основаниям. При наклонной призме между рёбрами и плоскостью основания прямой угол уже не сохраняется.



2

Если высоту увеличить вдвое, объём тоже увеличится вдвое при неизменной площади основания.

Запись $V = S_{\text{осн}} \times h$ позволяет вычислять объём для любой прямой призмы при известной площади основания и высоте.

Свойство формулы $V = S_{\text{осн}} \times h$ (школьный курс геометрии).

Примеры вычисления объёма прямой призмы

Сравните случаи: объём меняется пропорционально и площади основания, и высоте.

Объём прямо пропорционален высоте при фиксированном основании и прямо пропорционален площади при фиксированной высоте.

Данные приведены в задании для демонстрации применения формулы $V = S_{\text{осн}} \times h$.

№	$S_{\text{осн}}, \text{см}^2$	$h, \text{см}$	$V, \text{см}^3$
1	12	5	60
2	24	8	192
3	35	3	105
4	18	10	180

Как находят площадь основания призмы

Чтобы получить $S_{осн}$, нужно сначала определить вид многоугольника в основании. Для прямоугольника удобно использовать $S = ab$, где a и b — стороны.

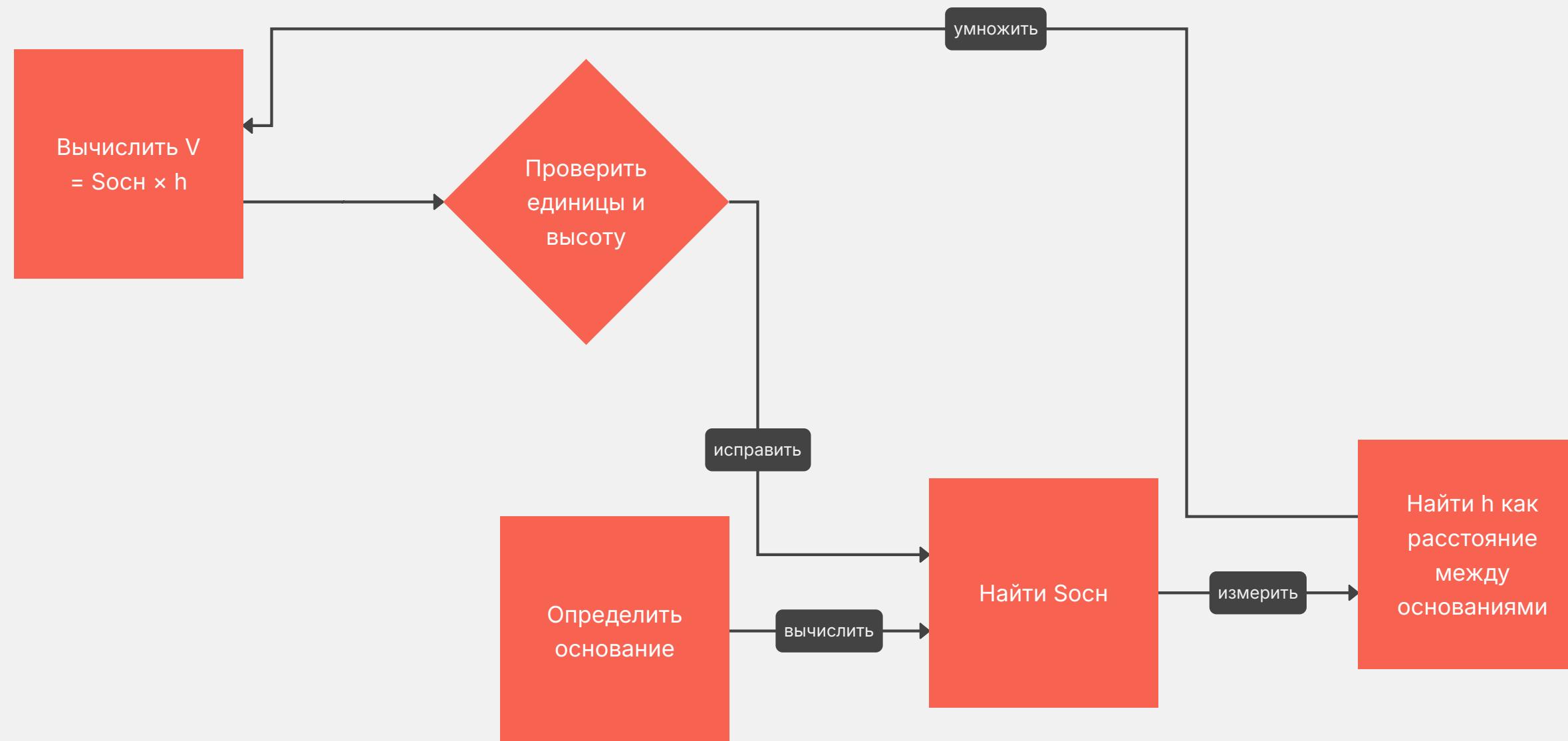
Если основание — треугольник, применяется формула $S = 1/2ah$, где a — основание треугольника, h — соответствующая высота. Так площадь выражается через две величины на плоскости.

Для параллелограмма работает $S = ah$: выбирают сторону a и высоту h к этой стороне. Это особенно полезно в задачах, где высота задана отдельно.

Когда основание составное, его площадь находят разбиением на простые фигуры, суммируя их площади. Затем результат подставляют в общий принцип $V = S_{осн} \times h$.

Алгоритм нахождения объёма прямой призмы

Последовательность действий и проверки типична для школьных задач.

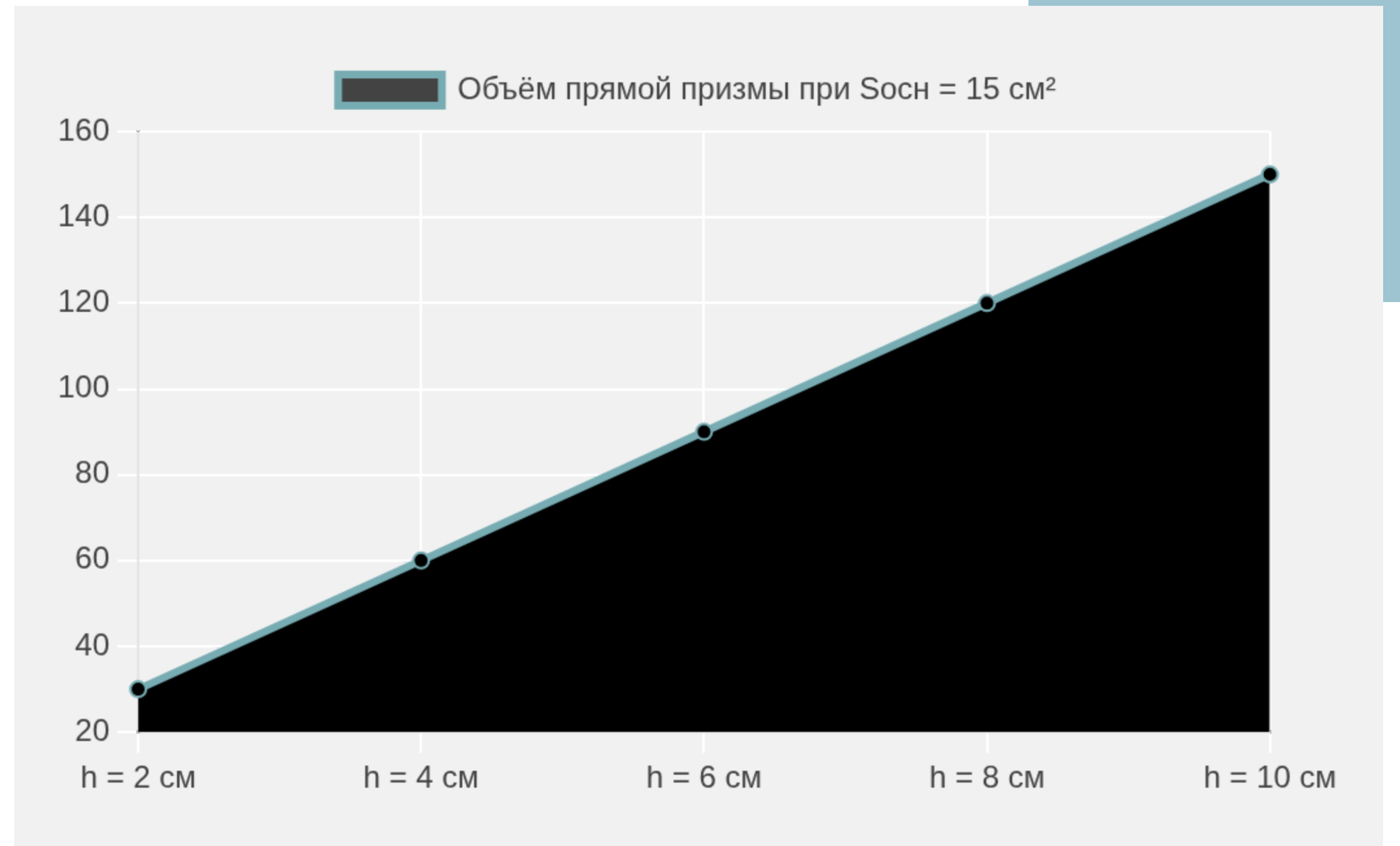


Зависимость объёма призмы от высоты

При фиксированном основании 15 см^2 формула $V = 15h$ превращается в прямую зависимость без сложных вычислений.

График подтверждает прямую пропорциональность: каждое увеличение h на одинаковую величину даёт равное приращение V .

Учебные данные: $S_{\text{осн}} = 15 \text{ см}^2$, $h = 2, 4, 6, 8, 10 \text{ см}$; $V = 30, 60, 90, 120, 150 \text{ см}^3$.



Цилиндр: определение и элементы

Цилиндр — тело, ограниченное двумя равными кругами, лежащими в параллельных плоскостях, и боковой кривой поверхностью. В прямом круговом цилиндре ось перпендикулярна основаниям.

Высота цилиндра — расстояние между плоскостями оснований. Радиус основания обозначают r , высоту — h , а объём — V .

Диаметр основания равен $2r$: именно его часто приводят в условиях задач. Понимание этих обозначений ускоряет переход к формуле объёма.

Геометрия цилиндра на схеме

- На схеме цилиндра выделяют два равных круга-основания и боковую поверхность. Условные обозначения связывают радиус r , диаметр $2r$, высоту h и образующую — отрезок, определяющий «растяжение» основания.

- Для прямого цилиндра образующая перпендикулярна плоскостям оснований и совпадает с высотой. У наклонного цилиндра образующая образует наклон, поэтому её длина и высота различаются, что важно учитывать в задачах.



Формула объёма цилиндра

Объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 h$. Она получается по общему принципу: объём равен произведению площади основания на высоту, где основание — круг радиуса r .

Площадь основания круглой формы равна $S_{осн} = \pi r^2$. Поэтому сначала находят $S_{осн}$, а затем умножают на h , получая единый результат, пригодный для прямого цилиндра.

Если r и h измерены в сантиметрах, то произведение даёт объём в см^3 , а если в дециметрах — в дм^3 . Важно согласовать единицы измерения, как в любой формуле на объём.

Зависимость от радиуса квадратичная: при фиксированной высоте удвоение r приводит к четырёхкратному увеличению V . Именно поэтому цилиндр часто оказывается «быстрее растущим» объёмом, чем призма.

Примеры вычисления объёма цилиндра

Вычислите объёмы по формуле $V = \pi r^2 h$ и сравните, как меняется результат при изменении радиуса и высоты.

Объём пропорционален высоте и квадрату радиуса: изменение r влияет сильнее, чем линейное изменение h . В таблице это видно по кратностям объёма.

Расчёт по формуле $V = \pi r^2 h$ (возможны приближённые значения при $\pi \approx 3,14$).

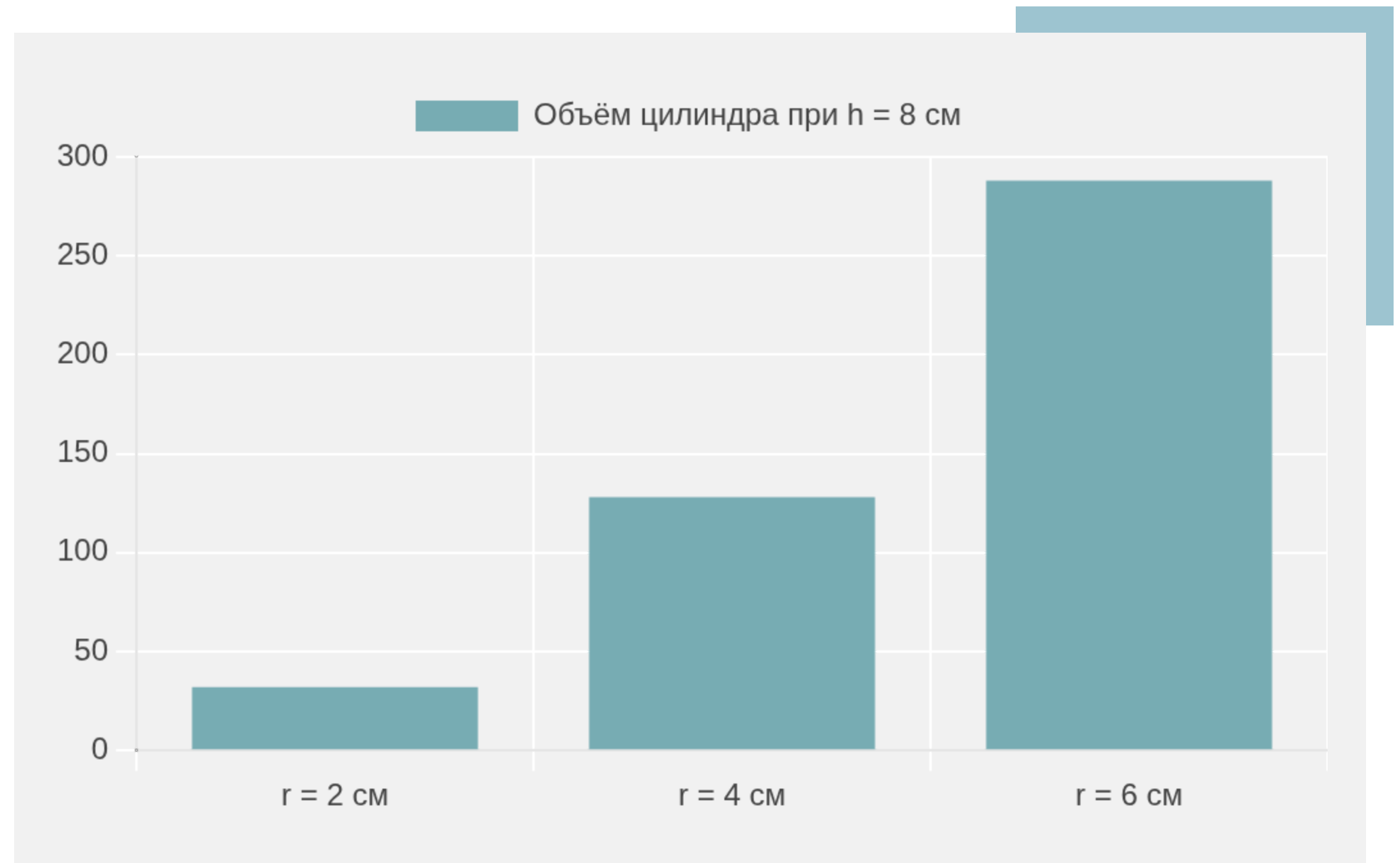
r , см	h , см	V , см ³
3	10	90π
5	4	100π
2	12	48π
6	5	180π

Как радиус влияет на объём цилиндра

Значения на диаграмме соответствуют $V = \pi r^2 h$ при $h = 8$ см, поэтому факторы π одинаковы и не влияют на сравнение. Решающее — рост r^2 .

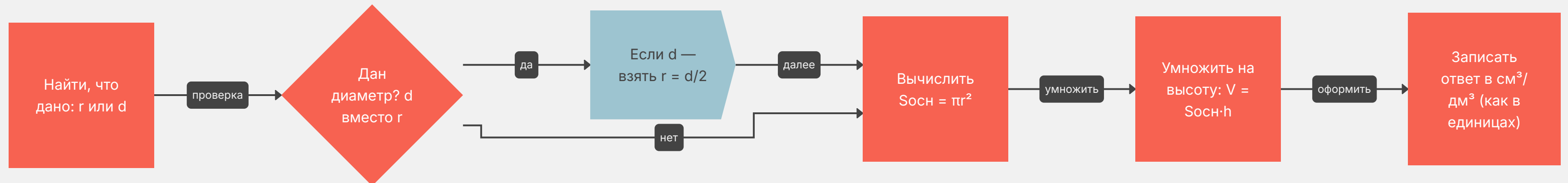
Переход от $r = 2$ к $r = 4$ увеличивает объём в 4 раза ($32\pi \rightarrow 128\pi$), а от 4 к 6 — примерно в 2,25 раза. Причина — квадратичная зависимость.

Расчёт по формуле $V = \pi r^2 h$, $h = 8$ см (дата: текущее учебное задание).



Алгоритм вычисления объёма цилиндра

Последовательность решения типовой задачи: от радиуса к площади основания и далее к объёму.



Сходство и различие прямой призмы и цилиндра

У призмы и цилиндра есть две равные основания в параллельных плоскостях. Объём всегда выражается как произведение площади основания на высоту, поэтому ключ — корректно определить $S_{осн}$ и h .

Общее правило объёма



Отличие заключается именно в основании: у призмы оно многоугольник, а у цилиндра — круг. Поэтому для призмы нужны формулы площадей многоугольников, а для цилиндра — πr^2 .

Разная форма основания

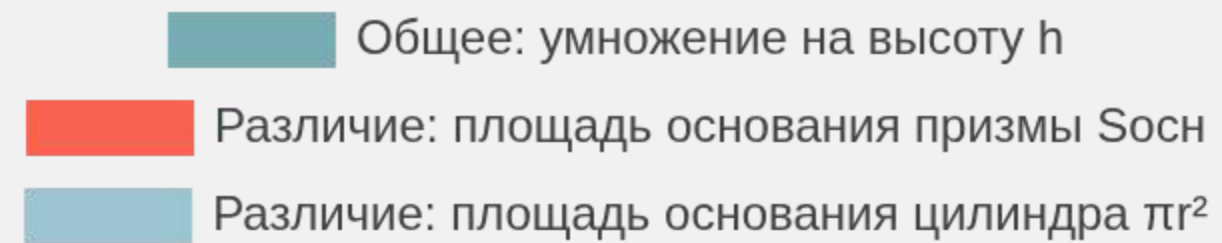


Сравнение формул объёма двух тел

Высота играет роль одинакового множителя в обеих формулах. Разница появляется только на этапе вычисления площади основания.

Цилиндр можно рассматривать как случай, когда основание имеет круговую форму, а призма — как корпус с многоугольным основанием. Сравнение упрощает выбор формулы.

Схематическое сравнение на основе формул $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ и $V = \pi r^2 h$ (дата: текущее учебное задание).



Практические задачи и единицы измерения

Примеры из жизни для таких тел — баки, коробки, сосуды, трубы, колонны и строительные конструкции. Обычно в условии указаны размеры, а объём требуется связать с вместимостью.

Перед вычислением обязательно согласуйте единицы: $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ дм}^3$, $1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$, $1 \text{ см}^3 = 1 \text{ мл}$. Если размеры заданы в разных единицах, перевод делают до подстановки.

В задачах на вместимость полезно внимательно выделять радиус или сторону основания и высоту. Тогда формула работает «в один шаг», а ошибки в единицах сразу становятся заметными.

Типичные ошибки при нахождении объёма

Ниже — наиболее частые причины неверного ответа и то, как их быстро проверить.

Большинство ошибок сводится к неверной величине в формуле (r вместо d , $S_{\text{осн}}$ вместо другой площади) или к несогласованным единицам. Системная проверка сокращает вероятность промаха.

Типовые методические рекомендации для школьных задач по стереометрии и радиусно-объёмным формулам.

Ошибка	Пример	Как проверить
Путают r и d	в $V = \pi r^2$ берут d вместо r	Если дан диаметр d , вычисляют $r = d/2$
Берут не то основание	подставляют боковую площадь вместо $S_{\text{осн}}$	В формуле объёма нужна именно площадь основания
Забывают квадрат	πr вместо πr^2	Проверьте, что радиус возведён в квадрат
Не приводят единицы	r в см, h в дм	Переведите все величины в одну систему
Нет кубических единиц	ответ записан в см ² или мл	Финальная единица всегда кубическая: см ³ , дм ³

Закрепляем главное: объём через основание и высоту

Вы научились видеть общий механизм вычисления объёма: площадь основания умножается на высоту. Для прямой призмы решает форма многоугольника, а для цилиндра — круг и формула $\pi r^2 h$, что ускоряет решение задач.