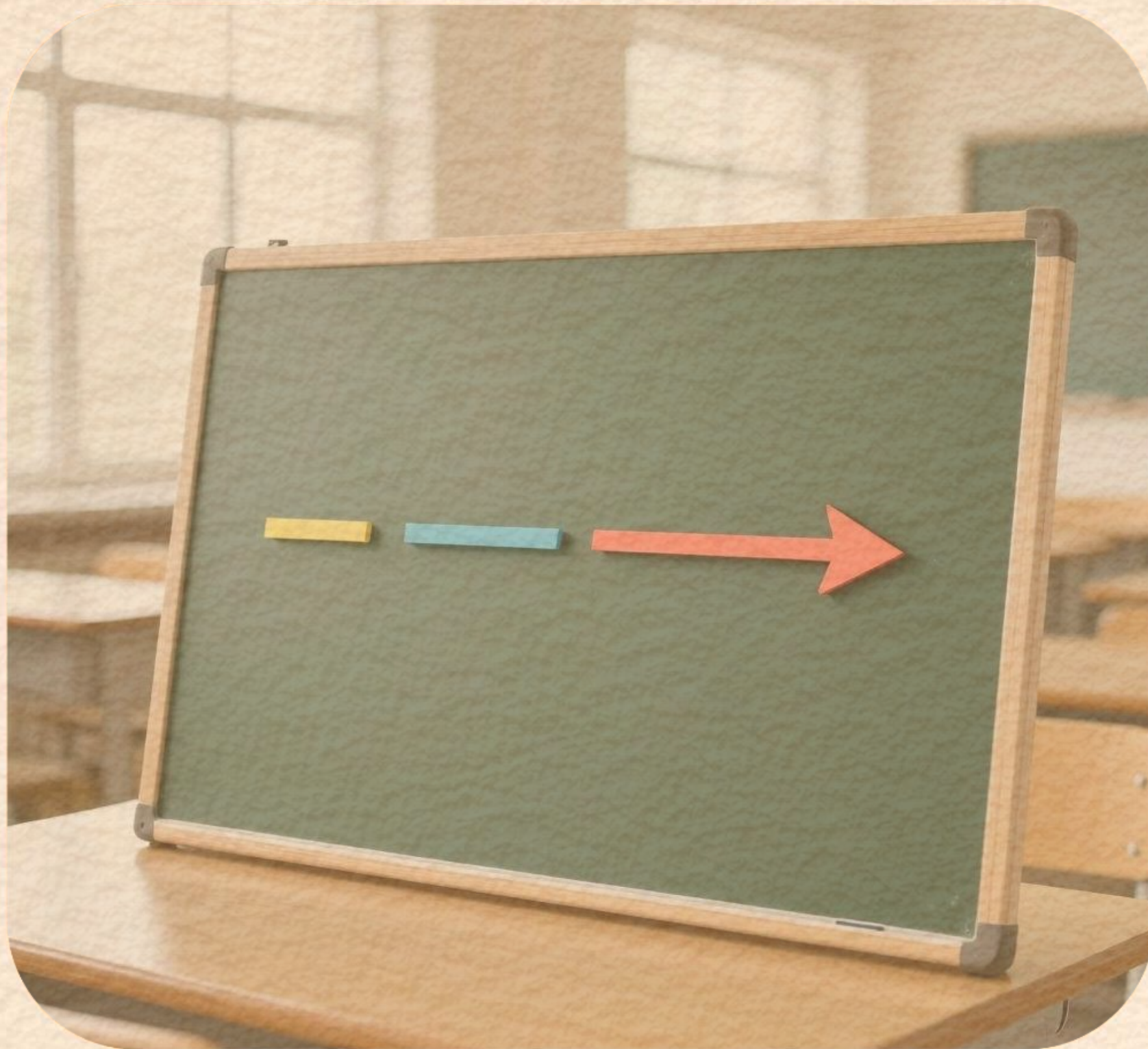


Умножение вектора на число

Как число меняет длину и направление вектора

Векторы и масштаб



Вектор уже знаком как направленный отрезок с длиной и направлением. Сегодня мы увидим, как умножение на число изменяет его масштаб, координаты и положение на плоскости.

Определение умножения вектора на число

1 Произведение – это вектор

Если вектор a умножить на число k , получится новый вектор $k \cdot a$. Эта операция изменяет сам вектор, а не просто его запись.

2 Длина зависит от модуля

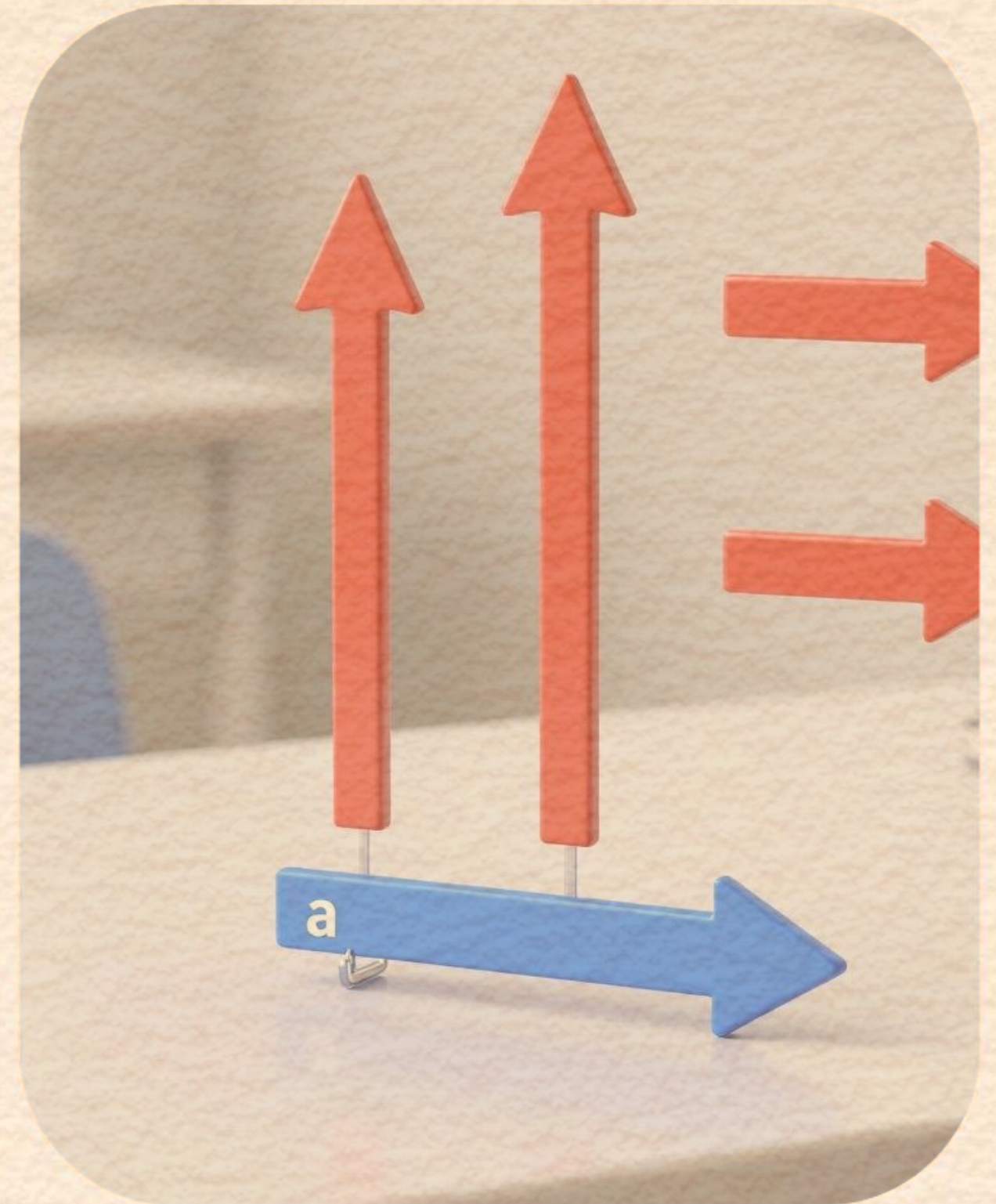
Длина результата равна $|k| \cdot |a|$. Поэтому модуль числа показывает, во сколько раз вектор станет длиннее или короче по сравнению с исходным.

3 Знак определяет направление

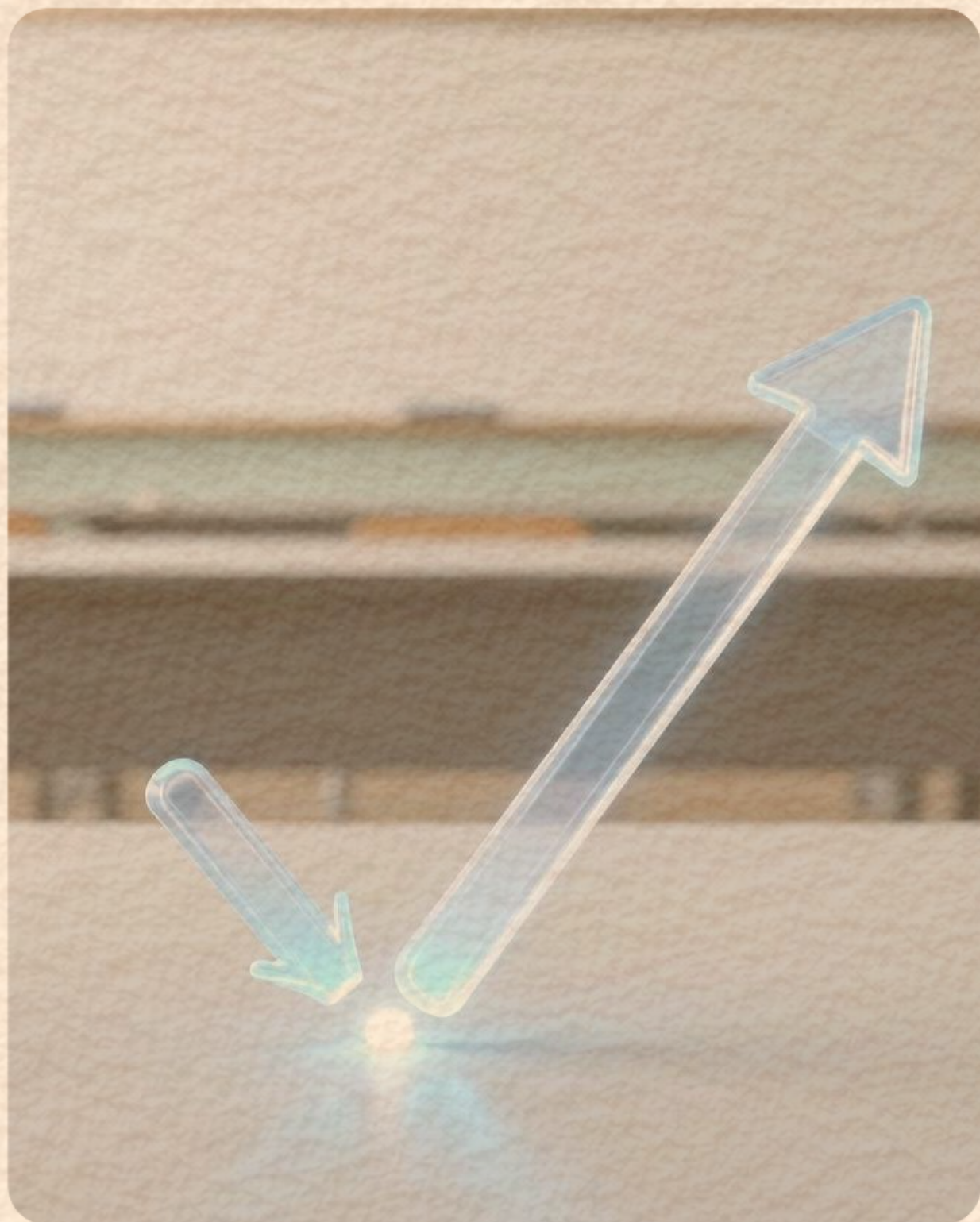
При $k > 0$ направление сохраняется, а при $k < 0$ вектор поворачивается в противоположную сторону. Именно знак отвечает за разворот результата.

4 Нулевой коэффициент

Если $k = 0$, получается нулевой вектор. Его длина равна нулю, поэтому у него нет направления и он не изображает перемещение.



Положительный и отрицательный коэффициент на рисунке



$$k = 3$$

При умножении на 3 вектор становится в три раза длиннее, но остаётся направленным так же, как и исходный. На чертеже это видно очень наглядно.

$$k = -2$$

При коэффициенте -2 длина увеличивается в два раза, а направление меняется на противоположное. Такой пример помогает сразу заметить роль знака числа.

Как коэффициент влияет на длину и направление

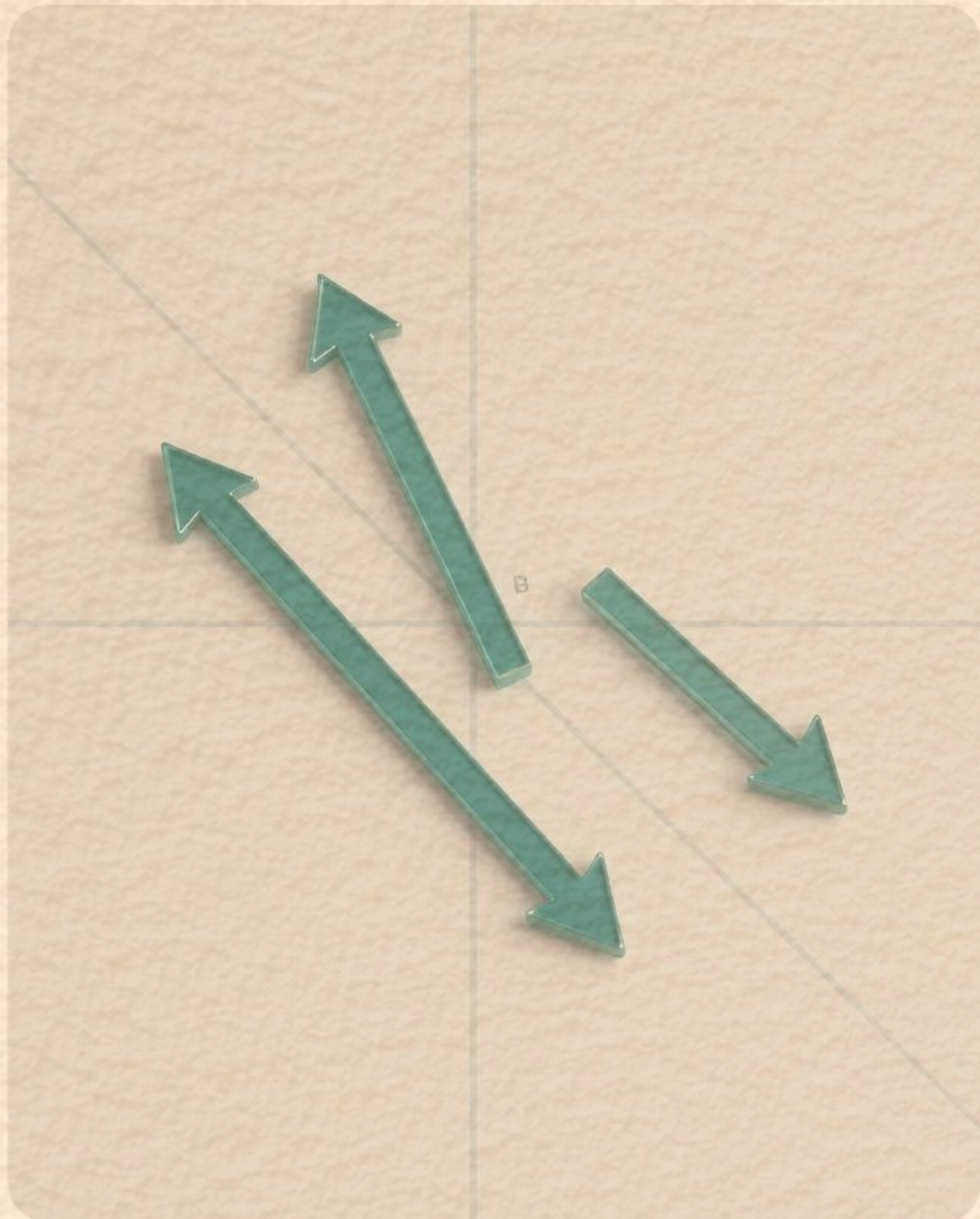
В таблице показано, как меняется вектор при разных значениях коэффициента.

Модуль числа задаёт изменение длины, а знак числа определяет направление результата.

k	Длина	Направление	Результат
$k > 1$	увеличивается	то же	длиннее
$0 < k < 1$	уменьшается	то же	короче
$k = 1$	не меняется	то же	без изменений
$k < 0$	изменяется	противоположное	разворот
$k = 0$	равна 0	нет	нулевой вектор

*Правило умножения вектора на число
из курса геометрии 9 класса*

Координатная запись произведения вектора на число



1 Формула для координат

Если $a = (x; y)$, то $k \cdot a = (kx; ky)$. Каждая координата умножается на одно и то же число, поэтому правило легко применять на плоскости.

2 Пример с положительным числом

Для вектора $(3; -1)$ при $k = 2$ получаем $(6; -2)$. Координаты увеличились вдвое, а направление сохранилось, потому что коэффициент положительный.

3 Пример с отрицательным числом

Если умножить $(4; 5)$ на -1 , получится $(-4; -5)$. Вектор не только меняет знак координат, но и направляется в противоположную сторону.

Изменение длины вектора при разных значениях k

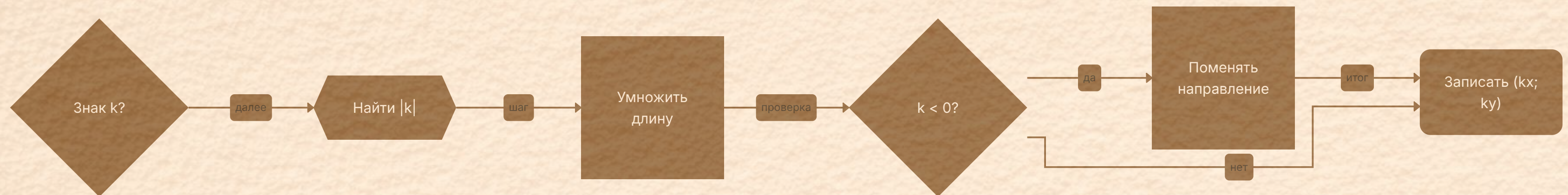
На диаграмме сравнивается только длина результата, без учёта направления. Для отрицательного коэффициента длина такая же, как при положительном с тем же модулем.

Чем больше модуль k , тем длиннее вектор; при $k = 0$ длина исчезает.

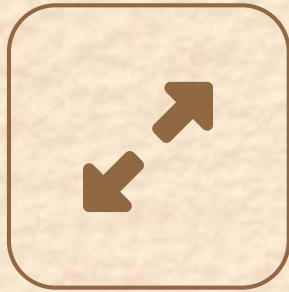
Математическая зависимость $|k| \cdot |a|$, иллюстративные значения для учебного примера

Как умножать вектор на число

Последовательность действий при работе с длиной, знаком и координатами

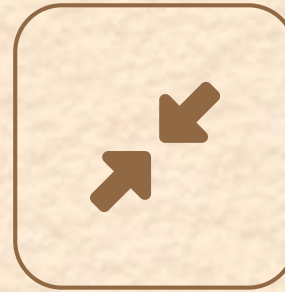


Геометрический смысл: масштабирование векторов



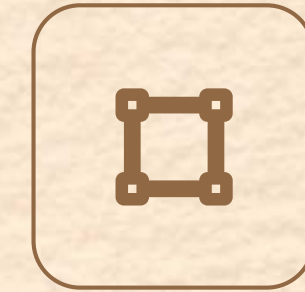
Увеличение масштаба

Вектор $2a$ можно представить как тот же отрезок, растянутый в два раза. Его направление остаётся прежним, поэтому на рисунке меняется только длина.



Уменьшение масштаба

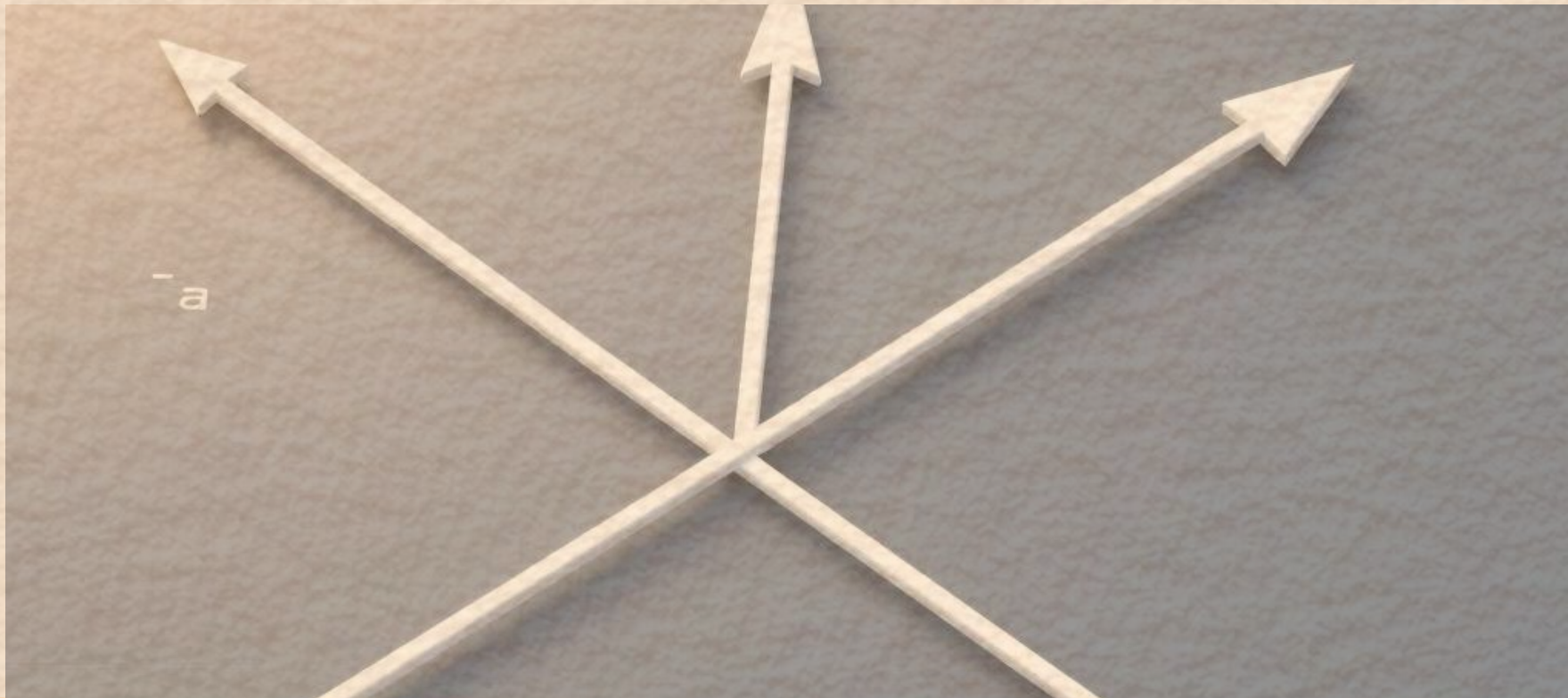
Вектор $0,5a$ вдвое короче исходного. Такое уменьшение похоже на уменьшение изображения на карте или схеме, где сохраняются форма и направление.



Практический смысл

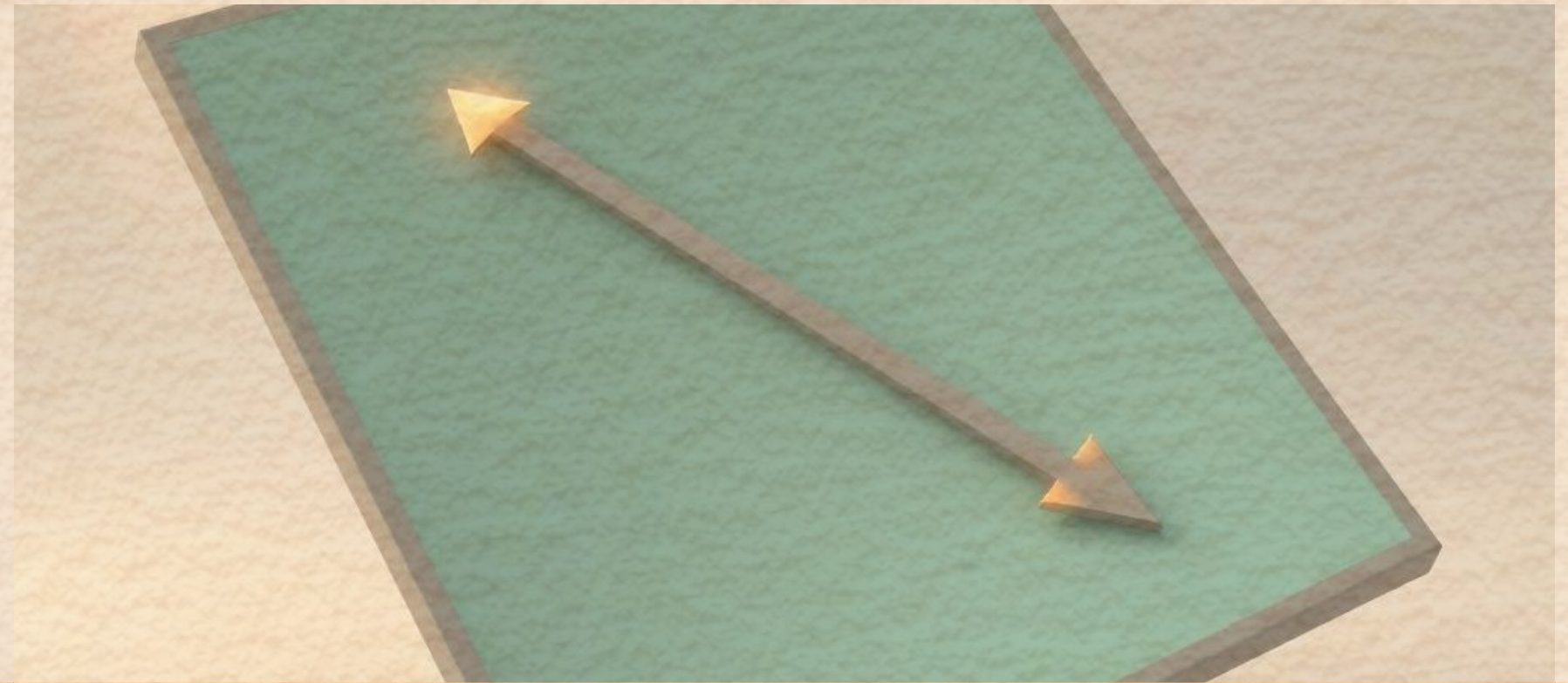
Масштабирование векторов помогает сравнивать отрезки, строить подобные фигуры и понимать, как изменяются величины в задачах по геометрии и физике.

Пример на координатной плоскости



Один вектор — несколько образов

Пусть дан вектор $a = (2; 3)$. Тогда $2a = (4; 6)$, $3a = (6; 9)$, а $-a = (-2; -3)$. Все эти векторы связаны одной и той же формулой, но на рисунке выглядят по-разному. Они лежат на одной прямой, потому что направлены вдоль одной линии.



Что показывает чертёж

На координатной плоскости сразу видно, что положительные коэффициенты сохраняют направление, а отрицательный разворачивает вектор. Такой пример удобно использовать, чтобы проверить вычисления и понять связь между координатами и геометрическим образом.

Сравнение примеров умножения

Вектор	Координаты	Длина	Направление
a	(1; 2)	исходная	—
2a	(2; 4)	в 2 раза больше	то же
-3a	(-3; -6)	в 3 раза больше	противоположное
0,5a	(0,5; 1)	в 2 раза меньше	то же

В таблице показано, как меняются координаты, длина и направление при разных коэффициентах.

Координаты изменяются по одному и тому же правилу, а знак коэффициента определяет, сохранится ли направление или изменится на противоположное.

Правило умножения вектора на число: $k \cdot (x; y) = (kx; ky)$.

При нулевом коэффициенте получается вектор с нулевой длиной, который не указывает ни в какую сторону.

Определение умножения вектора на число в школьном курсе геометрии.

0

умножение вектора на это число всегда даёт нулевой вектор без направления.

Положительные, отрицательные и дробные коэффициенты

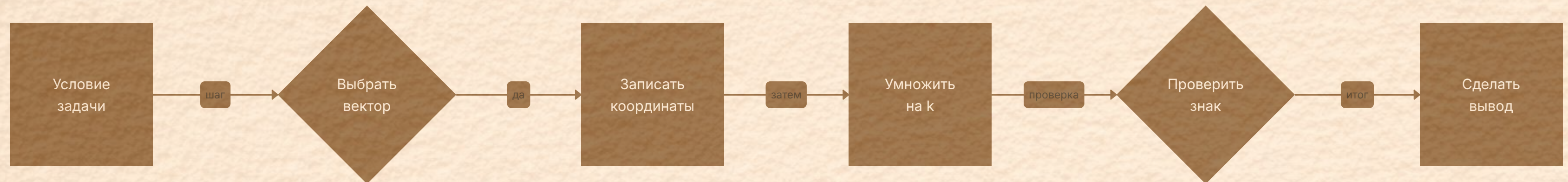
На рисунке удобно сравнить, как один и тот же вектор меняется при разных числах, не пересчитывая координаты каждый раз.

Модуль числа задаёт изменение длины, а знак показывает, сохранится направление или будет разворот.

Правило: длина результата равна $|k| \cdot |a|$, направление зависит от знака k .

Последовательность решения задачи с векторами

Алгоритм работы с вектором при умножении на число в геометрических задачах.



Применение в задачах на перемещение

1 Двойной путь

Если смещение задано вектором a , то $2a$ показывает движение в том же направлении, но на удвоенное расстояние. Это удобно, когда нужно быстро сравнить два одинаковых перемещения.

2 Половина пути

Коэффициент 0,5 помогает найти вектор, длина которого вдвое меньше исходного. Так легко описывать частичное перемещение по прямой или на плоскости без лишних построений.

3 Возврат назад

Запись $-a$ означает перемещение на ту же длину, но в противоположную сторону. В задачах это часто соответствует возвращению к исходной точке или движению навстречу.

Сила и скорость в физике



Если сила меняется

Вектор силы можно увеличить, уменьшить или развернуть, не меняя саму модель записи. Например, $2^\circ F$ означает более сильное действие, а $-F$ — ту же силу, но в противоположном направлении. На схеме это удобно показать стрелками разной длины и ориентации.



Если движение продолжается

Вектор скорости тоже подчиняется этому правилу. Когда направление ветра или движения меняется, знак коэффициента помогает отразить разворот, а модуль — сравнить, насколько быстрее или медленнее стало движение. Такой рисунок хорошо связывает математику с наблюдаемыми явлениями.

Связь между коэффициентом и результатом умножения

На шкале удобно сравнивать коэффициенты по модулю и сразу видеть, как сильно меняется длина вектора.

Чем больше модуль числа, тем сильнее изменение длины; при нуле получается нулевой вектор, а знак определяет направление.

Правило умножения вектора на число и зависимость длины результата от модуля коэффициента.

Типичные ошибки при умножении вектора на число

Одна координата вместо двух

Частая ошибка — умножить только первую координату и забыть про вторую. Проверка по формуле $(kx; ky)$ сразу показывает, что обе координаты должны измениться одинаково.

Дробь как увеличение

Коэффициент 0,5 не увеличивает вектор, а уменьшает его вдвое. Здесь важен модуль числа: если он меньше 1, длина результата становится короче исходной.

Пропущен знак

При отрицательном коэффициенте многие меняют длину, но оставляют направление прежним. Нужно помнить: знак «минус» всегда разворачивает вектор в противоположную сторону.

Путаница с нулевым вектором

Нулевой вектор часто путают с обычным, хотя у него нет направления и длина равна нулю. Он появляется только при умножении на 0 и в специальных задачах.

Мини–практика: ответы к примерам

**Проверьте, как по формуле
меняются координаты, длина
и направление в каждом случае.**

Во всех примерах координаты умножаются
поэлементно, а знак коэффициента
определяет, сохраняется ли направление
или происходит разворот.

Исходный вектор	Результат	Длина	Направление
(1; -2)	(3; -6)	в 3 раза	то же
(4; 0)	(-8; 0)	в 2 раза	противоположное
(6; 8)	(3; 4)	в 2 раза меньше	то же

*Вычисления по формуле умножения вектора
на число.*

Что важно запомнить об умножении вектора на число

Эта операция меняет длину вектора, а при отрицательном коэффициенте — ещё и направление. Формула $k \cdot (x; y) = (kx; ky)$ помогает быстро считать и решать задачи по геометрии, физике и движению.