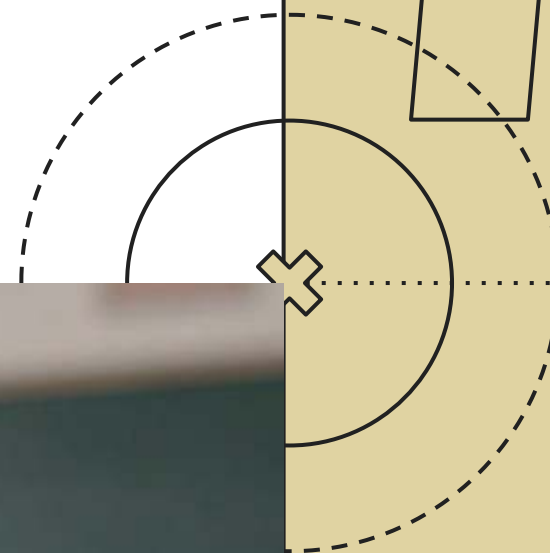


Объем шарового сегмента и шарового сектора

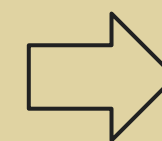
Разберём, как находить объем «купола» и «ломтика» шара через R и h .



Зачем это нужно в стереометрии 10 класса



Шаровые сегмент и сектор встречаются в задачах на объемы тел вращения. Они возникают при сечении шара плоскостью и при выделении части шара конусом. Формулы связывают радиус, высоту и геометрические сечения — и помогают быстро находить объёмы куполов, линз и резервуаров.



Основные объекты задачи

			
Сфера и шар Сфера — поверхность, все точки которой равноудалены от центра. Шар — тело, ограниченное этой поверхностью. Именно шар имеет объем, который мы будем вычислять в дальнейшем.	Шаровой сегмент Шаровой сегмент — часть шара, отсечённая плоскостью. Его граница включает круг основания (в плоскости сечения) и соответствующую дугу сферы. Ключевой параметр — высота h.	Шаровой сектор Шаровой сектор получается, когда шар ограничен конической поверхностью. Вершина конуса находится в центре шара, а боковая граница совпадает с частью сферы. Здесь тоже работает высота h как определяющий размер.	Радиусы и высота В задачах используют радиус шара R и высоту тела h. Для сегмента дополнительно встречается радиус кругового основания r. Эти величины связаны формулами, поэтому построения не перегружают решение.

Обозначения, нужные для вычислений

Коротко: какие буквы что означают и по каким формулам находятся объёмы шаровых тел.

Во всех формулах используются небольшое число измеряемых величин; при наличии R и h объём определяется напрямую, а для сегмента r находится через $r^2 = 2Rh - h^2$.

Обозначение	Смысл	Объём	Связь
R	радиус шара	$V_{\text{шара}} = 4\pi R^3/3$	—
h	высота сегмента/сектора	$V_{\text{сегмента}} = \pi h^2(3R - h)/3$	$r^2 = 2Rh - h^2$
h	высота сектора	$V_{\text{сектора}} = 2\pi R^2 h/3$	—

Шаровой сегмент на чертеже



Как устроены параметры сегмента

На рисунке отмечают сферу, секущую плоскость и круг основания сегмента. Параметры h и r фиксируют положение плоскости относительно центра шара. Радиус сферы обозначают R для общей привязки масштаба.

Почему появляется формула $r^2 = 2Rh - h^2$

Треугольники, возникающие при проведении радиусов к точкам круга основания, дают геометрическую связь между h , r и R . В итоге получается $r^2 = 2Rh - h^2$: так одна величина выражается через две другие.

**При максимальной
допустимой высоте
сегмент превращается в
полный шар по объёму.**

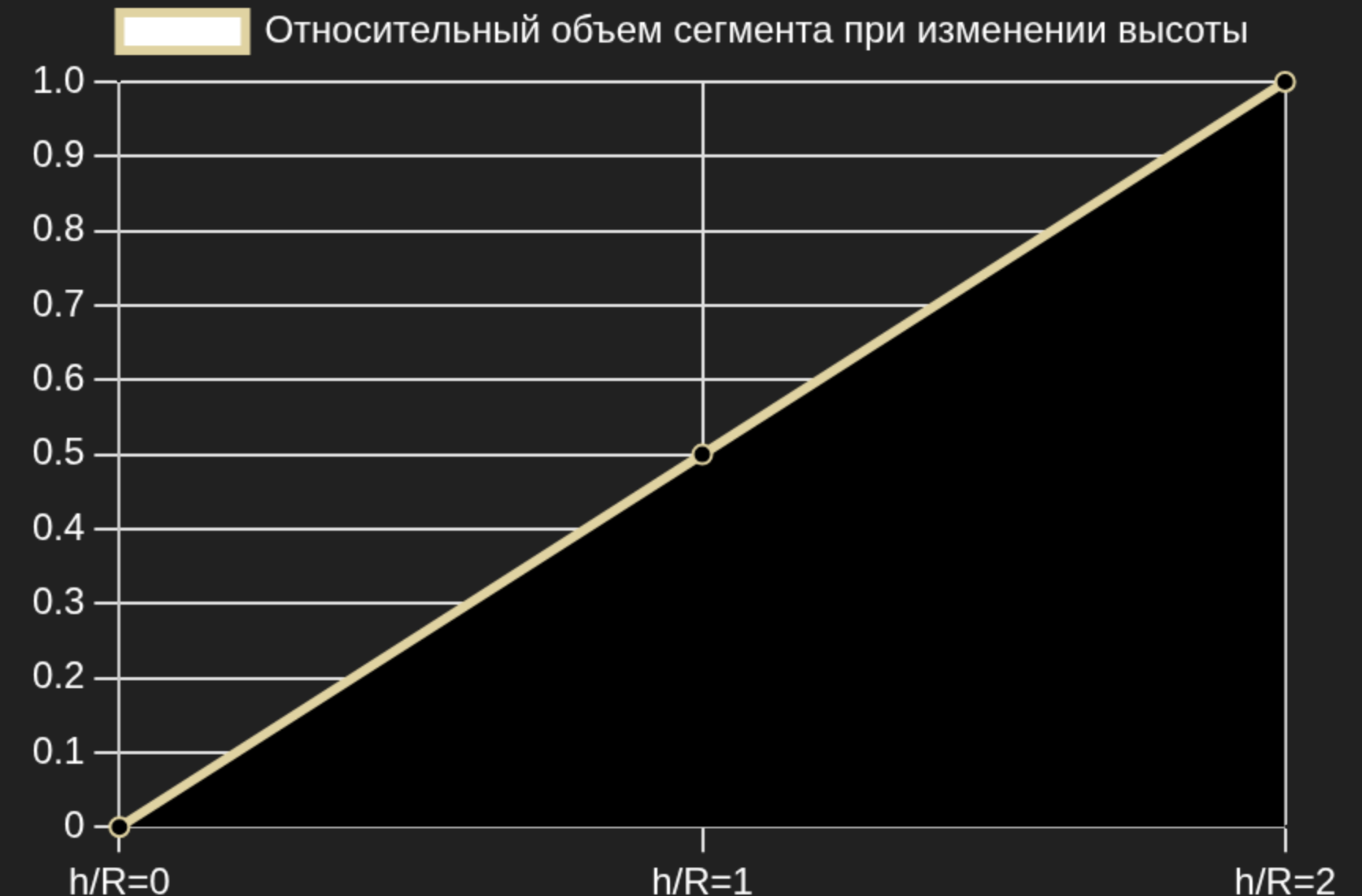
Объем сегмента выражается
 $V = \pi h^2 (3R - h) / 3$: при $h = 2R$ получаем
 $V = 4\pi R^3 / 3$. Это удобная проверка
вычислений.

2R

Как меняется объём при росте высоты h

Относительная кривая
нелинейна: сначала сегмент
«набирается» медленно, а
затем объём начинает
увеличиваться заметно быстрее.

Нелинейность означает, что
даже небольшое изменение h
при больших значениях сильнее
влияет на результат. Это
важно учитывать в задачах на
обратный расчет.



Построение по формуле $V_{\text{сегмента}} = \pi h^2 (3R - h) / 3$ и шкале $V / (4\pi R^3 / 3)$.

Вывод формулы через сумму площадей сечений

01

Рассмотрим сечение сегмента плоскостью на расстоянии x от вершины. Оно имеет вид круга, а его радиус выражается через R и x , поэтому площадь равна $\pi(2Rx - x^2)$.

02

Объём получаем как сумму бесконечно тонких «слоёв» толщиной dx . Тогда $V = \int \pi(2Rx - x^2) dx$ по промежутку от 0 до h — всё определяется положением среза.

03

После вычисления интеграла получаем $V = \pi h^2(3R - h)/3$. Этот вывод показывает, как стереометрия связывается с идеей суммирования бесконечно малых частей.

Частные случаи шарового сегмента

01

Если $h=0$, секущая плоскость проходит через вершину, и сегмент вырождается в точку. Поэтому объём равен нулю — формула даёт тот же результат.

02

При $h=R$ сегмент становится полушарии. По формуле $V=\pi h^2(3R-h)/3$ получаем $V=2\pi R^3/3$ — то есть половину объёма шара.

03

Если $h=2R$, плоскость оказывается на противоположном конце диаметра, и сегмент совпадает с целым шаром. Тогда $V=4\pi R^3/3$, как и должно быть.

04

Когда h очень мало, по виду сегмент близок к тонкому слою. В этом режиме объём в основном определяется площадью основания круга, а высота влияет сильнее через квадрат.

Сравнение: шар, сегмент и полушарие

✕ Сопоставим три случая при одном и том же радиусе R , чтобы формула сегмента согласовывалась с предельными значениями.

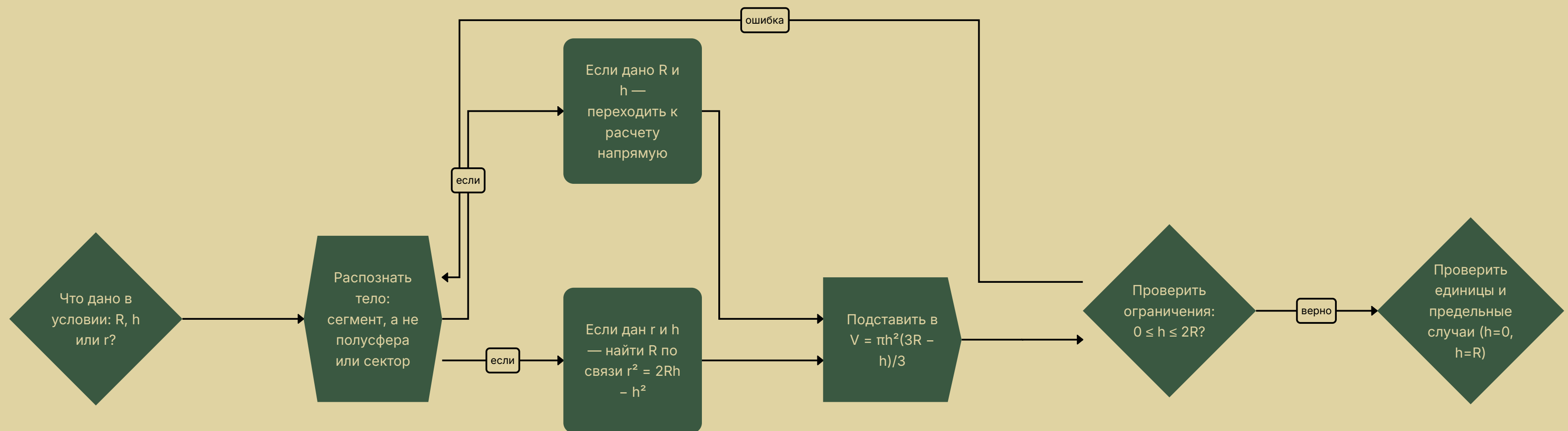
✕ Проверка на симметричных и предельных значениях показывает согласованность: при $h=R$ и $h=2R$ выражение сегмента даёт известные объёмы.

Тело	Условие	Объём	Формула
Шар	—	$V_{\text{шара}}$	$4\pi R^3/3$
Сегмент	высота h	$V_{\text{сегмента}}$	$\pi h^2(3R-h)/3$
Полушарие	$h=R$	$V_{\text{полушария}}$	$2\pi R^3/3$

Школьные формулы объема в стереометрии (10 класс)

Алгоритм решения задач на шаровой сегмент

✗ Логика вычислений: из условия выбирают данные, затем находят недостающие параметры и используют формулу объема сегмента





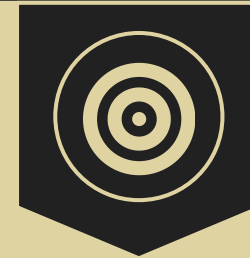
Шаровой сектор: геометрический смысл



Ограничение конической поверхностью
Шаровой сектор получается, когда часть шара заключена между сферической поверхностью и конусом с вершиной в центре. Коническая поверхность задаёт «крышу» сектора со стороны.



Граница фигуры
По краям сектор ограничивает часть сферы, а со стороны конуса — его боковая поверхность. Такое сочетание делает фигуру объёмным «угловым» фрагментом шара.



Связь с углом при вершине
Угол при вершине конуса определяет, насколько широко раскрыт сектор. Поэтому объём напрямую связан с радиусом шара R , высотой h и геометрией этого угла.



Сравнение с сегментом
В школьных задачах сектор часто рассматривают вместе с сегментом: оба возникают из частей шара, но ограничение разное. Поэтому полезно сравнивать их формулы и поведение при изменении h .

Формула объема шарового сектора

01

Объем шарового сектора вычисляют по формуле $V = 2\pi R^2 h / 3$. В ней высота h входит первой степени, поэтому при фиксированном радиусе объем растет прямо пропорционально увеличению h .

02

Радиус шара R влияет сильнее: формула содержит R^2 , значит, при увеличении R объем растет квадратично. Это важно при задачах, где известен диаметр или масштаб сферы.

03

Проверка удобна: при $h = R$ получается $V = 2\pi R^3 / 3$, то есть объем полушария. Такой результат помогает быстро контролировать правильность вычислений и выбор формулы.

Сравнение объемов сектора и сегмента

При одинаковом R и малых h сегмент заметно «отстаёт»: его объем содержит h^2 , поэтому доля V растёт медленнее, чем у сектора, где h входит линейно.

По диаграмме видно пересечение в точке $h = R$ (полушарие). Дальше сегмент быстрее меняется с ростом h , тогда как сектор ведет себя более равномерно относительно высоты.



Расчет по формулам $V_{\text{сегмента}} = \pi h^2 (3R - h) / 3$ и $V_{\text{сектора}} = 2\pi R^2 h / 3$; значения взяты для $h/R = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$.

Связь шарового сектора с конусом

► Сектор удобно представлять через конус: его вершина расположена в центре шара, а боковая поверхность совпадает с границей сектора. Тогда высота сектора h задает «глубину» захваченной части шара.



На схеме радиус шара R и радиус основания конуса связаны с положением граничного круга на сфере. Отсюда формула объема получается как объем фигуры, определенной именно конусом и сферой. ◀

Типичные данные в школьных задачах

01

Чаще всего в условии задают радиус шара R и высоту соответствующего фрагмента h . По ним напрямую выбирают формулу и оценивают правдоподобие результата, не переходя к дополнительным геометрическим величинам.

02

Реже известен радиус основания r (например, для сегмента), а тогда применяют связь $r^2 = 2Rh - h^2$, чтобы выразить недостающий параметр. Важно не перепутать r основания с радиусом шара.

03

По сюжетам задачи встречаются купола, сферические резервуары, капли и линзоподобные формы. Ответы чаще всего записывают в см^3 , м^3 или переводят в литры, когда речь идет об объеме жидкости.

Единицы измерения и перевод величин

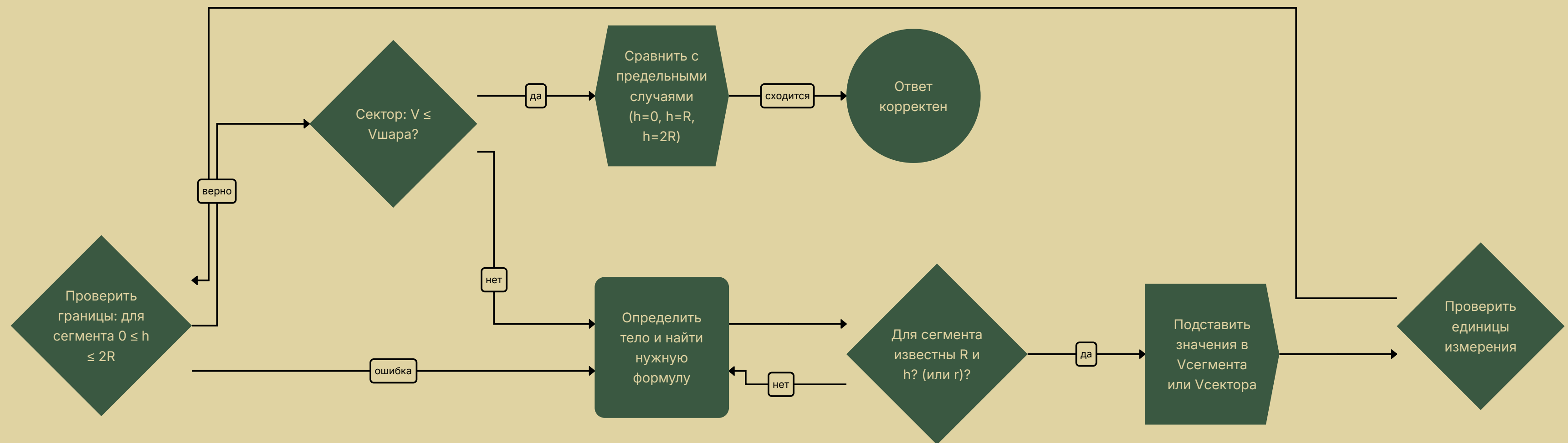
Для корректной подстановки в формулы объема нужно согласовать единицы измерения радиусов и высот. Тогда итоговый объем будет выражен в нужной системе без ошибок масштаба.

Самая частая ошибка — смешивать см и м при вычислении объема: тогда результат отличается в 1000 или 1 000 000 раз. Таблица помогает заранее выбрать единицы.

Длина	Объем	Перевод
см	см ³	1 см ³ = 0,001 л
м	м ³	1 м ³ = 1000 л
см	см ³	1 л = 1000 см ³
м	м ³	1 л = 0,001 м ³

Проверка правильности ответа

- ✗ Контроль логики и ограничений: тип фигуры, формула, единицы и допустимые значения параметров



Связь темы с другими разделами математики и физики

01

Тема опирается на стереометрию и умение работать с объемами тел вращения. Формулы сводят геометрию к выражениям с R и h , что тренирует алгебраическую грамотность.

02

При выводах используются идеи, близкие к математическому анализу: объем можно представлять как сумму тонких слоев. Это связывает школьную стереометрию с интегральными представлениями.

04

В физике вычисленный объем помогает находить массу тела при известной плотности и оценивать объем жидкости. Сферические элементы встречаются в моделировании, поэтому методика пригодна за пределами математики.

03

В задачах регулярно задействуются формулы площадей кругов и переход от радиусов к диаметрам. Такая связность развивает навык видеть «скрытые» плоские фигуры внутри пространственных тел.

Точность в один шаг: от распознавания тела к объему

- Основные формулы: $V_{\text{сегмента}} = \pi h^2 (3R - h)/3$ и $V_{\text{сектора}} = 2\pi R^2 h/3$. Они относятся к стереометрии 10 класса и требуют правильного выбора параметров, внимательной подстановки и согласования единиц измерения.