

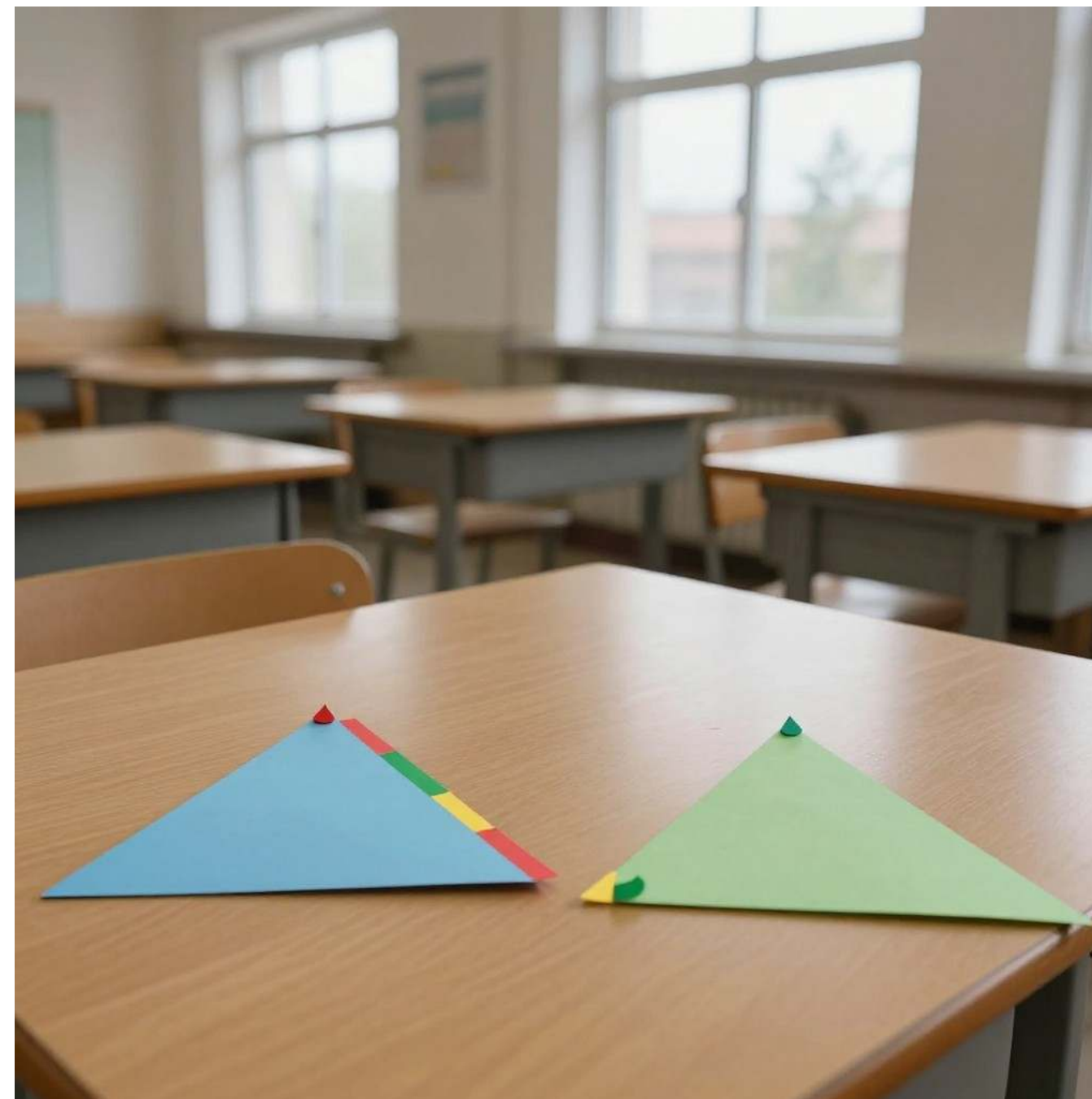


# Второй и третий признаки подобия треугольников

Изучаем, как по сторонам и углам доказать подобие треугольников.

# Подобие в геометрии: зачем оно нужно

Подобие помогает находить недоступные размеры, работать с пропорциями и решать задачи на чертежах, масштабах и построениях.



# Что называют подобными треугольниками

## 1 Одинаковая форма

Подобные треугольники имеют одинаковую форму, хотя их размеры могут отличаться. Соответствующие углы у них равны, а соответствующие стороны связаны одним и тем же отношением.

---

## 2 Коэффициент подобия

Коэффициент подобия показывает, во сколько раз один треугольник больше другого. Если коэффициент равен  $k$ , то все соответствующие стороны изменяются в  $k$  раз.

---

## 3 Периметр треугольников

У подобных треугольников периметры относятся так же, как и соответствующие стороны. Поэтому, зная коэффициент подобия, можно быстро сравнивать сумму сторон двух фигур.

---

## 4 Площади фигур

Площади подобных треугольников связаны сильнее: они относятся как квадрат коэффициента подобия. Это особенно важно при решении задач на большие и малые чертежи.

# Второй признак подобия: две стороны и угол между ними

## Главное условие

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а угол между ними равен, то треугольники подобны.

## Что сравнивают

Проверяют именно две пары соответствующих сторон и один включённый угол. Нельзя брать любой равный угол: важен только угол между выбранными сторонами.

## Название признака

Во многих учебниках этот признак называют SAS-признаком подобия. Аббревиатура напоминает, что используются две стороны и угол между ними.

## Где полезен

Признак особенно удобен в задачах с биссектрисой, высотой, медианой и параллельными прямыми, когда часть элементов треугольника уже можно связать по чертежу.



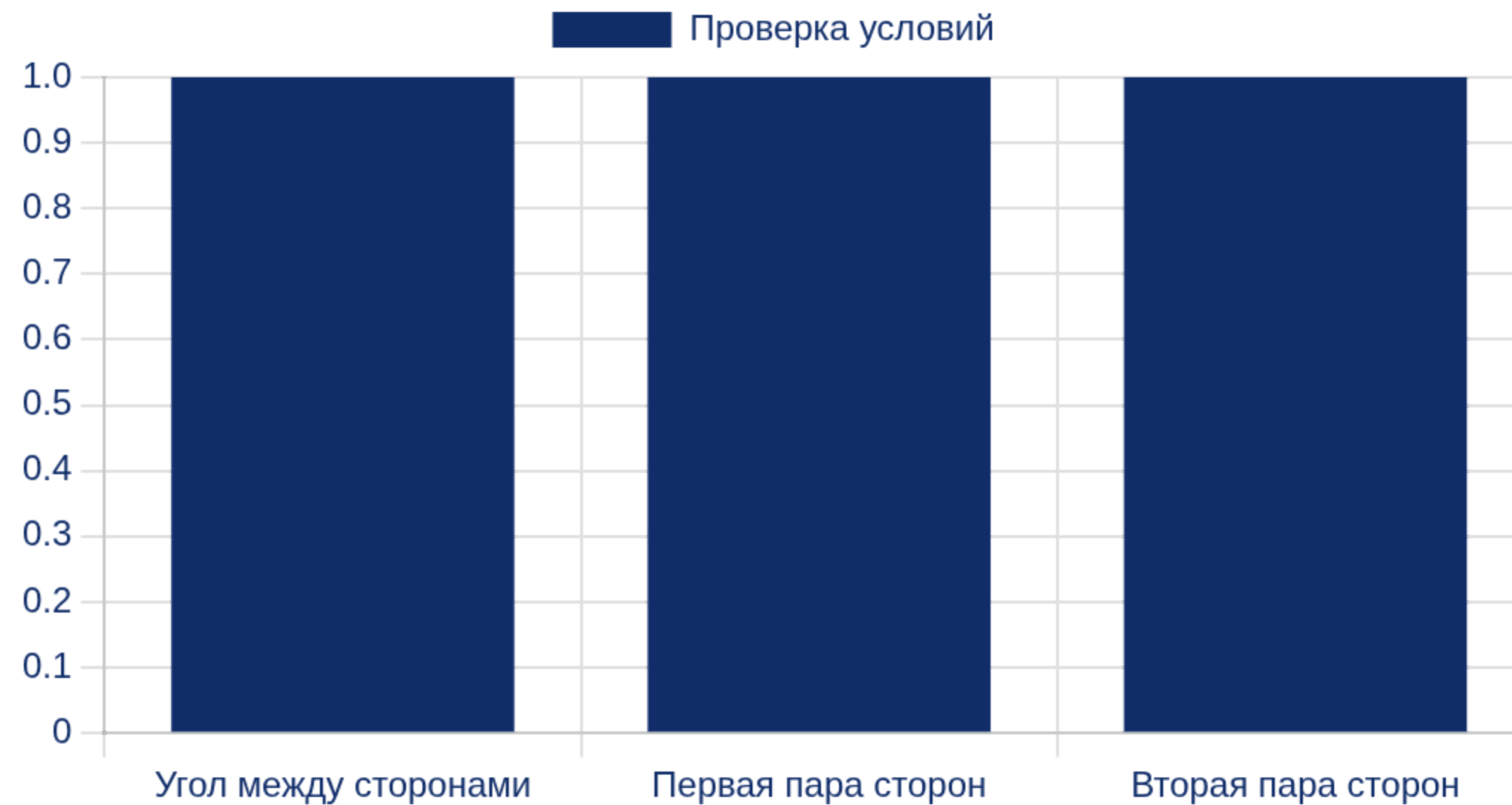
# Как записывают второй признак

| Элемент | Запись                                | Смысл           |
|---------|---------------------------------------|-----------------|
| Стороны | $AB/A1B1 = AC/A1C1$                   | Пропорция       |
| Угол    | $\angle A = \angle A1$                | Включённый угол |
| Вывод   | $\triangle ABC \sim \triangle A1B1C1$ | Подобие         |

Краткая запись помогает не потерять соответствие сторон и углов при решении.

Двух равных отношений сторон и равенства включённого угла достаточно для вывода о подобии.

# Что проверяется во втором признаке



Все три условия должны выполняться одновременно, иначе вывод о подобии сделать нельзя.

Второй признак работает только при полном наборе условий: двух пропорциях и равенстве включённого угла.

# Как применять второй признак в задачах

## Выбрать пары сторон



Сначала находят две стороны в первом треугольнике и две соответствующие стороны во втором. Ошибка в выборе пар сразу нарушает дальнейшие вычисления.

---

## Проверить угол



Затем определяют угол между выбранными сторонами и сравнивают его с углом во втором треугольнике. Именно он должен быть равным для применения признака.

---

## Составить пропорции



После этого записывают отношения соответствующих сторон и проверяют, равны ли дроби. Если пропорции совпадают, можно переходить к выводу о подобии.

---

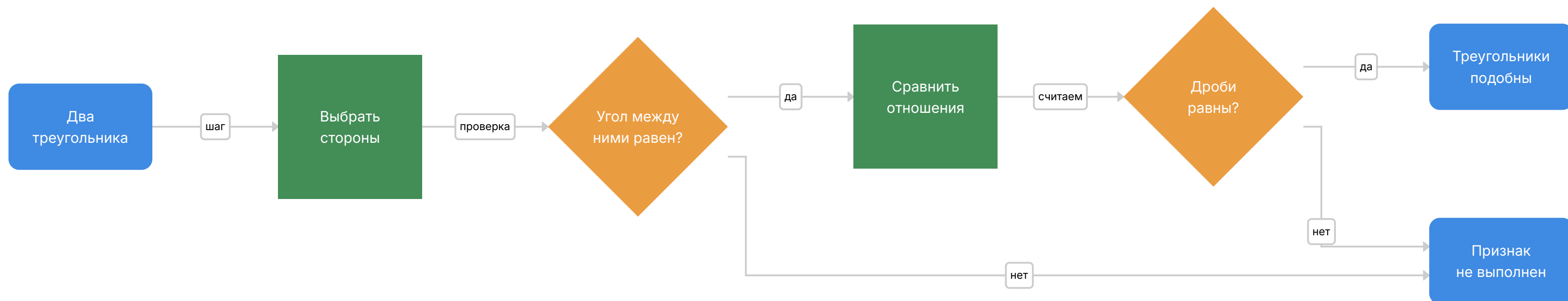
## Использовать в задачах



Этот признак часто встречается в задачах с биссектрисой, высотой, медианой и параллельными прямыми, где отношения сторон удобно получать из рисунка.

# Проверка подобия по второму признаку

Последовательность проверки двух сторон и включённого угла в треугольниках



# Третий признак подобия: три стороны

**1**

## Три пары сторон

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, треугольники подобны. Здесь проверяют только длины сторон, не сравнивая углы заранее.

**2**

## Название признака

Этот критерий называют SSS-признаком подобия. Он особенно удобен, когда в задаче даны только размеры сторон, а углы на рисунке не подписаны.

**3**

## Что следует из пропорции

Из равенства всех трёх отношений сторон автоматически следует равенство соответствующих углов. Поэтому третий признак позволяет сделать полный вывод о подобии фигур.

# Как записывают третий признак

Запись показывает, что для доказательства достаточно сравнить все три пары сторон.

Три равных отношения сторон полностью заменяют проверку углов и позволяют доказать подобие по длинам.

| Элемент     | Запись                                   | Смысл               |
|-------------|------------------------------------------|---------------------|
| Стороны     | $AB/A_1B_1 = BC/B_1C_1 = AC/A_1C_1$      | Все пропорциональны |
| Коэффициент | $k$                                      | Общий множитель     |
| Вывод       | $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ | Подобие             |

# Когда удобен третий признак

## Когда даны только стороны

Третий признак особенно полезен, если на чертеже подписаны длины всех сторон, а про углы ничего не сказано. Тогда не приходится искать дополнительные построения: достаточно сравнить три пары сторон и проверить один и тот же коэффициент.



## Проверка формы по чертежу

В задачах на сравнение фигур этот признак помогает быстро понять, одинаковы ли их формы. На рисунке удобно выделить одинаковые отношения сторон цветом или скобками, чтобы сразу увидеть, что треугольники отличаются только размером.

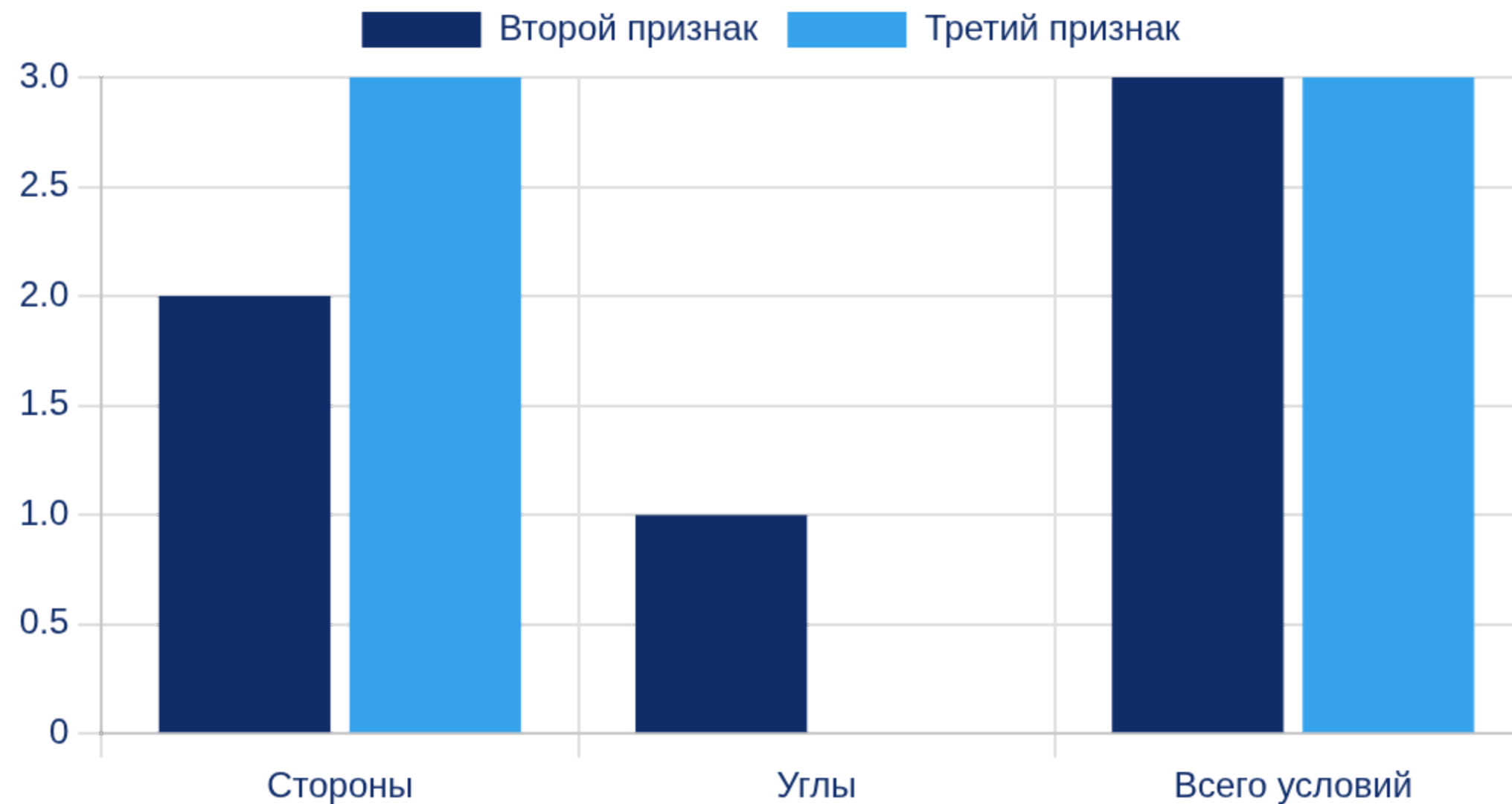


## Масштаб и построения

Третий признак часто встречается в задачах на масштаб, когда одна фигура изображена уменьшенно, а другая — в натуральную величину. В построениях он позволяет сравнить готовую модель с исходным треугольником без измерения углов.



# Сравнение второго и третьего признаков



Оба признака приводят к одному выводу, но используют разные данные. Второй требует угол между двумя сторонами, а третий опирается только на длины сторон.

Чем меньше измерений дано, тем важнее точная проверка условий. Второй признак экономит расчёты по углам, третий удобен при работе только с длинами.

# Чем подобие отличается от равенства треугольников

## 1 Одинаковая форма

Подобные треугольники имеют одинаковые углы и одинаковое расположение сторон, но их размеры могут быть разными. Именно поэтому один треугольник можно получить из другого увеличением или уменьшением.

## 2 Совпадение без изменения

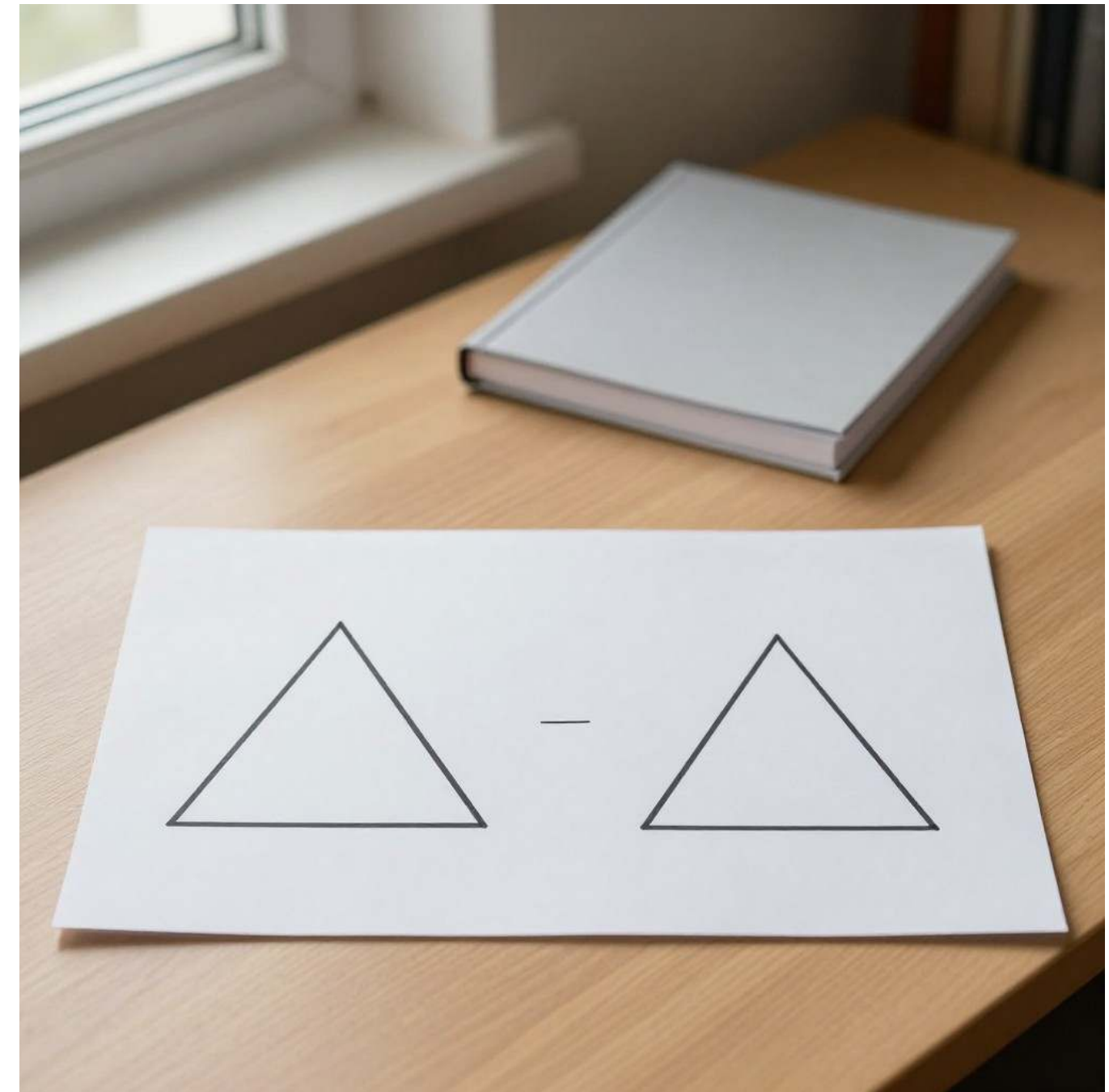
Равные треугольники полностью совпадают: если наложить один на другой, они совместятся без поворота и растяжения. У них равны и углы, и соответствующие стороны, поэтому коэффициент подобия равен 1.

## 3 Пропорции вместо равенства

Для подобия важно не равенство сторон, а их одинаковое отношение. Одна фигура может быть в два, три или больше раз больше другой, и при этом оставаться подобной по форме.

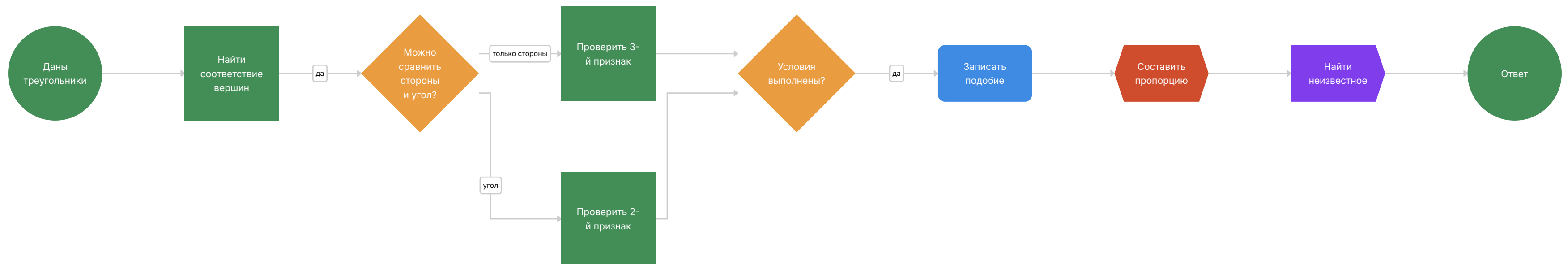
## 4 Зачем это различать

В задачах это различие помогает понять, нужно ли искать точное совпадение фигур или достаточно установить пропорцию. Ошибка в выборе понятия приводит к неверному способу решения и неправильному ответу.



# Шаги проверки подобия треугольников

Последовательность действий при решении задач по второму или третьему признаку



# Типичные ошибки при применении признаков

## Неверный порядок вершин

При записи подобия важно сохранять соответствие вершин в одном и том же порядке. Если перепутать его, то равные углы и пропорциональные стороны будут сопоставлены неверно, и решение потеряет смысл.

## Подмена нужного угла

Во втором признаке учитывается именно угол между сравниваемыми сторонами. Нельзя подставлять любой равный угол с чертежа, потому что тогда условие признака не выполняется и вывод о подобии становится ошибочным.

## Недостаточно данных

В третьем признаке нельзя ограничиться только двумя пропорциями. Нужны все три пары сторон, иначе сходство треугольников не доказано полностью и результат нельзя считать обоснованным.

## Смещение сторон и углов

Иногда ученики сравнивают длины не тех сторон или ищут углы, которые не относятся к выбранным вершинам. Чтобы избежать ошибки, полезно заранее отметить соответствующие элементы на рисунке.

# Пример применения второго признака

## Даны элементы

Из условия известны две стороны первого треугольника: 6 см и 9 см, а второго — 4 см и 6 см. Также дано равенство углов  $A$  и  $A_1$ , то есть угол между этими сторонами совпадает.

## Сравниваем отношения

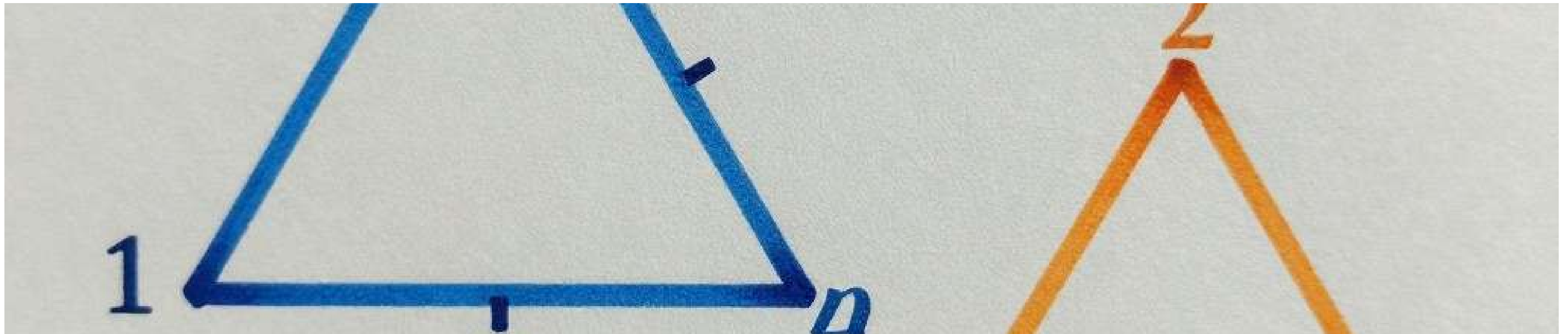
Вычисляем отношения соответствующих сторон:  $6/4 = 1,5$  и  $9/6 = 1,5$ . Оба значения одинаковы, значит, стороны пропорциональны, а нужный для признака угол уже равен.

## Делаем вывод

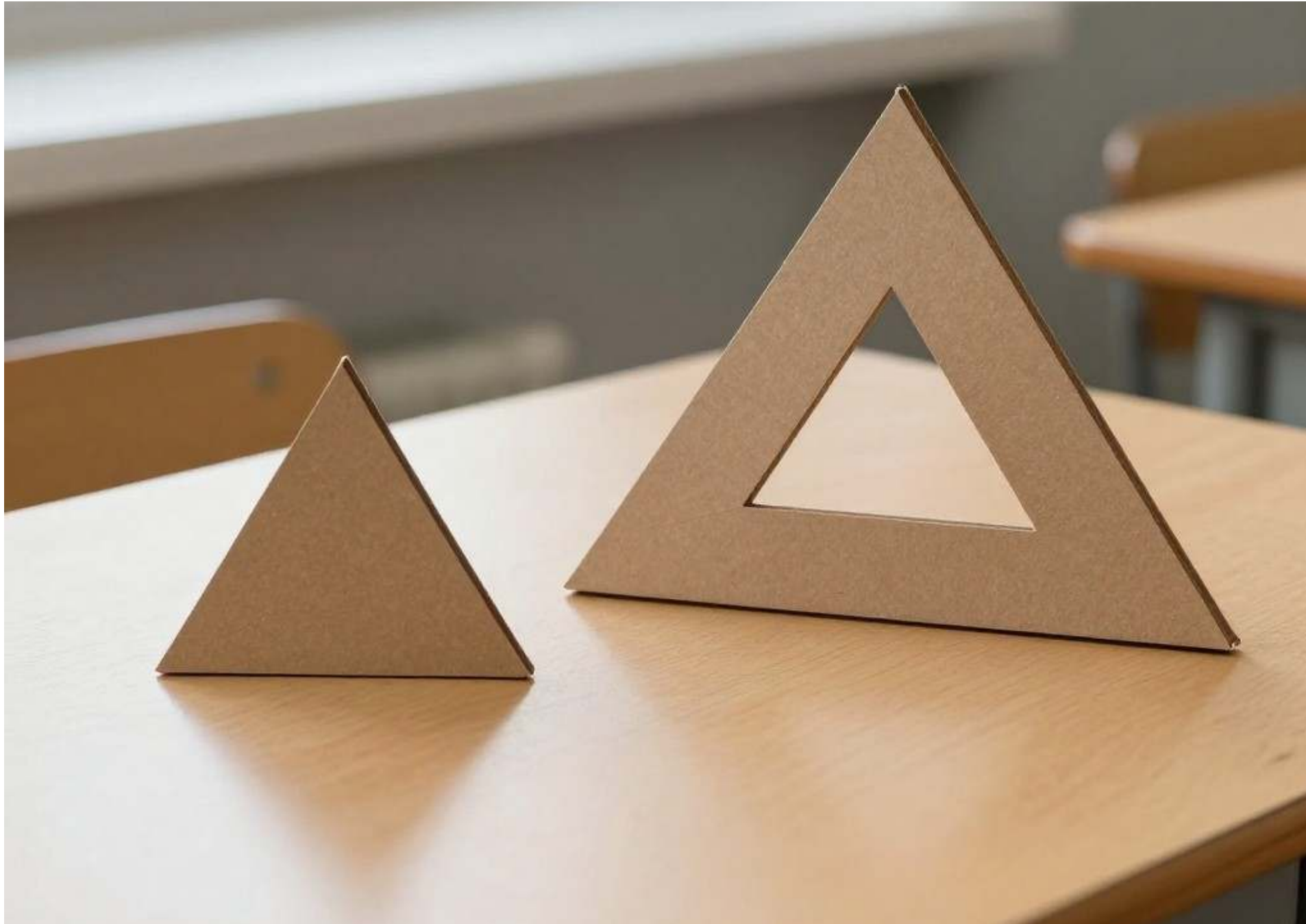
Так как выполнены оба условия второго признака, треугольники подобны. Запись решения заканчивается знаком подобия, а коэффициент подобия равен 1,5, потому что первый треугольник больше второго.

## Что отмечаем на рисунке

На чертеже удобно выделить равный угол и две пары соответствующих сторон. Такое оформление помогает сразу увидеть, почему именно второй признак подходит для доказательства подобия в этой задаче.



# Пример применения третьего признака



**1**

## Сопоставляем стороны

У первого треугольника стороны равны 5 см, 7 см и 9 см, а у второго — 10 см, 14 см и 18 см. Сразу видно, что можно составить три пары соответствующих сторон.

---

**2**

## Проверяем пропорции

Находим отношения:  $5/10 = \frac{1}{2}$ ,  $7/14 = \frac{1}{2}$  и  $9/18 = \frac{1}{2}$ . Все три дроби равны, значит, стороны каждого треугольника изменяются в одном и том же отношении.

---

**3**

## Формулируем вывод

По третьему признаку треугольники подобны, а коэффициент подобия равен  $\frac{1}{2}$ . Это означает, что второй треугольник в два раза больше первого, если сравнивать соответствующие стороны.

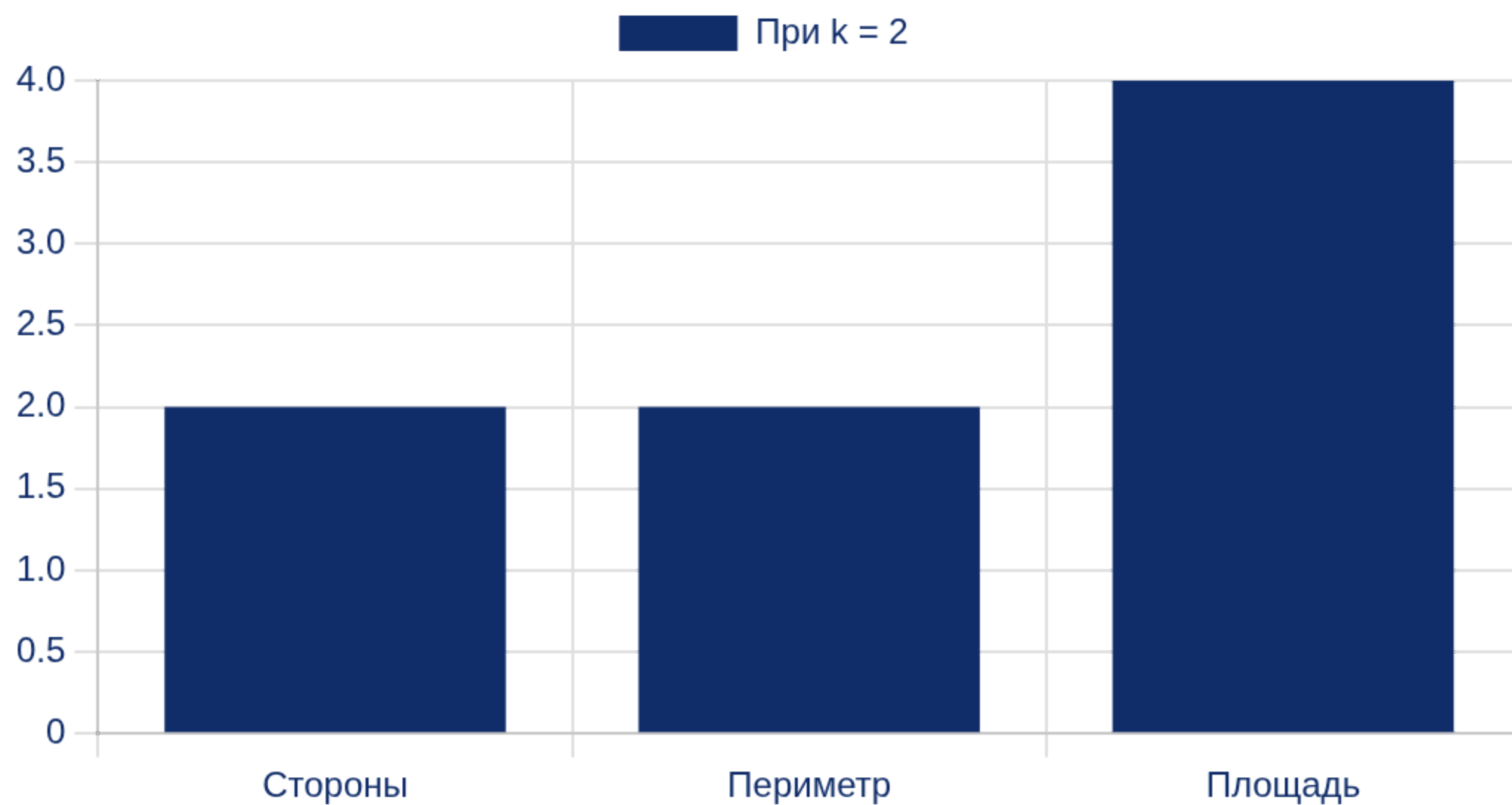
# Что можно найти после доказательства подобия

| Величина | Как меняется | Что находим        |
|----------|--------------|--------------------|
| Стороны  | в $k$ раз    | неизвестную длину  |
| Периметр | в $k$ раз    | общую сумму сторон |
| Площадь  | в $k^2$ раз  | площадь фигуры     |

После установления подобия удобно переходить к вычислениям через коэффициент.

Подобие превращает сложную задачу в работу с пропорциями. После доказательства можно быстро находить длины, периметр и площадь без прямых измерений.

# Как меняются величины у подобных треугольников



При одном и том же коэффициенте подобия стороны и периметр меняются одинаково, а площадь растёт быстрее. Это особенно заметно при увеличении фигур на чертежах.

Если линейный размер увеличился в 2 раза, то площадь выросла в 4 раза. Поэтому крупные подобные фигуры занимают намного больше места, чем кажется сначала.

# Главное о втором и третьем признаках подобия

Второй признак помогает, когда известны две стороны и угол между ними, а третий — когда даны все три стороны. Оба признака позволяют уверенно доказывать подобие и решать задачи через пропорции.