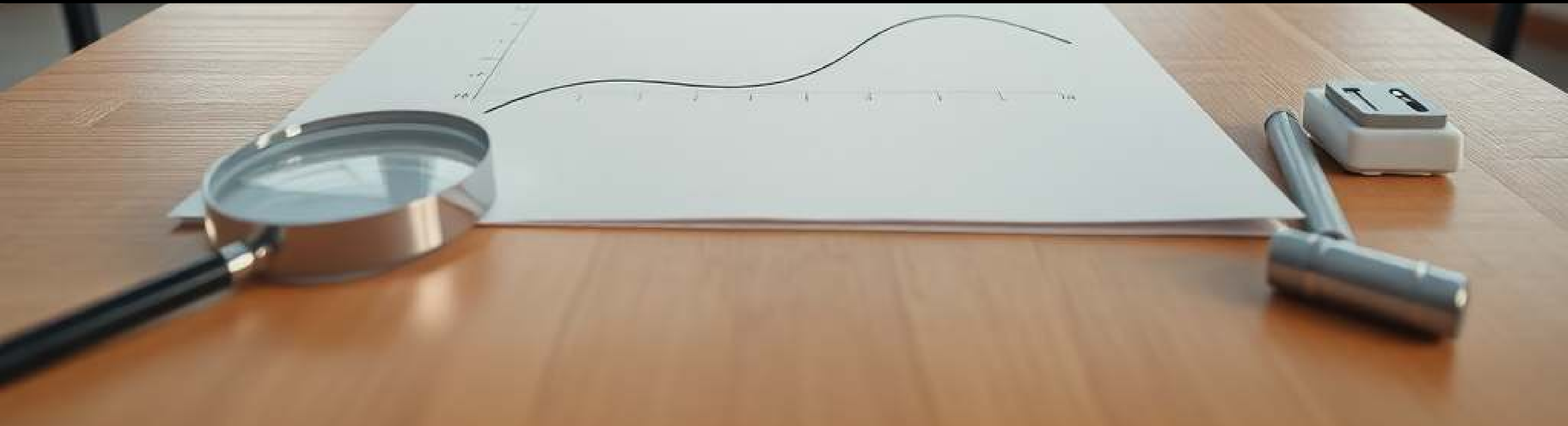


Правила нахождения первообразных: основные формулы и способы проверки

Как восстановить функцию по её производной и не ошибиться в ответе?



Первообразные в школьной алгебре

Эта тема логично продолжает производную: сначала учатся находить изменение функции, затем — восстанавливать её по этому изменению. В задачах чаще всего встречаются многочлены, тригонометрические, показательная функция e^x и дробь $1/x$.



Определение первообразной

1. Связь с производной

Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке, если производная $F'(x)$ совпадает с $f(x)$. Это означает, что $F(x)$ «порождает» исходную функцию при дифференцировании.

2. Постоянная добавка

Если $F(x)$ — первообразная, то $F(x)+C$ тоже подходит, потому что производная любой постоянной равна нулю. Поэтому один и тот же закон изменения задаёт целое семейство функций.

3. Один класс решений

Все первообразные одной функции отличаются только на постоянную. Это объясняет запись ответа с $+C$: без неё невозможно указать единственный вариант, ведь исходная функция восстанавливается не вполне однозначно.

0

**показывает, что
у разности двух
первообразных нулевая
производная**

Если производные совпадают, то сами функции могут различаться лишь на постоянную. Именно поэтому в ответах обязательно появляется $+C$.

Следствие из определения первообразной и свойства производной постоянной функции

Основные правила нахождения первообразных

Три школьных правила позволяют разбирать выражение на более простые части и применять готовые формулы.

Сложные выражения удобнее сначала разложить на простые слагаемые, а затем применять готовые первообразные по отдельности.

Правило	Смысл	Пример
Линейность	Сумма по частям	$f+g$
Множитель	k выносится	$k \cdot F$
Разложение	Сначала упростить	$a+b$

Школьные правила неопределённого интеграла

Правило линейности

1.

Сумма функций

Если $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$, то для выражения $f(x)+g(x)$ первообразной будет $F(x)+G(x)$. Это позволяет работать с каждым слагаемым отдельно, не усложняя вычисления.

2.

Коэффициенты сохраняются

Для выражения $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ первообразной является $a \cdot F(x) + b \cdot G(x)$. Числовые множители не мешают применению правила, а просто переходят в ответ вместе с соответствующими первообразными.

3.

Удобство для многочленов

Линейность особенно полезна для многочленов и сумм элементарных функций. Она позволяет последовательно интегрировать каждое слагаемое, сохраняя структуру выражения и уменьшая риск вычислительной ошибки.

4.

Поэлементный подход

Когда выражение содержит несколько разных частей, не нужно искать «одну большую формулу». Гораздо надёжнее разделить его на простые элементы и обработать каждый по знакомому правилу.

Первообразная степенной функции

1. Основная формула

Для x^n при $n \neq -1$ первообразная имеет вид $x^{(n+1)/(n+1)} + C$. Степень увеличивается на единицу, а затем результат делится на новый показатель.

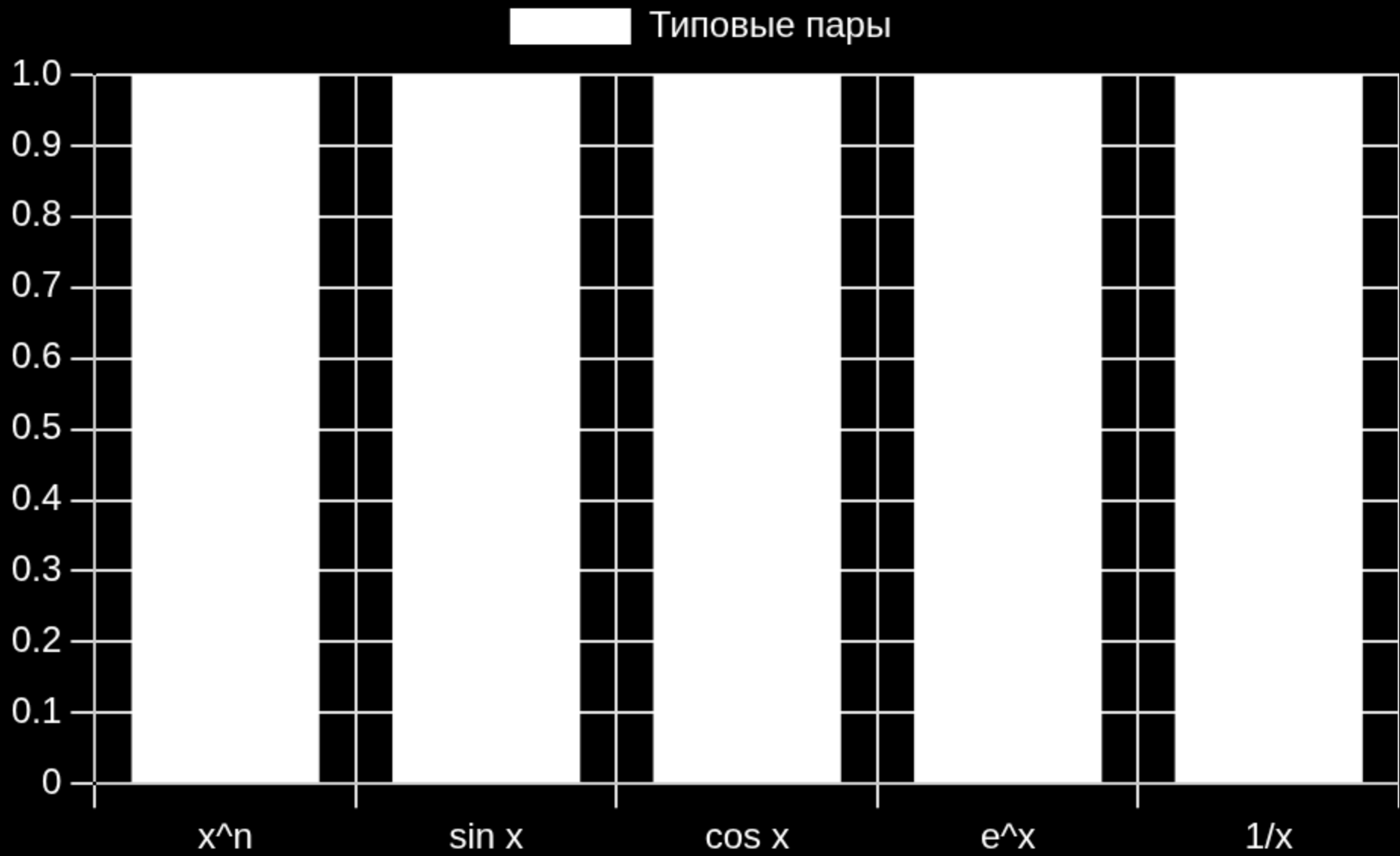
2. Примеры вычислений

Из этой формулы сразу получаются ответы: для x^2 — $x^3/3 + C$, для x^5 — $x^6/6 + C$, для x^7 — $x^8/8 + C$. Важно аккуратно отслеживать каждую новую степень.

3. Особый случай

Функция x^{-1} не подчиняется обычному степенному правилу. Её первообразная выражается через логарифм: $\ln|x| + C$. Этот случай надо запомнить отдельно, чтобы не применять формулу механически.

Сравнение типовых первообразных элементарных функций



На диаграмме удобно видеть, какие формулы почти не меняются, а где критичны знак и наличие логарифма.

Главные трудности школьников связаны с тригонометрическими знаками и особым случаем $1/x$, который требует логарифма.

Базовые табличные формулы производных и первообразных, школьный курс алгебры

Табличные первообразные элементарных функций

Синус

Первообразная для $\sin x$ равна $-\cos x + C$. Знак минус обязателен: при дифференцировании косинус снова даёт синус, поэтому формулу нужно запомнить именно в таком виде.

Косинус

Для $\cos x$ первообразная имеет вид $\sin x + C$. Здесь знак остаётся положительным, и именно эта пара чаще всего используется в простых задачах на проверку производной.

Показательная функция

Первообразная для e^x совпадает с самой функцией: $e^x + C$. Это одна из самых удобных формул, потому что при дифференцировании экспонента не меняется.

Обратная функция

Для $1/x$ первообразная равна $\ln|x| + C$. Модуль необходим, потому что исходная функция определена на двух промежутках: при положительных и при отрицательных значениях x .

Проверка по производной

Если результат дифференцировать, он должен вернуть исходное выражение без лишних коэффициентов и со всеми правильными знаками. Именно так удобно контролировать табличные формулы.

Геометрический смысл: накопление и площадь

Идея накопления

Первообразная показывает, как накапливается величина, если известна скорость её изменения. Это делает формулу не абстрактной записью, а описанием процесса во времени или на промежутке.

Связь с площадью

Геометрически первообразную связывают с площадью под графиком функции. Чем больше значение функции на участке, тем сильнее меняется соответствующая первообразная.

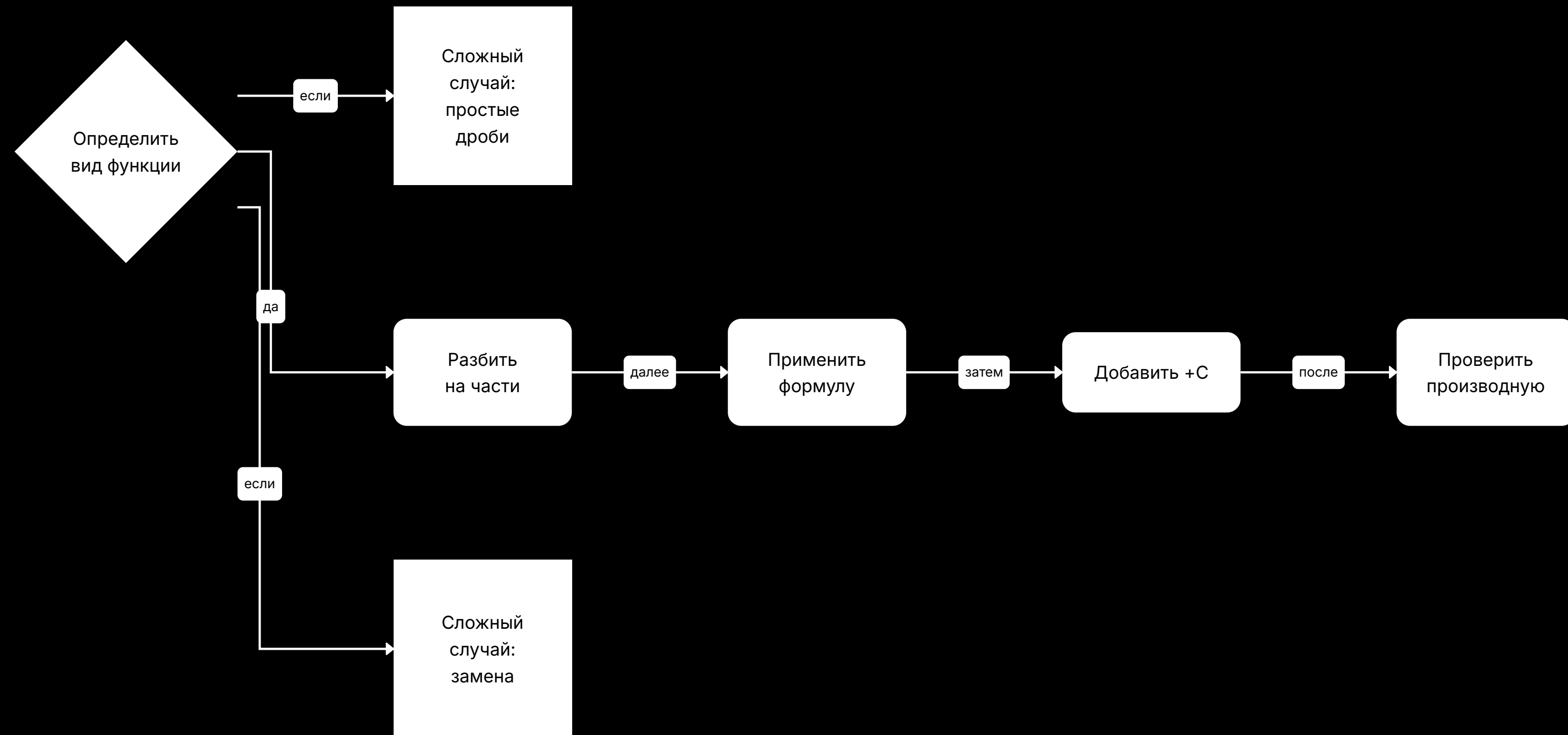
Семейство графиков

Графики $F(x)+C$ имеют одинаковую форму, но сдвинуты по вертикали. Такое сравнение помогает увидеть, что постоянная меняет положение графика, но не его общий вид.



Алгоритм нахождения первообразной в школьной задаче

Последовательность действий от распознавания вида функции до проверки результата дифференцированием



Замена переменной в простых случаях



Ищем внутреннюю функцию

Замена особенно полезна, когда в выражении легко заметить повторяющуюся внутреннюю часть и рядом с ней — её производную или близкий к ней множитель.



Переходим к новой переменной

Ввод переменной упрощает запись: сложное выражение заменяется более коротким, а исходный интеграл превращается в знакомую форму, удобную для вычисления.



Сводим к простому виду

После замены интеграл часто становится степенным или табличным. Это уменьшает число преобразований и помогает избежать лишних алгебраических ошибок при решении.



Возвращаемся к x

После нахождения первообразной по переменной и результат обязательно выражают через x . Именно на этом шаге важно не потерять коэффициенты и степень.

Первообразные рациональных выражений

1.

Разложение на дроби

Рациональные выражения удобно преобразовывать в сумму более простых дробей. Тогда каждое слагаемое можно интегрировать отдельно, используя знакомые формулы школьного уровня.

2.

Линейные знаменатели

Для выражений вроде $1/(x^2-1)$ полезно разложение на дроби с линейными знаменателями. После этого задача сводится к сумме логарифмических первообразных.

3.

Формула с арктангенсом

Если в знаменателе стоит x^2+a^2 , появляется стандартная первообразная, связанная с арктангенсом. Такой вид часто требует узнавания шаблона, а не прямого вычисления.

4.

Алгебра перед интегрированием

Не все рациональные выражения берутся сразу по таблице. Иногда сначала нужно выполнить преобразование, сократить дробь или разложить выражение на более удобные слагаемые.

Типичные ошибки при нахождении первообразных

Неверный знак

Чаще всего путают знаки в первообразных для $\sin x$ и $\cos x$. Такая ошибка меняет весь результат, поэтому её особенно важно сразу проверять производной.

Потеря постоянной

Запись без $+C$ считается неполной, потому что семейство первообразных отличается именно на постоянную. В школьных ответах этот элемент всегда должен присутствовать.

Неправильная формула

Формулу для x^n иногда ошибочно применяют к случаю x^{-1} . Для этой функции нужно помнить отдельный ответ через логарифм с модулем.

Ошибка в логарифме

В записи $\ln|x|$ ученики нередко забывают модуль. Это приводит к неверной области определения и к неточному математическому ответу.

Сбой после преобразований

После замены переменной, раскрытия скобок или переноса коэффициентов легко потерять множитель. Поэтому полезно сразу делать короткую проверку производной.

Основные виды ошибок в решении задач на первообразные

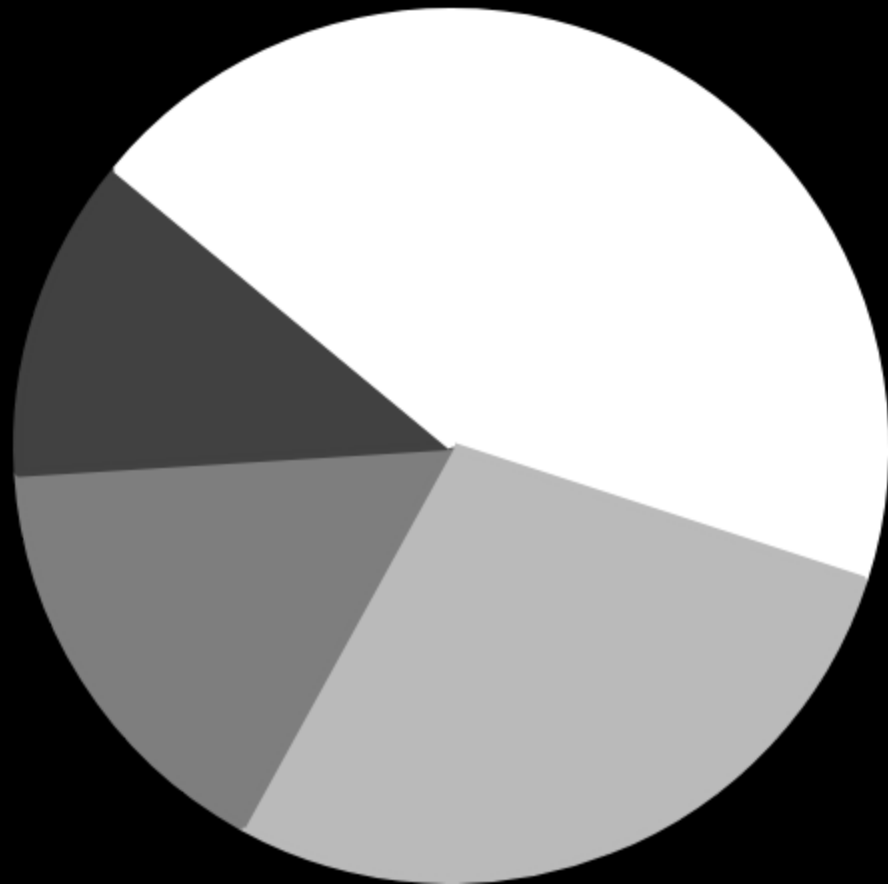
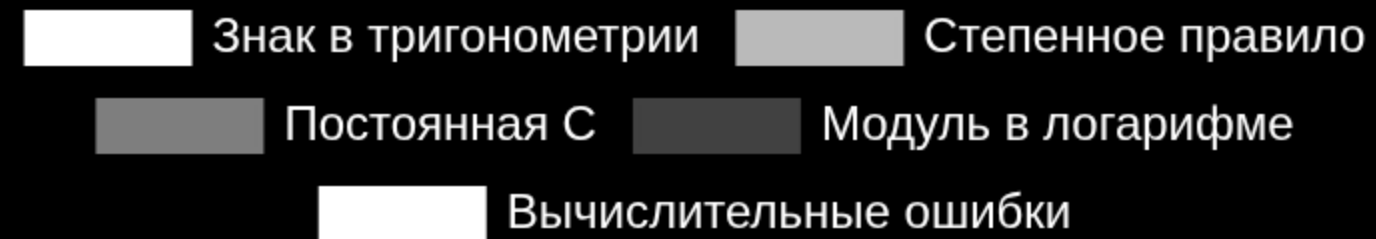


Диаграмма помогает увидеть, какие ошибки встречаются чаще всего при решении школьных примеров и на каких формулах стоит сосредоточиться при повторении.

Наибольшее внимание требуют знаки и степенное правило: именно они дают основную часть неточностей и чаще всего искажают итоговый ответ.

Учебная классификация типичных ошибок по теме «Первообразная»

Минимальный набор формул для 10 класса

$f(x)$	$F(x)+C$
1	x
x	$x^2/2$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/x$	$\ln x $

Школьный курс алгебры, тема «Первообразные»

Таблица собирает основные соответствия между функцией и её первообразной, которые чаще всего нужны в школьных задачах.

Этот набор закрывает большинство стандартных примеров; отдельно нужно помнить правило линейности для суммы и постоянного множителя.

Проверка найденной первообразной

1. Дифференцирование результата

Самый надёжный способ контроля — взять производную полученной функции и сравнить её с исходным выражением. Совпадение означает, что первообразная найдена верно.

2. Особое внимание к преобразованиям

Проверка особенно важна после замены переменной, упрощения дробей и работы с несколькими слагаемыми. Именно там чаще всего теряются коэффициенты или меняются знаки.

3. Быстрое выявление ошибок

Если производная не совпадает с исходной функцией, сразу видно, где искать неточность: в формуле, в вычислениях или в алгебраических преобразованиях.

Связь с физикой и прикладными задачами

Путь по скорости

Если известна скорость движения, первообразная позволяет восстановить путь за выбранный промежуток времени. Поэтому тема напрямую связана с накоплением изменения.

Заряд и ток

В электротехнике первообразные помогают переходить от силы тока к накопленному заряду. Здесь снова работает идея восстановления величины по её изменению.

Плотность и масса

В задачах с распределением плотности первообразная описывает суммарную величину на участке. Это показывает, что математический приём имеет понятный практический смысл.



Итоговый набор правил для решения школьных задач

1.

Знать таблицу

В первую очередь нужно уверенно помнить базовые первообразные: степенную функцию, экспоненту, тригонометрические выражения и логарифмический случай для $1/x$.

2.

Применять линейность

Если выражение состоит из суммы или содержит постоянный множитель, его удобно разбирать по частям. Это экономит время и упрощает вычисления.

3.

Использовать дополнительные приёмы

Для более сложных примеров пригодятся замена переменной и разложение рациональных выражений на простые дроби. Они позволяют свести задачу к известным формам.

4.

Обязательно проверять

После нахождения ответа нужно проверить производную, а также следить за записью $+C$, знаками и модулем в логарифме. Эта привычка резко снижает число ошибок.

Первообразная: ключ к восстановлению функции

Первообразная показывает, как по производной восстановить исходную функцию. Табличные формулы, линейность и проверка дифференцированием делают решение задач понятным, а не механическим.