

Пропорциональные отрезки: связь длин, масштаба и подобия

Пропорции связывают длины
одинаковым отношением и помогают
находить неизвестные размеры.

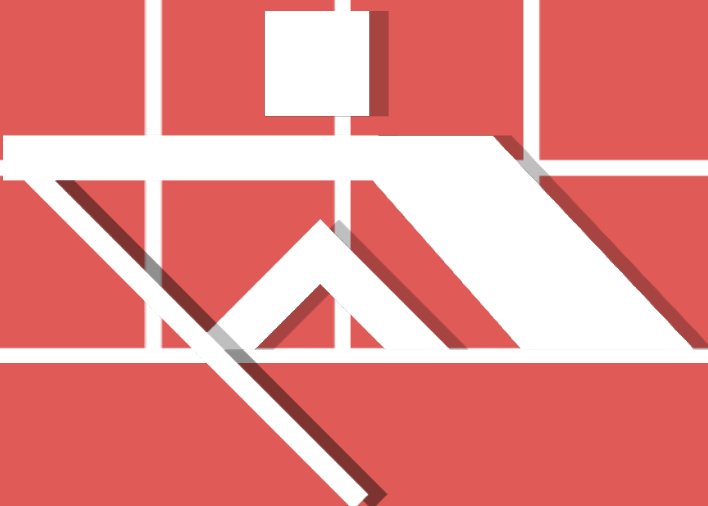


Почему тема важна в курсе геометрии 8 класса

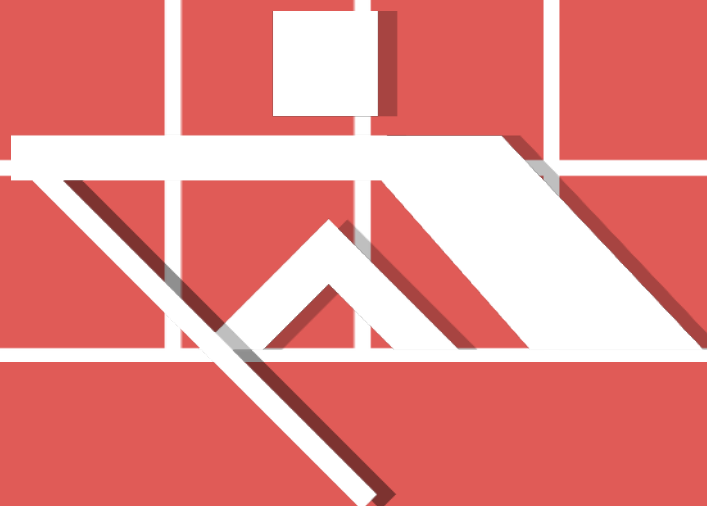
Пропорции лежат в основе подобия и решения многих задач. Часто не нужно измерять всё напрямую — достаточно сравнить отношения длин и применить масштаб, чтобы перейти от одной величины к другой.



Отрезок, длина отрезка и отношение длин



Отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Он задаёт «границу» на линии, а его длина показывает, насколько далеко расположены эти точки друг от друга.

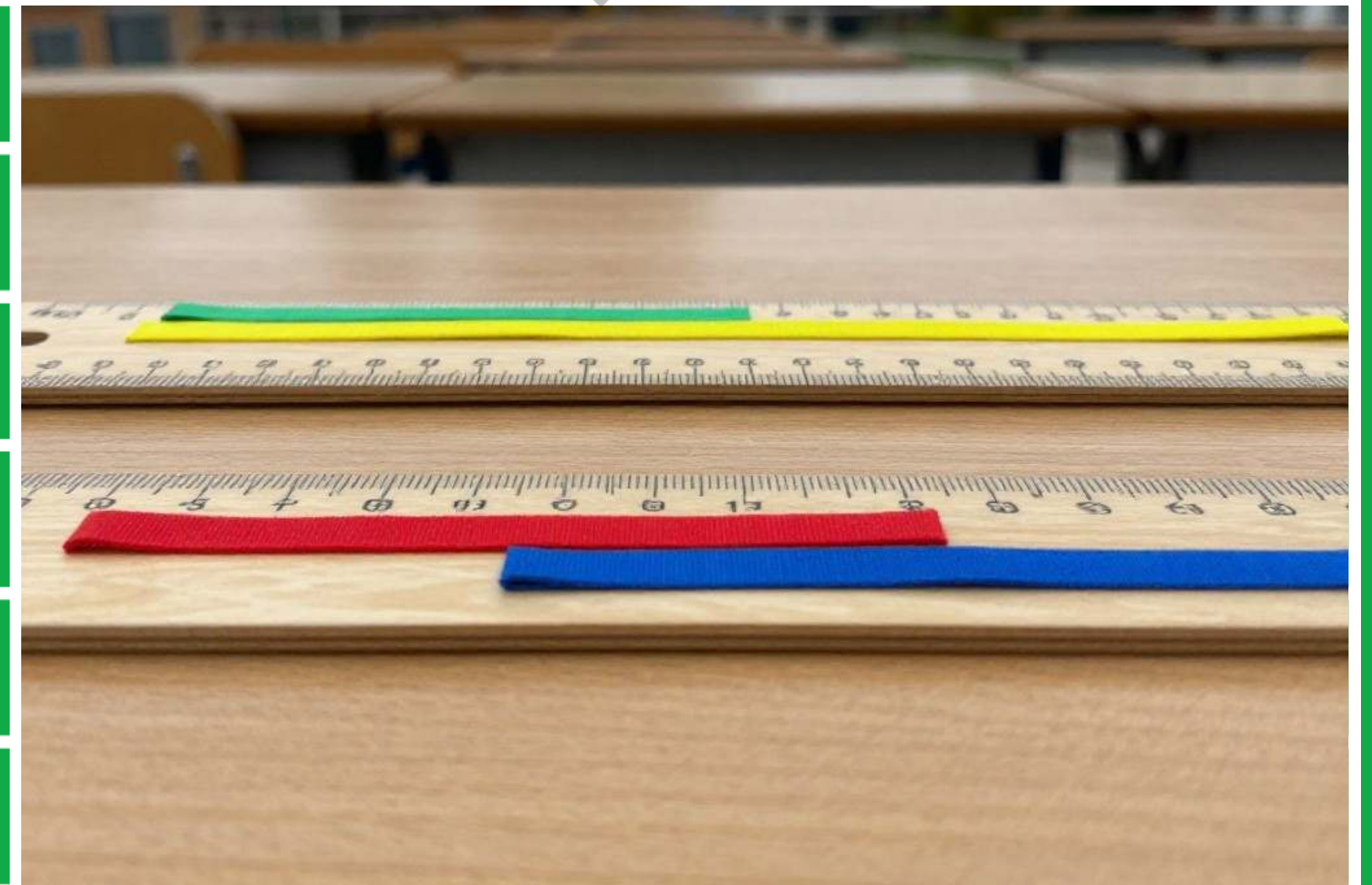


Длину отрезка измеряют в миллиметрах, сантиметрах, метрах и других единицах длины. Важно, чтобы при сравнении использовались одинаковые единицы измерения.

Отношение двух длин показывает, во сколько раз одна величина больше другой. Его записывают как дробь или через двоеточие, например $6:3 = 2:1$.

Что значит, что отрезки пропорциональны

- Два отрезка пропорциональны двум другим, если отношения их длин равны. Например, 3 см и 6 см пропорциональны 5 см и 10 см, потому что $3:6 = 5:10 = 1:2$.
- Эта запись отражает один и тот же коэффициент изменения: если первую пару увеличить (или уменьшить) в одинаковое число раз, вторая пара повторит это изменение.



Примеры отношений длин отрезков



Сравните пары длин: одинаковое отношение соответствует пропорциональности, а разные отношения — отсутствию одной пропорции.

Если отношение совпадает (например, 1:2), пары образуют пропорциональность; если отношение отличается, «общая пропорция» не сохраняется.

Пары длин	Отношение
2 и 4	1:2
3 и 9	1:3
5 и 10	1:2
8 и 12	2:3
7 и 14	1:2

Учебный набор примеров к теме «пропорциональные отрезки».

Как проверить пропорциональность

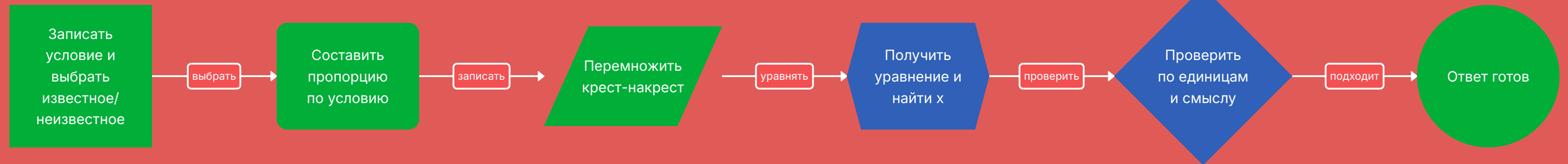
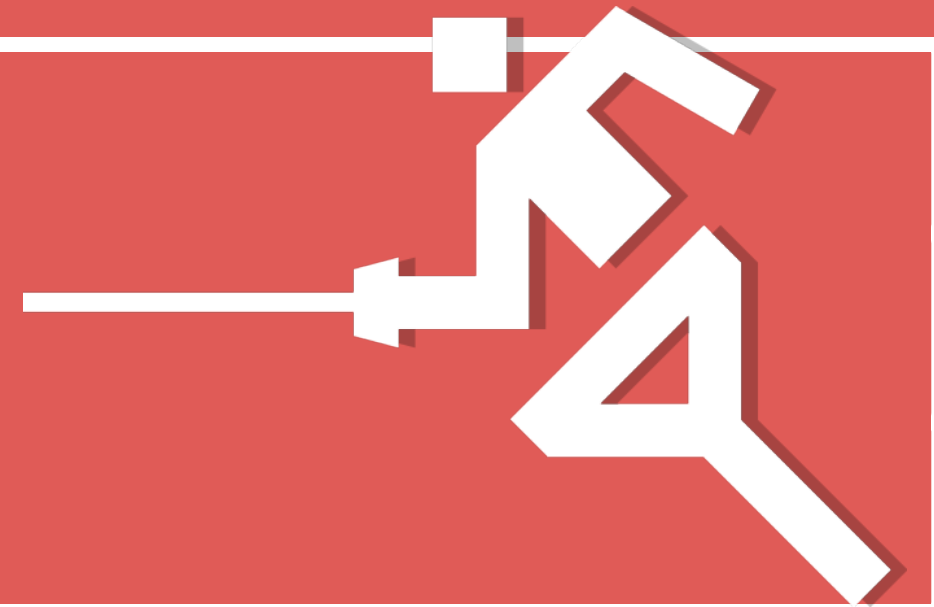
Проверять пропорциональность можно через равенство отношений: если $a:b = c:d$, значит обе пары связаны одним и тем же правилом изменения длины.

А можно использовать умножение крест-накрест. Для $a:b = c:d$ должно выполняться равенство $a \cdot d = b \cdot c$.

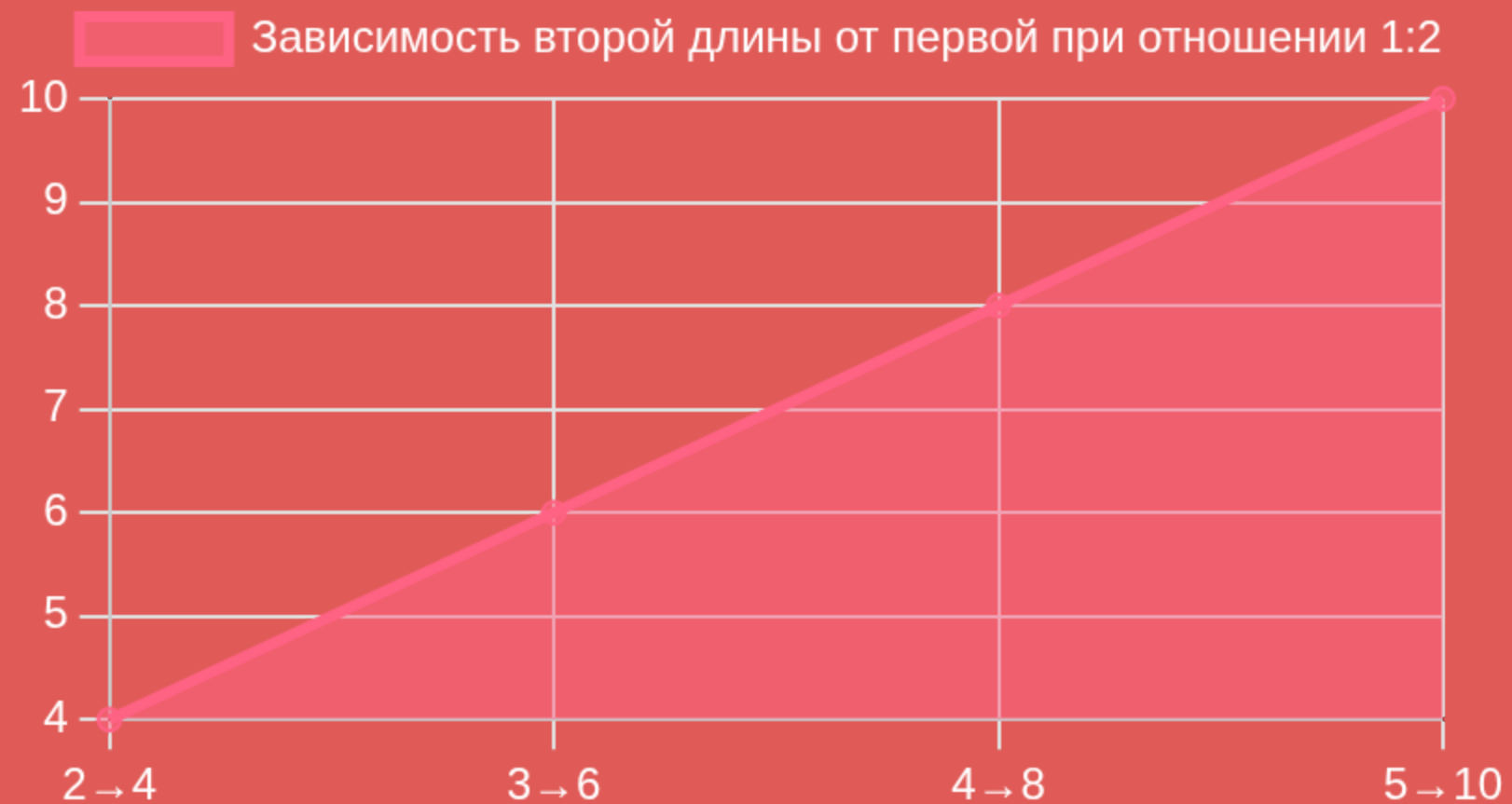
Например, при $3:6 = 5:10$ получаем $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$, то есть $30 = 30$. Если произведения не равны, пропорции нет.

Алгоритм нахождения неизвестного отрезка

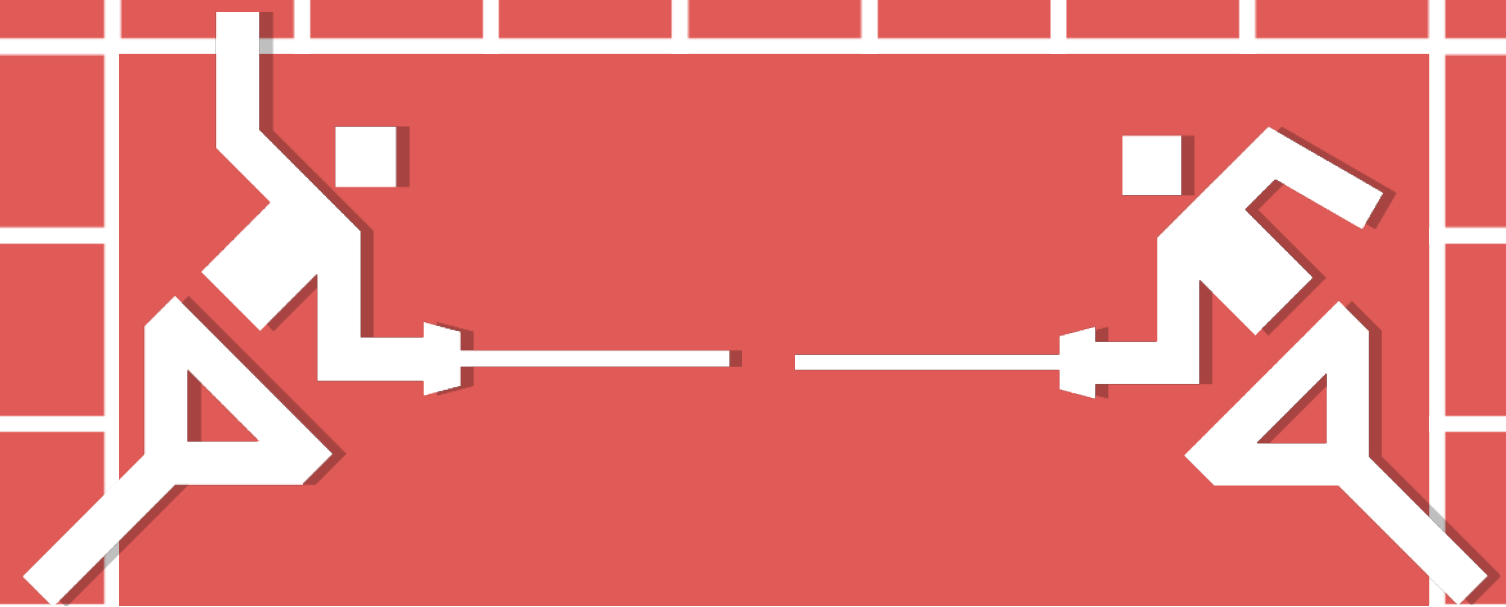
Применяется в задачах на масштаб и сравнение длин через пропорцию.



Как изменяются длины при постоянном отношении



Составлено по значениям пар 2–4, 3–6, 4–8, 5–10 из условия примера.



При постоянном отношении в паре первая и вторая длины меняются одинаковым «правилом»: во сколько раз выросло одно, во столько же выросло другое. Точки ложатся на одну закономерность: коэффициент пропорциональности не меняется. Поэтому по одной паре можно достраивать другие значения без измерений.

Такая пропорция связывает изображение и действительность: любые измерения на плане переводятся в реальные длины по одному и тому же правилу.

1:1000

Это значит, что на чертеже реальный размер больше в 1000 раз.

Образовательный пример по теме масштаба (1 см и реальная длина).

Подобные фигуры и пропорциональные стороны

Макет города: один масштаб для всех деталей

Представьте уменьшенную модель района: дороги, здания и расстояния выглядят одинаково «по форме». При уменьшении в одно и то же число раз все линейные размеры сохраняют пропорции. Поэтому углы остаются равными, а стороны меняются по общему коэффициенту.



Два похожих треугольника на чертеже

На листе могут быть два треугольника разных размеров, но с одинаковой формой. У соответствующих углов значения одинаковы, а соответствующие стороны относятся между собой одним числом. Если увеличить один треугольник в 3 раза, то и все его линейные стороны увеличатся в 3 раза.



Сравнение сторон подобных треугольников



Сторона 1	Сторона 2	Отношение
4 см	8 см	1:2
6 см	12 см	1:2
8 см	16 см	1:2

Рассмотрим два треугольника: у первого стороны 4 см, 6 см, 8 см; у второго — 8 см, 12 см, 16 см. Если отношения соответствующих сторон одинаковы (например, 1:2), то треугольники подобны: сохраняется форма, меняется только размер.

Одинаковый коэффициент подобия (1:2) доказывает пропорциональность сторон и подтверждает подобие треугольников.

Учебное представление о подобных треугольниках (сохранение отношений соответствующих сторон).

Типичные ошибки при работе с пропорциями



Сравнивают числа с разными единицами

Сравнение пропорций ломается, когда длины даны в разных единицах (например, см и мм) и не приведены к одному формату. Сначала переведите все величины, затем записывайте отношения.



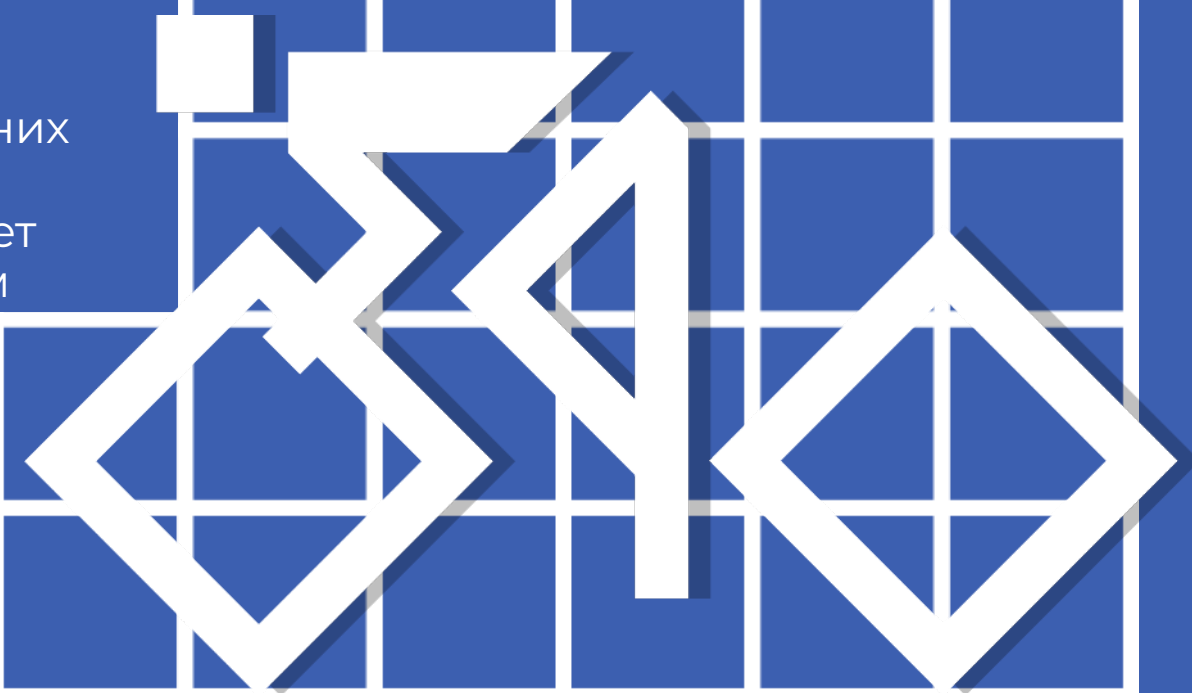
Путают отношения и арифметику

Иногда пытаются «проверить» пропорцию сложением или вычитанием длин. Но пропорция проверяется равенством отношений: нельзя получить правильную связь через сумму, если сохраняется другой коэффициент.



Неправильно проверяют равенство

Ошибка — проверять равенство вида $3+6 = 5+10$. Правильный способ: сравнить отношения (или произведения крайних и средних членов), тогда равенство будет согласовано с самим определением пропорции.

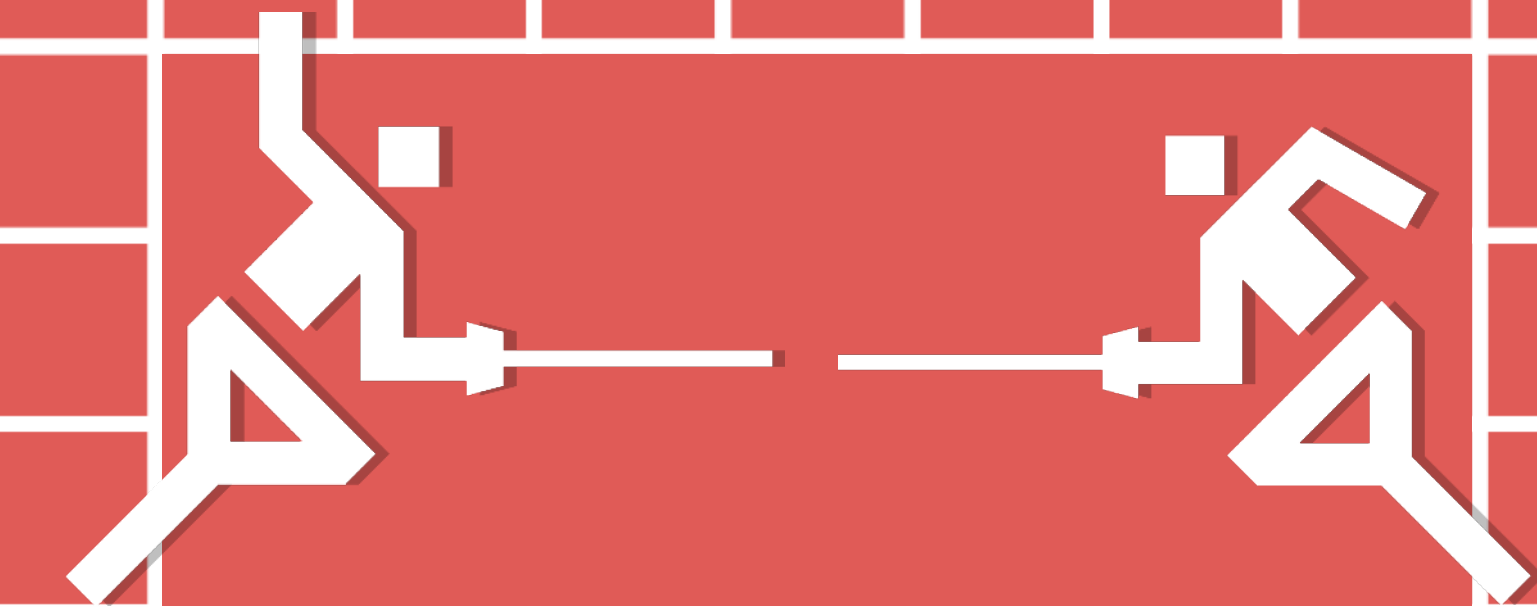


Где используются пропорции в жизни

- Карты и планы
- Строительство
- Кулинария
- Моделирование
- Чертёж и дизайн
- Учебные задания



Обобщение учебных примеров по теме «масштаб и подобие»; точные доли по сферам не заданы (показаны как перечень областей).



Чаще всего пропорции применяют, когда нужно уменьшить или увеличить размеры, сохранив форму: например, пересчитать чертёж на другой масштаб или подобрать ингредиенты для другого количества порций. Диаграмма показывает, что пропорциональное изменение встречается в разных сферах. Смысл в одном: одинаковое отношение помогает переносить размеры между «изображением» и «реальностью».

В пропорции $4:10 = 6:x$ после умножения крест-накрест получается $x = 15$ см. Это значение подходит для задач на масштаб и сравнение отрезков.

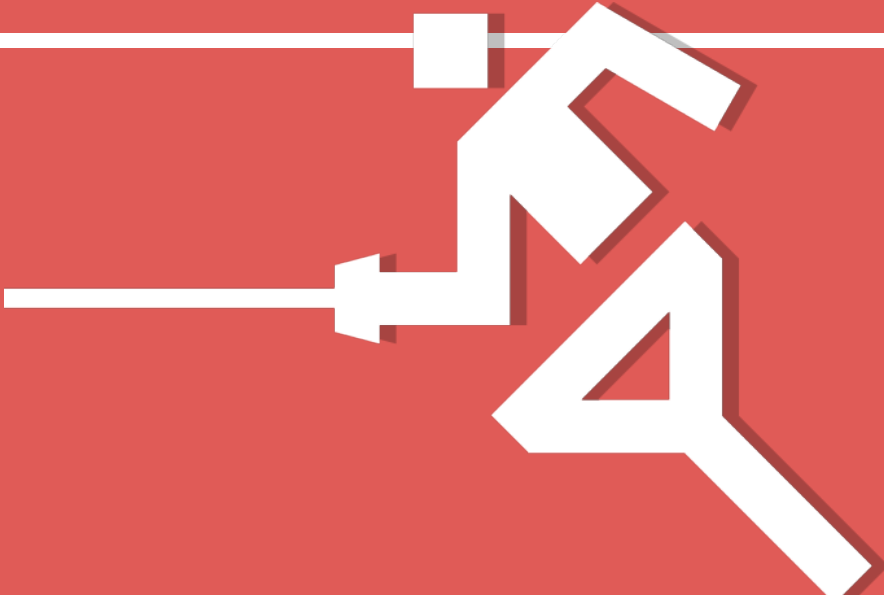
15 см

Значит, искомая длина
равна 15 см.

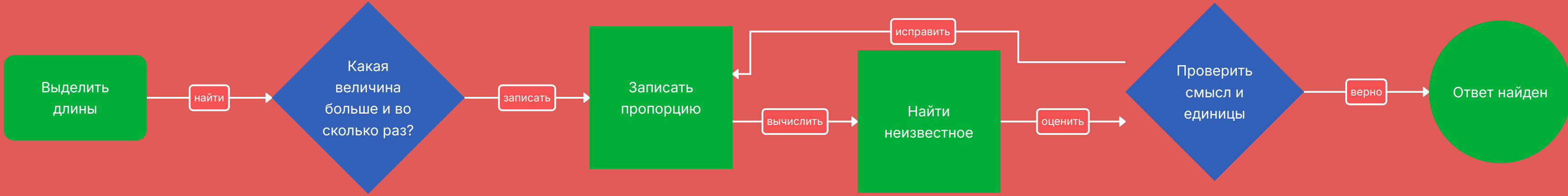
Решение примера из условия: 4 см соответствует 10 см, а 6 см соответствует x .

Как решаются текстовые задачи на пропорциональные отрезки

Порядок действий для задач 8 класса: от выделения величин к проверке ответа.



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Чертежи, модели и реальные объекты

- 1 Архитектурные чертежи, макеты зданий, модели автомобилей и планы помещений строятся с сохранением пропорций. Уменьшенная модель сохраняет форму объекта, только все линейные размеры становятся меньше в одинаковое число раз.
- 2 Такая «привязка» помогает рассчитать реальные размеры по масштабу. На макете видно, что элементы не меняют расположение относительно друг друга: их размеры связаны единым коэффициентом уменьшения.



Краткая памятка по пропорциям

Если $a:b = c:d$, то выполняется равенство $a \cdot d = b \cdot c$. Это удобная проверка: достаточно перемножить крайние и сравнить с произведением средних членов.

Когда известны три числа в пропорции, четвёртое находят делением произведения крайних членов на известный средний член. Такой подход быстро превращает пропорцию в вычисление по формуле.

Формула и вычисления работают только при корректной записи пропорции: соответствующие части должны относиться друг к другу. Если перепутать порядок, получится неверное уравнение даже при правильных умножениях.

Обязательно следите за единицами измерения: они должны быть одинаковыми во всех сравниваемых величинах. Тогда найденная длина будет выражена в нужных единицах и по смыслу задачи окажется подходящей.

Мини-практика: проверить пропорциональность



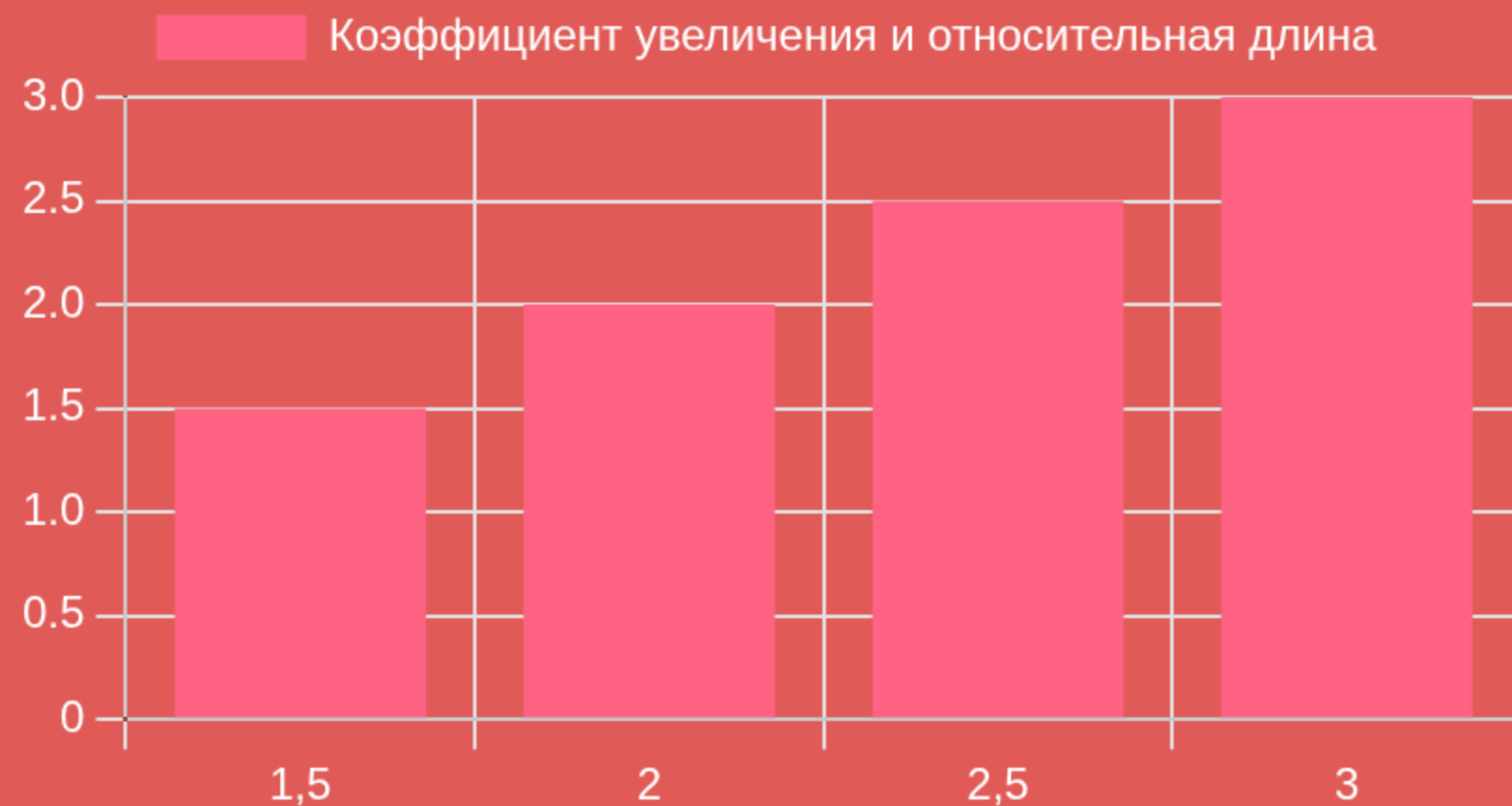
Сравните пары чисел и найдите, какие из них дают одинаковое отношение. В первой тройке отношение одинаковое, а в четвёртой паре оно другое — значит, общая пропорция нарушается.

Совпадение отношений подтверждает пропорциональность. Разное отношение у последней пары означает, что она не входит в одну и ту же группу пропорциональных значений.

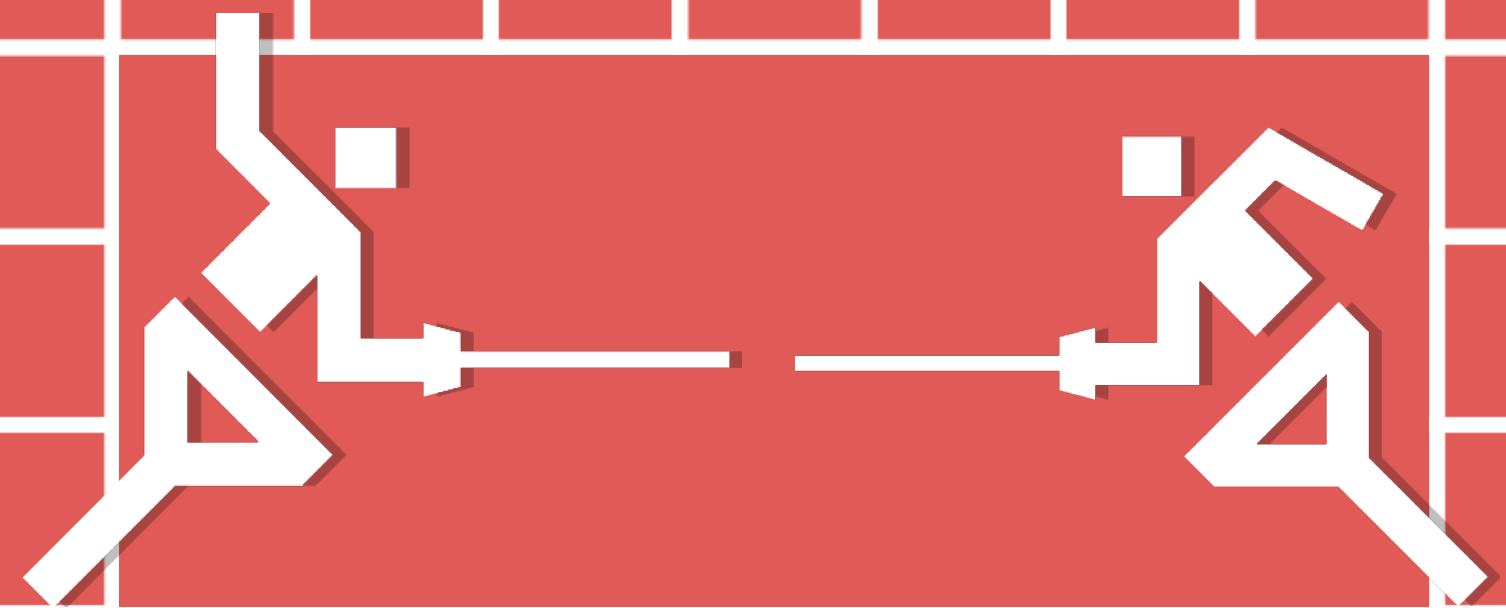
Пара	Отношение	Пропорциональна?
2 и 8	1:4	Да
3 и 12	1:4	Да
5 и 20	1:4	Да
7 и 21	1:3	Нет

Собственные вычисления отношения для каждой пары (a:b).

Коэффициент увеличения и длина отрезка



Наглядная модель по определению коэффициента пропорциональности; исходные данные заданы в условии слайда (1,5; 2; 2,5; 3).



Для наглядности считаем, что исходная длина равна 1. Тогда при коэффициенте 2 новая длина становится 2, при 3 — 3.

Чем больше коэффициент, тем больше полученная длина. При этом внутри каждой пары сохраняется одно и то же правило изменения — это и есть суть пропорциональности.

Главное о пропорциональны х отрезках

Пропорциональные отрезки имеют равные отношения длин и помогают находить неизвестные размеры в геометрических задачах. Умение записывать пропорцию, проверять равенство отношений и учитывать единицы ускоряет и делает решение точнее.

