

Геометрическая прогрессия: последовательность с постоянным умножением

Числа растут и уменьшаются по одному правилу.



Зачем нужна геометрическая прогрессия в 9 классе

Эта тема показывает, как описывать проценты, накопления и изменения величин. Она развивает умение находить закономерности в последовательностях и применять формулы для любого члена ряда.



Как устроена геометрическая прогрессия

Запись последовательности

Геометрическая прогрессия состоит из членов b_1, b_2, b_3 и далее. Каждый новый элемент связан с предыдущим одинаковым множителем, который задаёт весь порядок чисел.

Правило перехода

Начиная со второго члена, каждый следующий равен предыдущему, умноженному на q : $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q$, $b_4 = b_3 \cdot q$. Именно это отличает её от других последовательностей.

Пример роста

Если $b_1 = 3$ и $q = 2$, получаем ряд 3, 6, 12, 24. Здесь каждое число в два раза больше предыдущего, поэтому значения быстро увеличиваются.

Пример уменьшения

При $b_1 = 16$ и $q = 0,5$ получаем 16, 8, 4, 2. Такое изменение показывает, как один и тот же множитель может постепенно сокращать значения.



Знаменатель q и его смысл

Что показывает q

Знаменатель q говорит, во сколько раз меняется каждый следующий член по сравнению с предыдущим. Если значение q известно, можно восстановить весь ряд.

Рост и убывание

При $q > 1$ последовательность возрастает, потому что каждый член становится больше. Если $0 < q < 1$, значения уменьшаются, но сохраняют одинаковое отношение между соседними членами.

Отрицательное значение

Когда $q < 0$, числа меняют знак через один. Такая особенность делает последовательность чередующейся и помогает увидеть, что умножение всегда идёт на одно и то же число.



Примеры первых членов и знаменателя

В таблице видно, как один знаменатель определяет весь вид последовательности.

Один и тот же множитель q задаёт поведение всей последовательности: рост, убывание или чередование знаков.

b_1	q	Первые 4 члена
2	3	2, 6, 18, 54
81	$1/3$	81, 27, 9, 3
5	-2	5, -10, 20, -40

Составлено по определению геометрической прогрессии и примерам из школьного курса алгебры

Формула n-го члена

1 Главная запись

Общий член геометрической прогрессии находят по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она позволяет сразу вычислить нужный член, не выписывая все предыдущие значения.

2 Почему степень важна

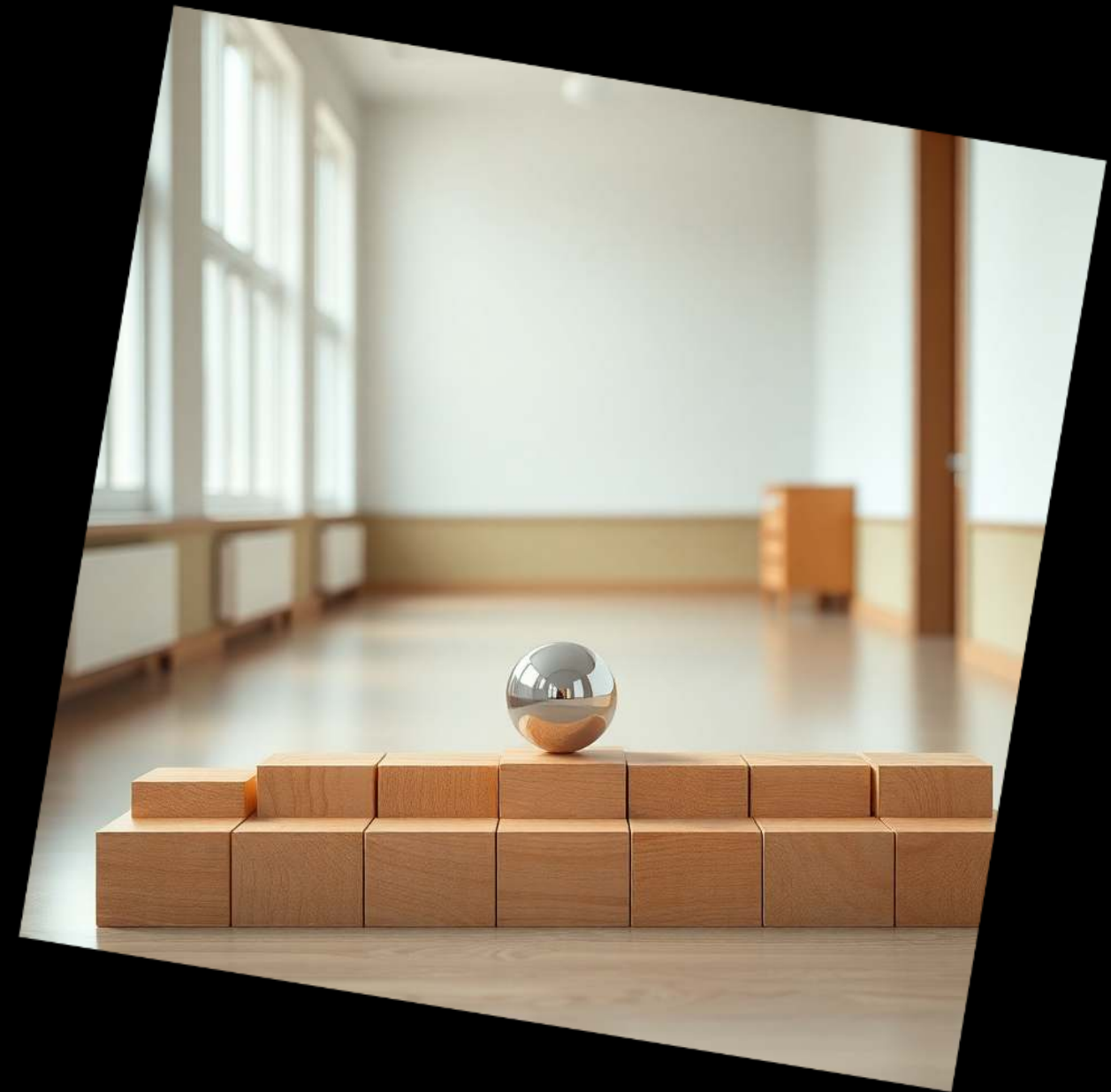
Номер члена входит в показатель степени, поэтому влияние q усиливается с каждым шагом. Чем дальше расположен член, тем заметнее становится рост или уменьшение.

3 Что нужно знать

Для применения формулы достаточно первых данных: b_1 и q . После подстановки остаётся аккуратно посчитать степень и выполнить умножение.

4 Практический смысл

Эта формула часто используется в задачах 9 класса, потому что помогает находить любой член последовательности быстро, точно и без лишних вычислений.

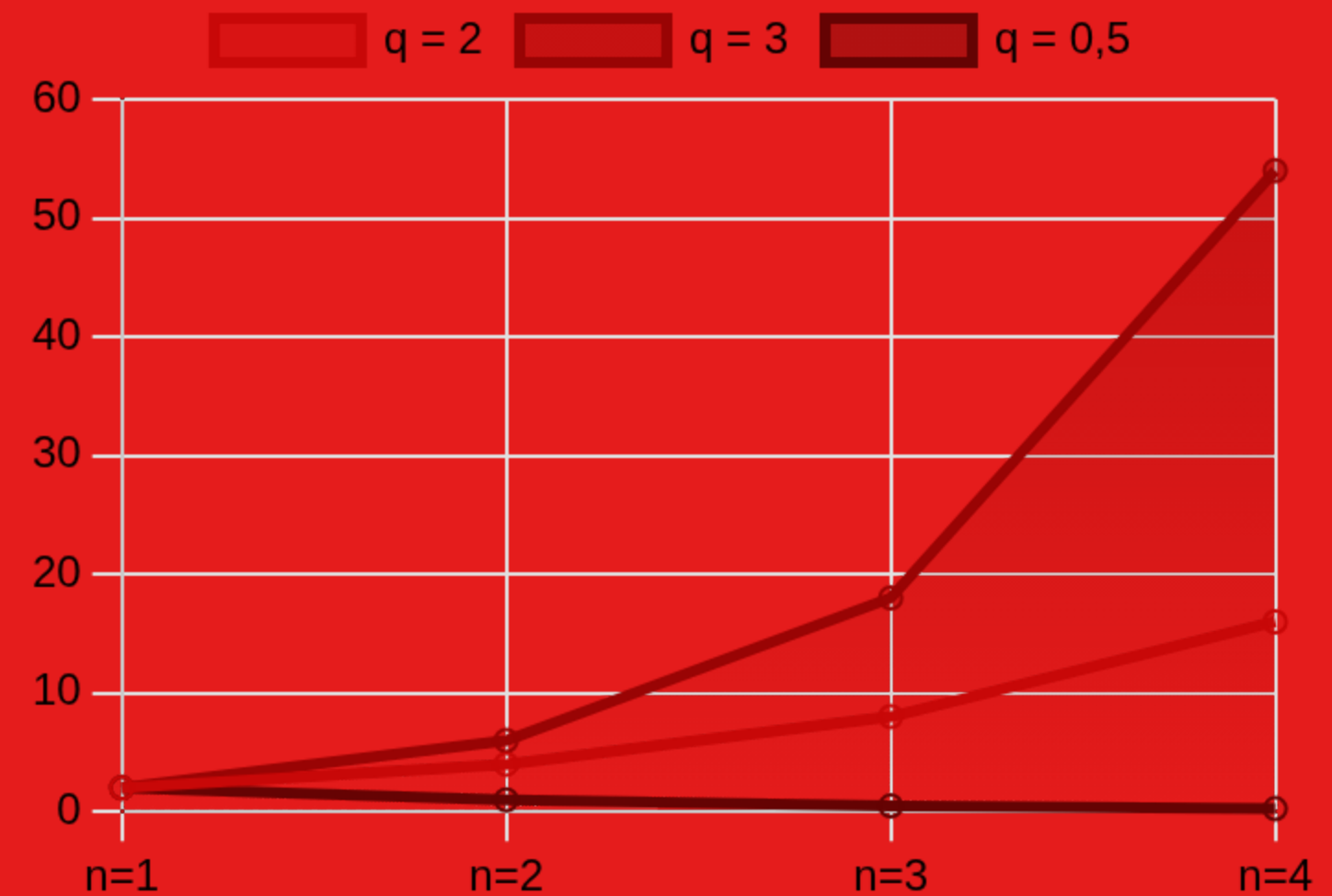


Как меняются значения при разных q

Одинаковый первый член позволяет сравнить только влияние знаменателя. На графике хорошо видно, что темп изменения зависит именно от q .

Чем больше q , тем быстрее растут члены; при q меньше 1 последовательность убывает и быстро приближается к меньшим значениям.

Учебный пример для сравнения геометрических прогрессий с $b_1=2$



Сумма первых n членов

Что обозначает S_n

Сумма первых n членов обозначается S_n . Это удобно, когда нужно узнать общий итог последовательности, а не выписывать и складывать все числа по отдельности.

Формула при $q \neq 1$

Для вычисления используют формулу $S_n = b_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1)$ или $S_n = b_1 \cdot (1 - q^n) / (1 - q)$. Обе записи равны и дают одинаковый результат.

Когда она полезна

Формула особенно помогает в больших последовательностях, где простое сложение занимает много времени. Она экономит шаги и уменьшает риск ошибки в вычислениях.

Связь с другими формулами

В задачах 9 класса формулу суммы часто применяют вместе с формулой n -го члена. Так легче находить и отдельные значения, и итог всей последовательности.



Геометрическая прогрессия в процентах и накоплениях



Вклад, который растёт сам

Если банк начисляет 10% годовых, сумма каждый год умножается на 1,1. Поэтому 1000 рублей превращаются в 1100, а затем в 1210 рублей. Такой рост удобно описывать геометрической прогрессией, потому что каждый шаг повторяет одно и то же правило.



Почему проценты ведут себя как прогрессия

Процент добавляется не к начальному числу, а к уже увеличенной сумме. Из-за этого появляются одинаковые множители, а не одинаковые прибавления. Именно поэтому накопления с процентами часто считают по формулам геометрической прогрессии.

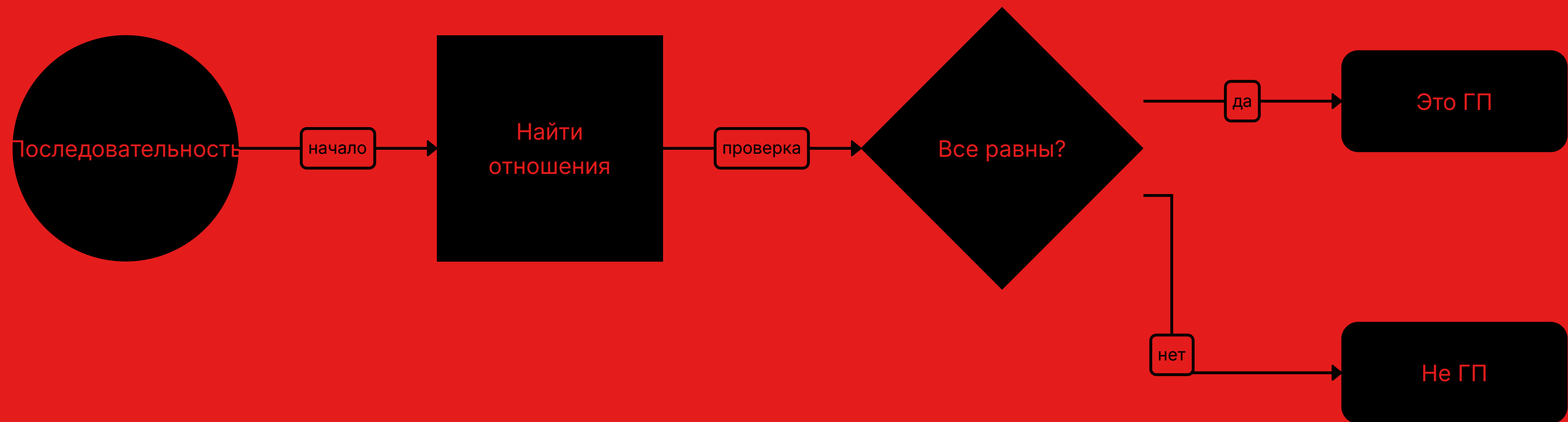


Где это можно увидеть

Похожая модель встречается не только в финансах, но и в задачах о росте значения со временем. На рисунке можно показать монеты или график, который плавно поднимается вверх после каждого нового периода.

Как распознать геометрическую прогрессию

Алгоритм проверки по отношению соседних членов последовательности



Когда геометрическая прогрессия убывает

Условие убывания

Геометрическая прогрессия убывает, когда знаменатель находится между 0 и 1. Тогда каждый следующий член получается меньше предыдущего, потому что число каждый раз уменьшается при умножении.

Простой пример

Если взять 100 и умножать на 0,5, получится ряд 100, 50, 25, 12,5. Здесь хорошо видно, как одно и то же действие постепенно сокращает значения в два раза.

Ещё одна последовательность

При $b_1 = 64$ и $q = 0,5$ получаем 64, 32, 16, 8. Такие примеры помогают быстро заметить закономерность и понять, что прогрессия может не только расти, но и убывать.

Где это встречается

Подобная модель подходит для процессов, где величина уменьшается по шагам: сокращение количества предметов, ослабление яркости или постепенное приближение расстояния к меньшему значению.



Арифметическая и геометрическая прогрессии: сравнение

Таблица показывает главное различие между двумя видами последовательностей: постоянную разность в арифметической прогрессии и постоянный множитель в геометрической.

В арифметической прогрессии изменения идут прибавлением, а в геометрической — умножением. Это позволяет сразу определить тип последовательности по её правилу.

Признак	Арифметическая	Геометрическая
Правило	+ одно число	× одно число
Пример	2, 5, 8, 11	2, 6, 18, 54
Постоянно	разность	знаменатель

Отрицательный знаменатель

Чередование знаков

Если знаменатель отрицательный, каждый следующий член меняет знак. Поэтому в последовательности появляются попеременно положительные и отрицательные числа, хотя правило умножения остаётся одним и тем же.

Пример ряда

При $q = -2$ можно получить ряд 4, -8, 16, -32. Здесь легко увидеть, что модуль членов растёт, а знак каждый раз переходит в противоположный.

Почему это важно

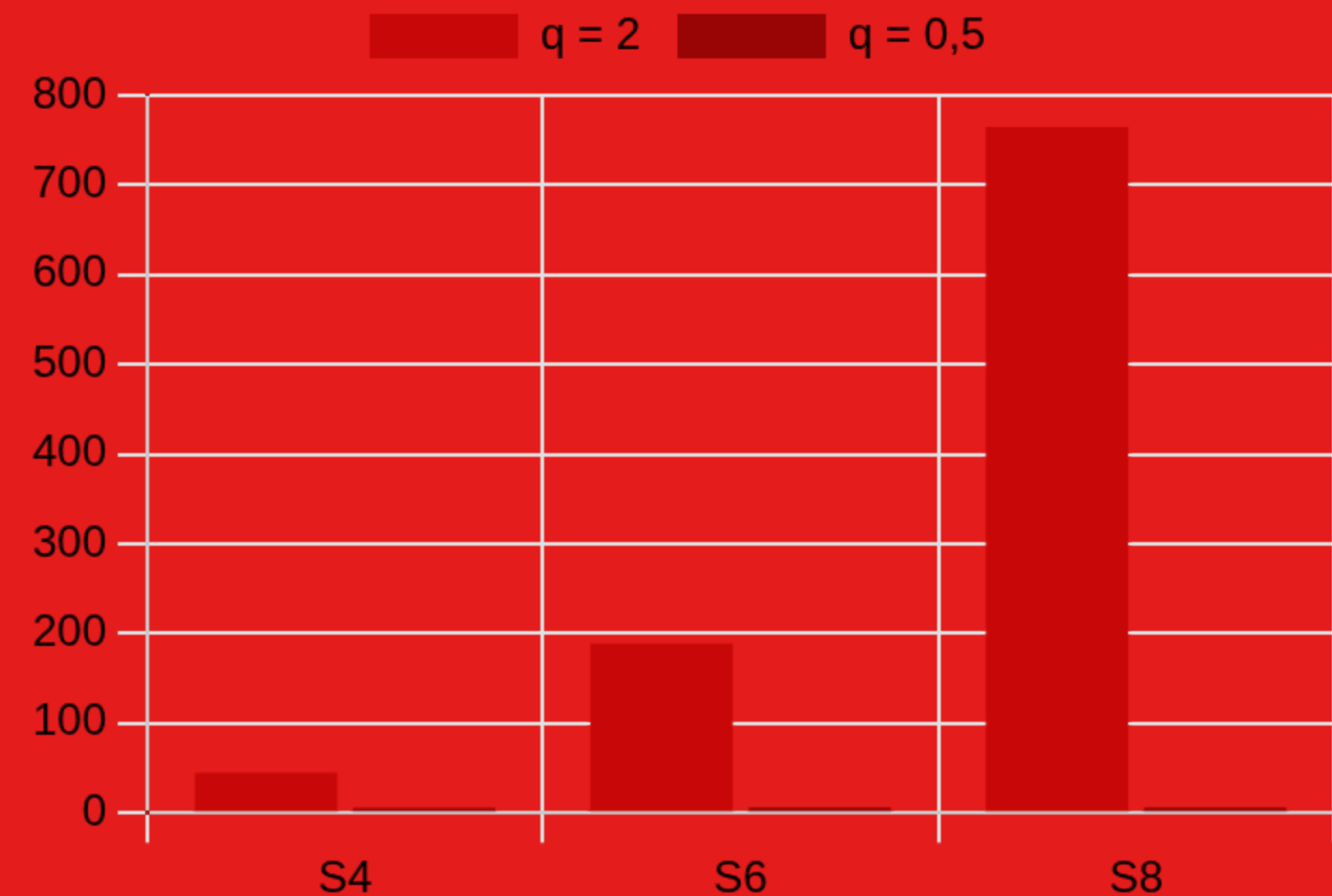
Такие задачи требуют внимательности: нужно учитывать и знак, и величину множителя. Это помогает не допускать ошибок при вычислениях и лучше понимать свойства прогрессии.

Сумма первых членов при разных q

При одинаковом первом члене $b_1 = 3$ суммы ведут себя по-разному: в одном случае они быстро растут, а в другом почти перестают увеличиваться.

Чем больше знаменатель, тем быстрее увеличивается сумма первых членов. При q меньше 1 прирост становится всё слабее и итог близок к пределу.

Расчёт по формуле $S_n = b_1 \cdot (q^n - 1) / (q - 1)$, $b_1 = 3$; вычислено для сравнения



Типичные ошибки при решении задач



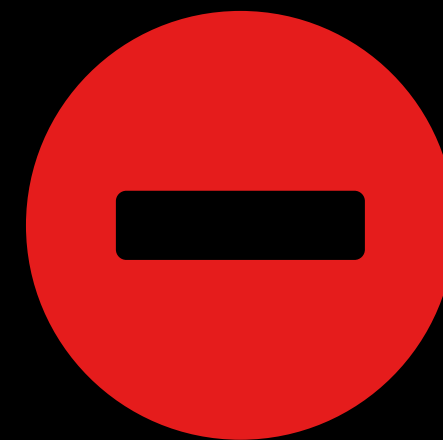
Путают q и разность

Некоторые по привычке ищут разность, как в арифметической прогрессии. Но здесь нужно проверять отношение соседних членов и помнить, что основной параметр — знаменатель q .



Ошибаются в степени

Часто забывают, что в формуле n -го члена стоит показатель $n-1$. Из-за этого получают неверный результат, особенно когда находят не второй, а более дальний член.



Не учитывают знак

При отрицательном q легко потерять знак или неправильно умножить числа. Чтобы избежать ошибки, полезно выписывать каждый шаг и следить за чередованием знаков.



Проверяют не то

Иногда сравнивают сами числа вместо отношений соседних членов. Правильная проверка — разделить каждый следующий член на предыдущий и убедиться, что получается одно и то же число.

Геометрическая прогрессия в природе и технологиях



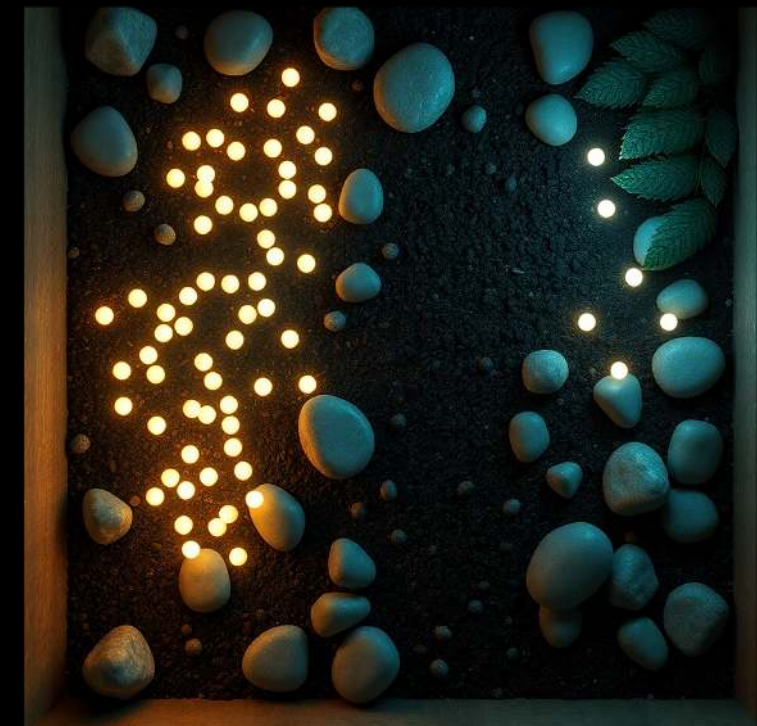
Рост колонии бактерий

Если каждая клетка делится на две, число бактерий быстро увеличивается по схеме, похожей на геометрическую прогрессию. На первых шагах рост выглядит почти незаметным, но затем становится очень быстрым. Такая модель помогает объяснять, почему небольшие изменения дают большой результат.



Сигналы и устройства

В технике геометрическая прогрессия помогает описывать изменение мощности сигнала, когда значение последовательно уменьшается или возрастает в одном и том же отношении. Это удобно для понимания работы цифровых систем, где важна точность каждого шага и повторяемость изменений.

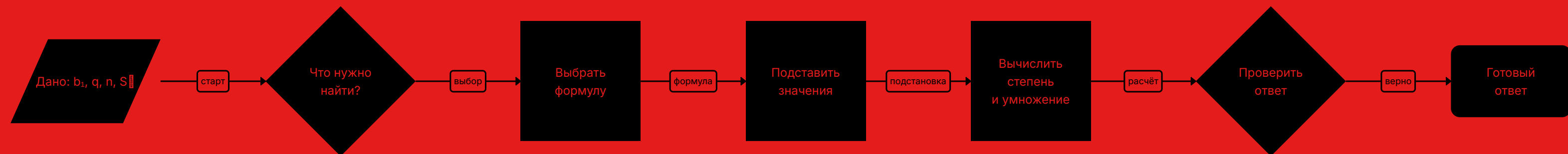


Яркость и численность

В природе и повседневной жизни такой закон можно заметить при постепенном уменьшении яркости или при изменении численности объектов по одинаковому правилу. На изображении это можно показать колонией, схемой деления или графиком быстрого роста.

Алгоритм решения задач на геометрическую прогрессию

Схема показывает последовательность действий при работе с формулами b_n и S_n .



Короткие числовые примеры

Рост

При $b_1 = 5$ и $q = 2$ получаем $b_4 = 40$. Такой пример показывает быстрый рост последовательности, когда каждый новый член вдвое больше предыдущего.

Уменьшение

Если $b_1 = 81$ и $q = 1/3$, то $b_3 = 9$. Здесь каждый шаг уменьшает значение в три раза, поэтому числа становятся меньше довольно быстро.

Чередование знаков

При $b_1 = 7$ и $q = -2$ получаем $b_5 = 112$. Этот случай показывает, что прогрессия может менять знак через один и одновременно увеличиваться по модулю.

Что важно запомнить

1 Основа правила

Геометрическая прогрессия строится не на сложении, а на умножении на одно и то же число. Именно это отличает её от других последовательностей и задаёт весь дальнейший расчёт.

2 Главные элементы

Нужно уверенно знать первый член b_1 , знаменатель q , формулу n -го члена и формулу суммы первых членов. Эти обозначения встречаются почти в каждой задаче по теме.

3 Как проверять последовательность

Чтобы понять, является ли ряд геометрическим, сравнивают отношения соседних членов. Если они одинаковы, последовательность подходит; если нет, нужно искать другой тип.

4 Зачем это нужно

Знание формул помогает решать задачи быстрее и точнее, не перебирая все члены вручную. Это особенно полезно в школьных заданиях и при работе с числами в жизни.

Итог: одна идея, много применений

Геометрическая прогрессия показывает, как одно и то же умножение может быстро менять числа. Понимание q , формул b_n и S_n помогает решать задачи и видеть математику вокруг нас.