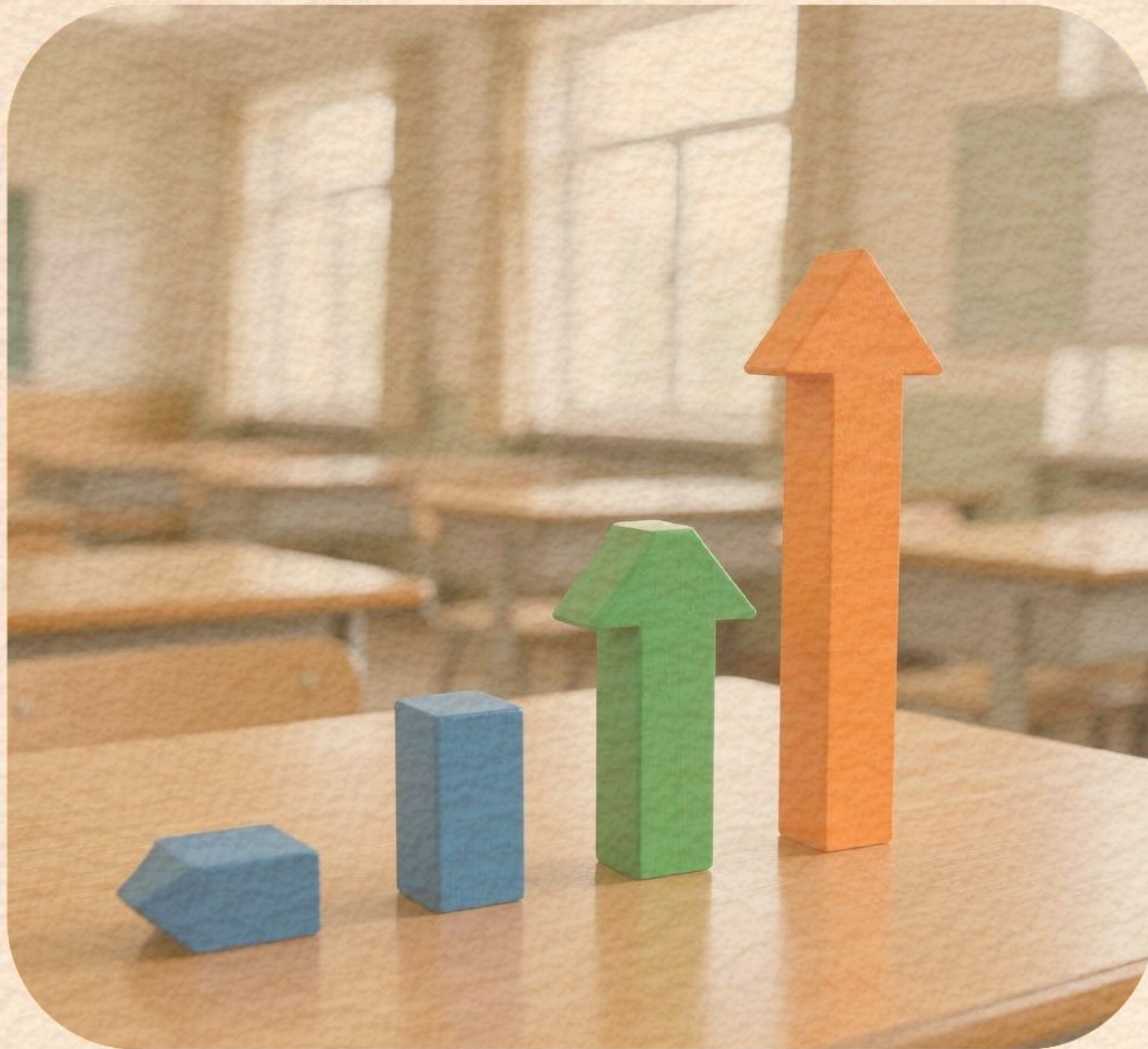


Умножение вектора на число: правило и применение в задачах

Научимся менять длину и направление вектора числом и
применять это в геометрии 7 класса.

Зачем в 7 классе изучают векторы



Векторный способ записи появляется после отрезков, углов, параллельных прямых и координатной плоскости. Он помогает записывать движение, сравнивать направления и длины, а также компактно выразить одинаковые по направлению и длине отрезки. Умножение задаёт масштаб и разворот.

Что такое вектор

Вектор — это направленный отрезок: у него есть начало, конец и направление. По рисунку видно, куда «смотрит» стрелка, а длина отвечает за величину вектора.

Равными называют векторы с одинаковой длиной и одинаковым направлением, даже если их нарисовали в разных местах листа. Главное — совпадение стрелок по величине и направлению.

Вектор обозначают, например, $\mathrm{vec}\{a\}$ или $\mathrm{vec}\{AB\}$. В записи важны именно направление и концы отрезка, поэтому две стрелки могут выглядеть по-разному.

Нулевой вектор имеет длину 0. Он не имеет определённого направления: как бы ни пытались «показать» стрелку, она не задаёт куда направляться.

Смысл умножения вектора на число

Если умножить вектор $\mathrm{vec}\{a\}$ на число k , получится новый вектор $k\mathrm{vec}\{a\}$. Его длина и направление определяются числом k : это главный смысл операции.

Модуль $\mathrm{mod}\{|k|\}$ показывает, во сколько раз меняется длина: при $\mathrm{mod}\{|k|>1\}$ вектор становится длиннее, при $\mathrm{mod}\{0<|k|<1\}$ — короче. При $k=0$ длина становится нулевой.

Знак числа управляет направлением: при $k>0$ направление сохраняется, при $k<0$ меняется на противоположное. Поэтому вектор «поворачивается» относительно исходного, а не просто растёт или уменьшается.

Как меняется вектор при разных значениях числа

Сравните пять случаев:
 k определяет и масштаб длины (по модулю), и направление (по знаку).

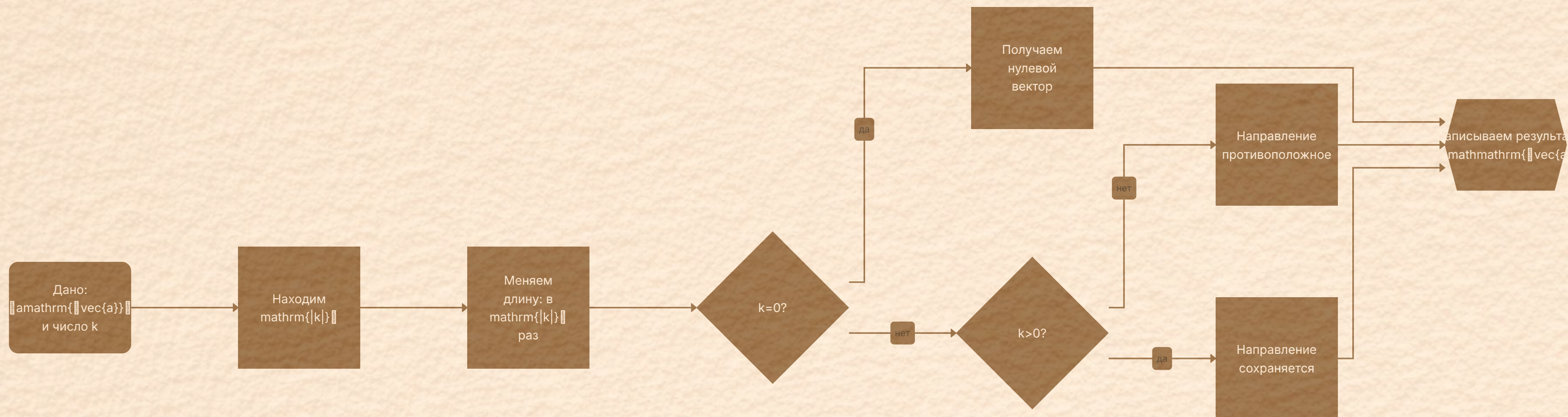
Модуль числа задаёт изменение длины, а знак — направление нового вектора относительно исходного.

k	что происходит
3	длина в 3 раза больше, направление то же
1/2	длина в 2 раза меньше, направление то же
-2	длина в 2 раза больше, направление противоположное
0	получается нулевой вектор
-1	длина та же, направление противоположное

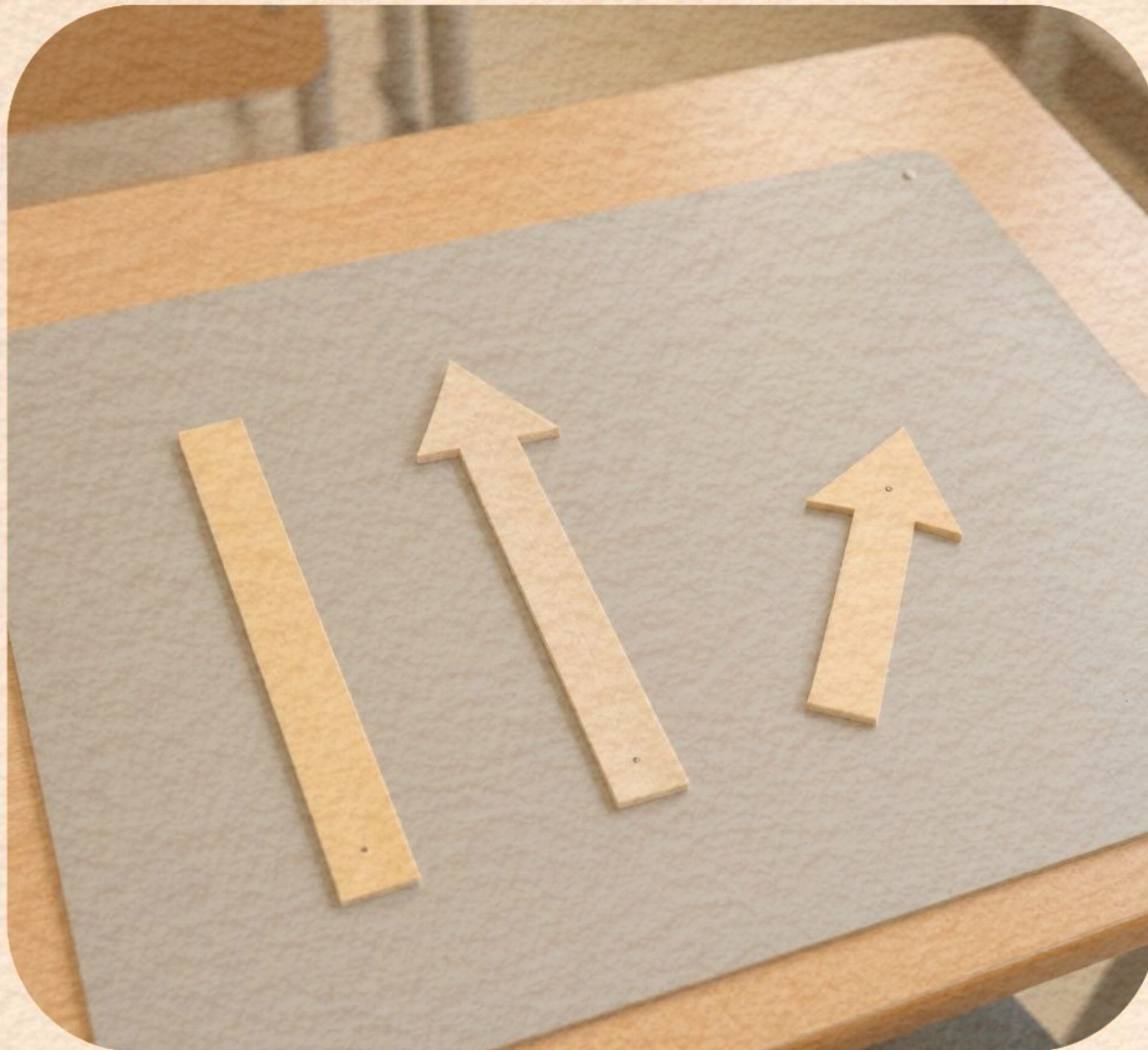
Обобщение правила умножения вектора на число

Правило умножения вектора на число

Пошаговый алгоритм получения вектора $\mathbf{vec}\{a\}$



Координаты вектора после умножения



Умножаем каждую координату

Пусть $\vec{a} = (x; y)$. Тогда при умножении на число k получаем $k\vec{a} = (kx; ky)$. Умножаются обе координаты, включая знак.

Как читать знак в координатах

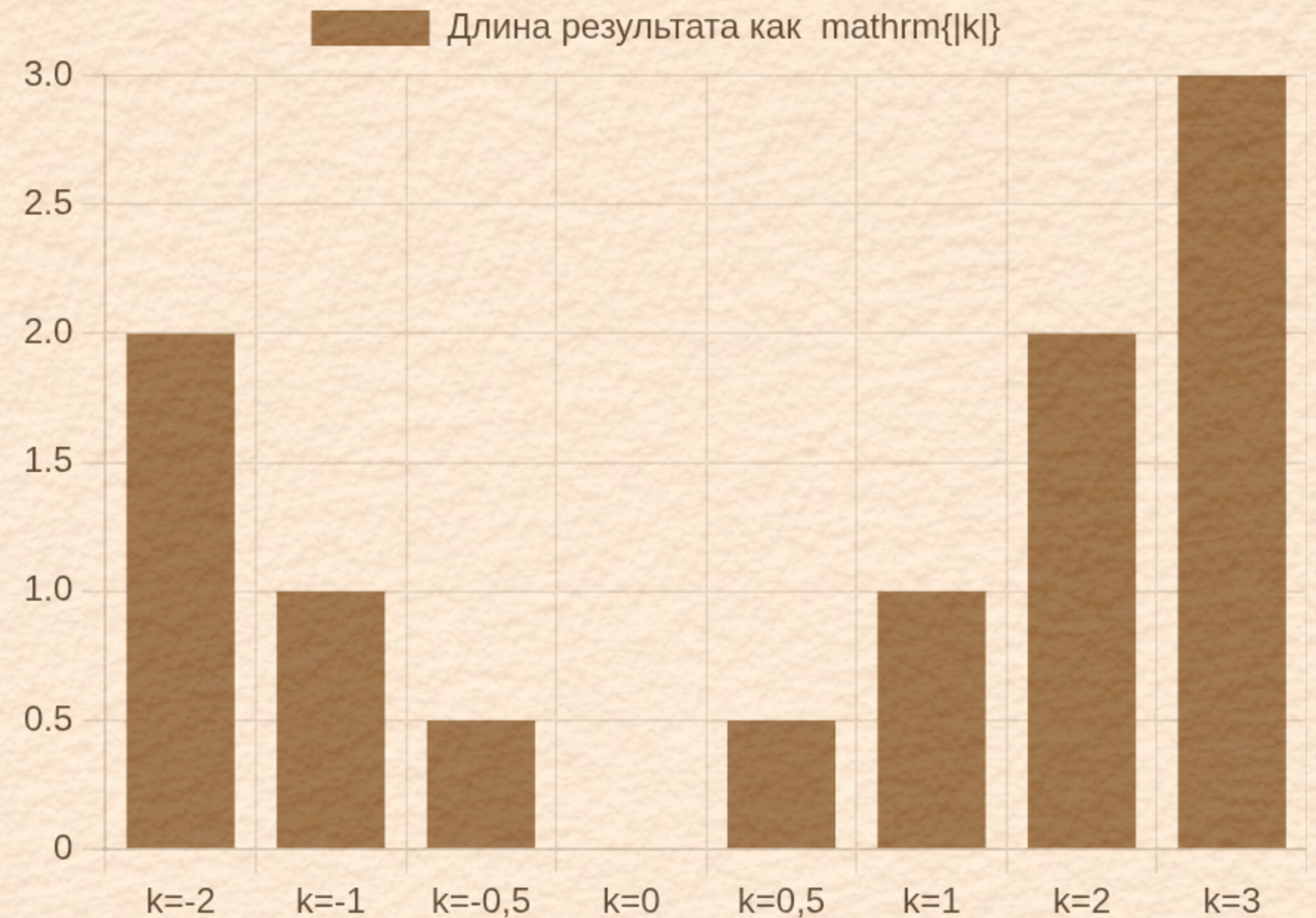
Если k положительное, координаты просто масштабируются и сохраняют «ориентацию» на плоскости. При k отрицательном обе координаты меняют знак, поэтому направление вектора становится противоположным, хотя модуль длины зависит только от $|k|$.

Как меняется длина вектора при разных значениях k

На графике видно: для k и $-k$ длина одинакова, потому что считается через модуль $\mathrm{|k|}$.

Длина зависит только от модуля числа: случаи $k=1$ дают исходный вектор, а $k=0$ превращает его в нулевой.

По правилу: длина $k \mathrm{vec}\{a\}$ равна $\mathrm{|k|}$, где k — коэффициент умножения



Свойства умножения вектора на число



Распределительное свойство

Если к сумме векторов применить умножение на число, получаются суммы умноженных векторов:
 $k(\mathrm{vec}\{a\} + \mathrm{vec}\{b\}) = k\mathrm{vec}\{a\} + k\mathrm{vec}\{b\}$. Это помогает аккуратно преобразовывать выражения.



Скалирование одного вектора

Верно и другое сокращение:
 $(k+m)\mathrm{vec}\{a\} = k\mathrm{vec}\{a\} + m\mathrm{vec}\{a\}$.
Сумма одинаковых кратных записывается короче, без потери смысла.



Компактные записи

Когда в задачах встречаются одинаково направленные отрезки, сумму $\mathrm{vec}\{a\} + \mathrm{vec}\{a\} + \mathrm{vec}\{a\}$ можно заменить на $3\mathrm{vec}\{a\}$. Такая запись ускоряет вычисления и рисунок.



Удобно для фигур

Эти свойства особенно полезны при построении и преобразовании фигур. С ними проще находить стороны параллелограмма, выражать отрезки через один базовый вектор и проверять равенство направлений.

Коллинеарные и сонаправленные векторы

Векторы вида $k\mathbf{a}$ всегда коллинеарны исходному $\mathbf{a}$: они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. То есть новый вектор не «уходит в сторону», а идёт по той же линии.

Если $k > 0$, то направления совпадают, и векторы называются сонаправленными. Это удобно при проверке параллельности сторон: одна и та же «стрелка» означает одинаковое направление отрезка.

Если $k < 0$, направление противоположное. Тогда по рисунку видно, что векторы лежат на одной линии, но «смотрят» друг на друга, что помогает сравнивать направления частей фигур и находить нужные векторы на схеме.

Примеры вычислений в координатах

Вектор	k	$k \cdot \text{vec } v$
(1; 2)	2	(2; 4)
(1; 2)	-3	(-3; -6)
(-4; 1)	1/2	(-2; 0,5)
(-4; 1)	-1	(4; -1)

Рассмотрим, как выглядит умножение вектора на число на координатной плоскости. Умножаем обе координаты исходного вектора на одно и то же число k и получаем новые координаты результата.

При умножении вектора на число каждая координата умножается на k отдельно, включая знак; поэтому меняются и величины, и направление.

Составлено на основе формулы $k(x; y) = (kx; ky)$

Как векторы помогают решать геометрические задачи

Векторная запись позволяет коротко отмечать равные и противоположно направленные отрезки. Так удобнее оформлять условия, где нужно показать, что один отрезок получается из другого поворотом или разворотом.

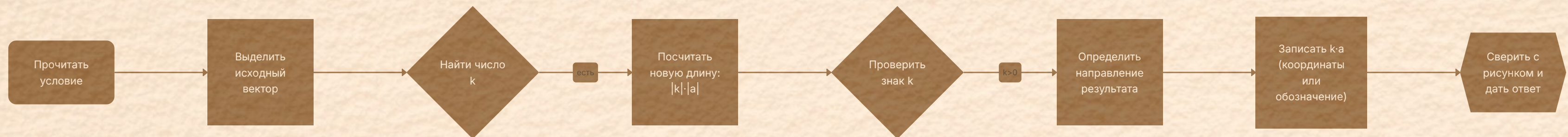
С помощью векторов можно находить неизвестные стороны: неизвестная величина задаётся как сумма или как кратное уже известных векторов. Решение становится более наглядным, чем при работе только с длинами.

В задачах на параллелограмм векторы помогают связать стороны: стороны, идущие в одном направлении и равные по длине, выражаются одинаковыми векторами. Это упрощает доказательство свойств фигуры.

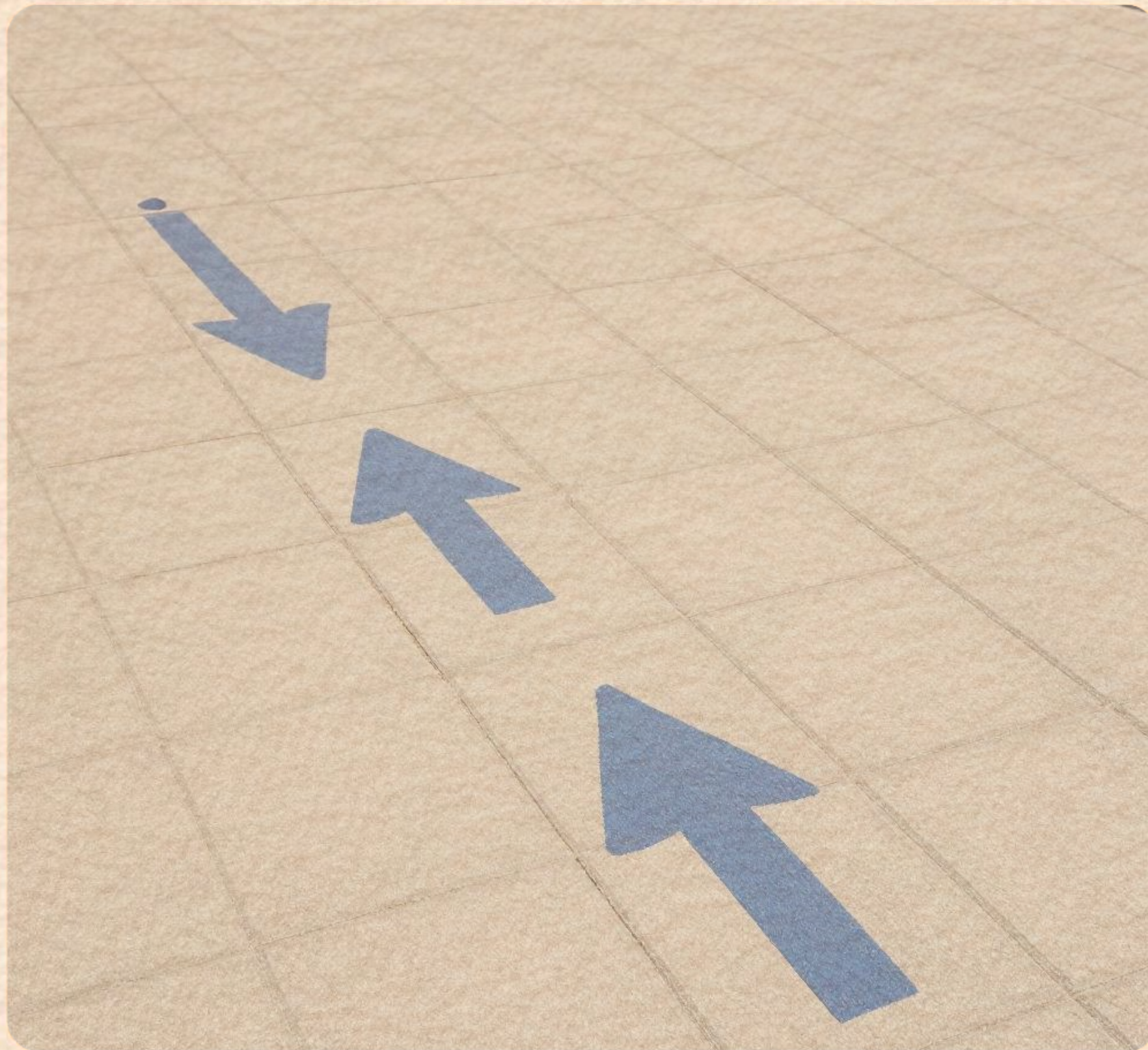
Очень полезна работа с серединой отрезка: середина отвечает геометрическому переходу, который в векторной записи выглядит аккуратно. Поэтому в 7 классе векторный подход часто делает ответы быстрее.

Алгоритм решения задачи на умножение вектора на число

Шаги подходят для типовых школьных задач на координатах и на рисунке с направленными отрезками.



Векторы в движении и перемещении



Перемещение тела можно изображать вектором: он показывает, куда и насколько сместился объект. Если один и тот же путь повторяется дважды по одной прямой, вектор перемещения становится в 2 раза длиннее при том же направлении.

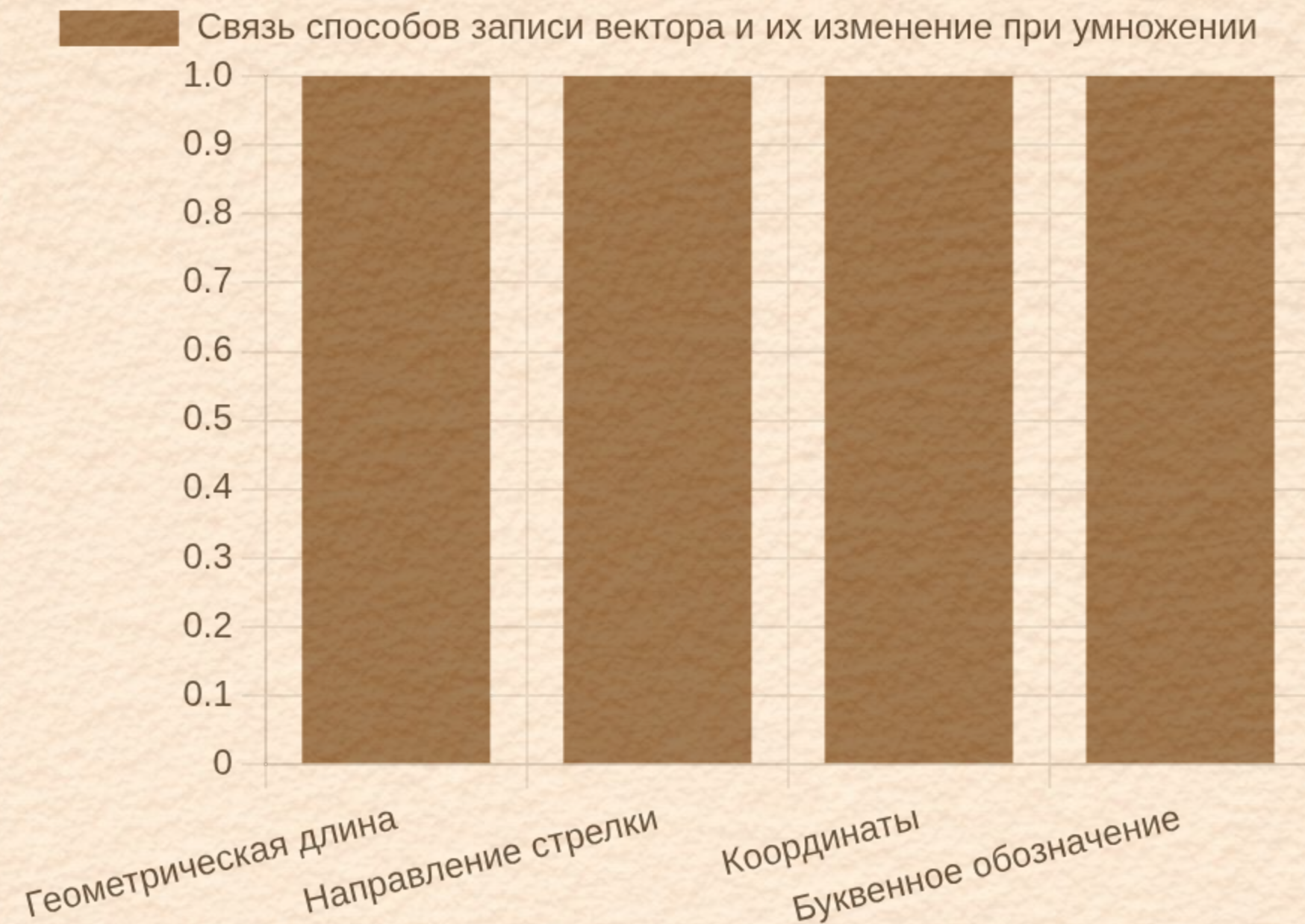
При движении в противоположную сторону работает знак: отрицательное число меняет направление вектора на противоположное. Поэтому в задачах на маршрут удобно следить за согласованностью знака и стрелки на схеме по клеткам.

Разные способы записи одного и того же вектора

Какой бы способ вы ни использовали на рисунке, при умножении на число меняется масштаб через модуль числа, а направление задаётся знаком. Обозначения остаются согласованными.

Диаграмма показывает, что умножение действует сразу на все представления вектора: длину, направление и координатную запись. Значит, проверять результат можно несколькими путями.

Практическая схема, составленная по школьному курсу (7 класс)



Типичные ошибки при умножении вектора на число

Ошибка 1: при отрицательном числе забывают изменить направление. Вектор становится противоположно направленным, даже если координаты по модулю получаются «правильными». Всегда сверяйте знак k с направлением стрелки.

Ошибка 3: считают, что нулевой вектор имеет направление. Нулевой вектор характеризуется длиной 0 и не имеет определённой стрелки. При $k=0$ результат всегда равен $(0; 0)$ для координат.

Ошибка 2: в координатах умножают только одну координату вместо обеих. Нужно преобразовать пару $(x; y)$ целиком: результат всегда имеет вид $(kx; ky)$. Иначе длина и направление получаются неверными.

Ошибка 4 и 5 встречаются вместе: путают длину и координаты и не различают случаи $k>1$, $0<k<1$ и $k<0$. Длина зависит от $|k|$, а координаты умножаются с учётом знака числа.

Мини–практика по теме

Решите задания, применяя правило: умножаем обе координаты на k ; затем по знаку определяем направление, а по модулю – изменение длины. Отдельно проверьте случай $k=1/4$: вектор должен стать в 4 раза короче.

В каждом пункте ключевые действия одинаковые: умножить обе координаты на k , затем интерпретировать направление по знаку и масштаб по модулю числа.

Задание	Дано	Результат	Проверка
$3\vec{a}$	$\vec{a}=(2; -1)$	$(6; -3)$	координаты умножены
$-2\vec{b}$	$\vec{b}=(-3; 4)$	$(6; -8)$	оба знака учтены
Сонаправлены?	$\vec{a}$ и $-5\vec{a}$	нет	знак $k<0$
Длина при $k=1/4$	$k=1/4$	в 4 раза меньше	$ k =1/4$

Подборка упражнений по теме умножения вектора на число (координаты и направление)

Примеры применения в геометрических и жизненных задачах



Маршруты на координатной сетке

На плане с клетками перемещения удобно описывать векторами. Умножение вектора на число помогает получить «дважды дальше» или «вдвое короче» при сохранении направления, а при отрицательном числе — развернуть путь.



Стороны фигур через векторы

Если сторона выражается вектором, то кратные векторы показывают, как меняются параллельные стороны при построениях. Это помогает сравнивать длины частей и записывать равенства компактно, без лишних измерений.



Параллельность и доказательства

Сонаправленные и противоположно направленные векторы подсказывают, где в задаче лежат параллельные стороны. При построении доказательств достаточно показать соответствие направлений и длины через кратность.



Перемещения по плану местности

Векторная запись превращает описание перемещения в строгую схему: куда и насколько. При повторении одного шага нужный итог получается умножением, а обратное движение соответствует смене направления вектора.

Главные случаи умножения вектора на число

Если $k > 1$, длина растёт; при $0 < k < 1$ — уменьшается. Знак влияет на направление: при $k < 0$ оно становится противоположным, при $k = 0$ получается нулевой вектор.

Диаграмма подчёркивает: масштаб задаёт $|k|$, а направление — знак. Поэтому при проверке решения полезно отдельно оценивать модуль числа и ориентацию стрелки.

Учебная обобщающая схема; значения для столбцов выбраны как иллюстрация ($|k| = 2, 0,5, 1, 0$).



Главный вывод по теме

Умножение вектора на число изменяет длину вектора в $|k|$ раз и при отрицательном числе меняет направление на противоположное. В координатах обе координаты умножаются на одно и то же число, что помогает решать задачи на плоскости.