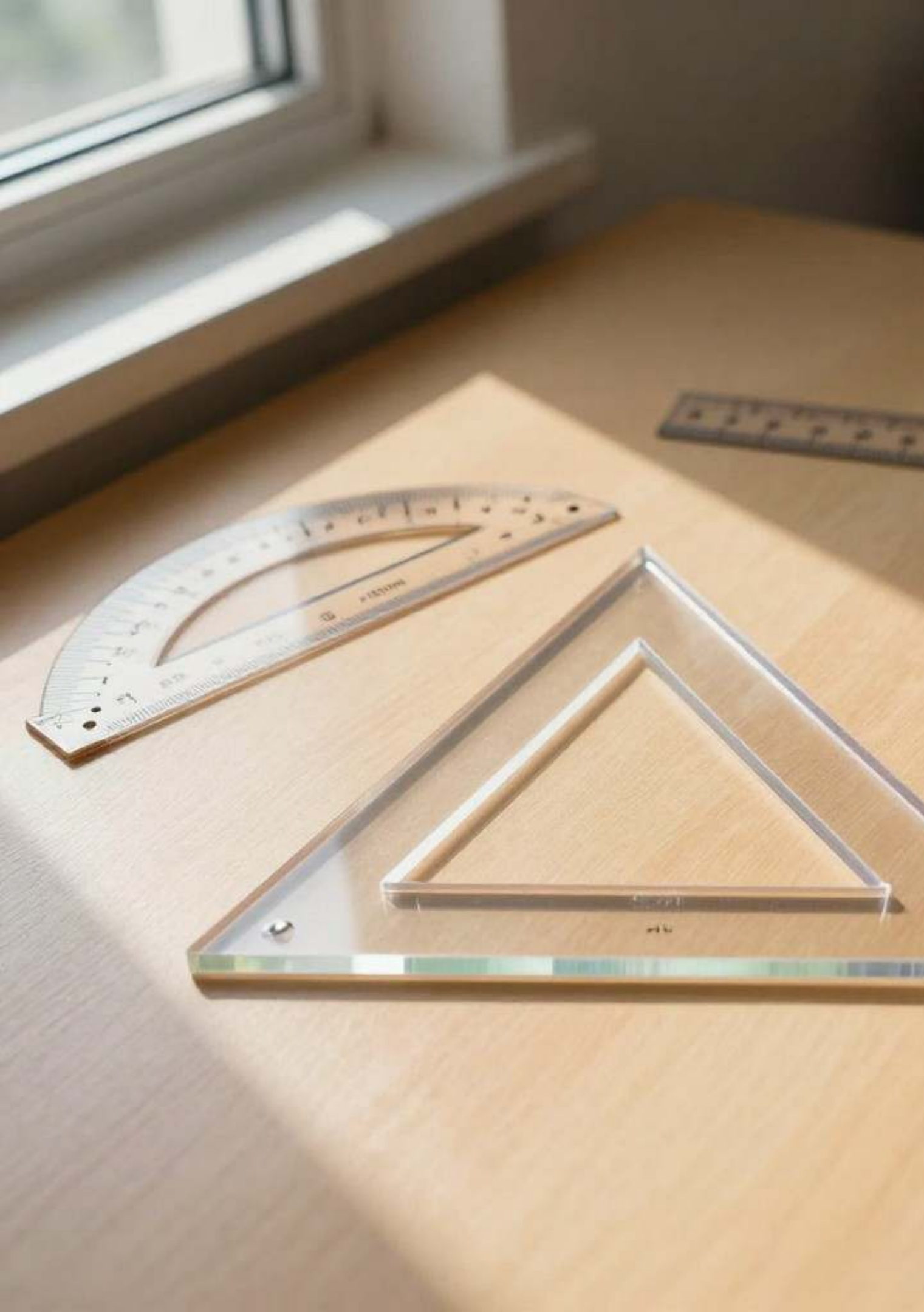




+ Тригонометрия в геометрии треугольника

Как синусы и косинусы раскрывают свойства
треугольника и его доказательства

Подготовка к формулам



Сначала вспомним обозначения сторон, углов и отношения в прямоугольном треугольнике — без этого формулы легко перепутать.

Sin и cos через единичную окружность

Координаты точки

- На единичной окружности каждая точка задаётся парой координат. Горизонтальная координата показывает $\cos A$, а вертикальная — $\sin A$, поэтому функции удобно читать прямо с рисунка.

Тот же смысл

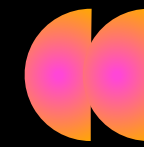
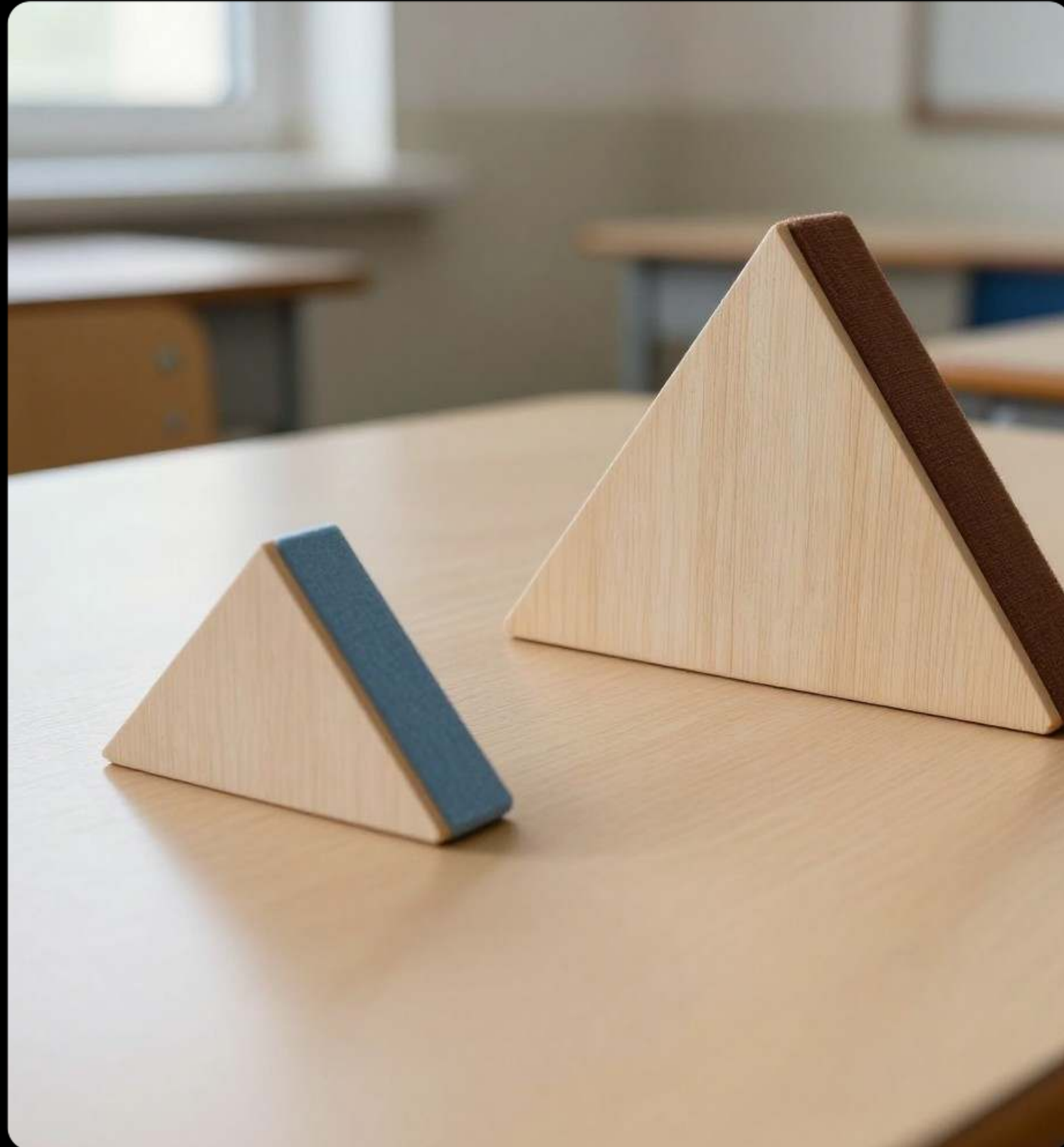
- Для острого угла в прямоугольном треугольнике эти же значения превращаются в отношения сторон. Так геометрический чертёж и окружность описывают одну и ту же идею.

Движение по окружности

- Если угол меняется, точка движется по окружности, а вместе с ней меняются и значения функций. Это помогает увидеть, почему синус и косинус связаны с положением точки.



Определения в прямоугольном треугольнике



Определение $\sin$

Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе, и оба числа зависят только от самого угла.



Почему значения не меняются

Если изменить размер треугольника, но сохранить углы, отношения сторон не изменятся. Поэтому синус и косинус удобны: они описывают форму треугольника, а не его масштаб.

Тангенс и связь функций

01.

Две записи

Тангенс связывает синус и косинус формулой $\tan A = \sin A / \cos A$. В прямоугольном треугольнике это ещё и отношение противолежащего катета к прилежащему.

02.

Как он меняется

Когда угол увеличивается, тангенс обычно растёт заметнее, чем синус и косинус. Это делает его особенно удобным для сравнения наклонов и крутизны.

03.

Когда формула не работает

Если $\cos A$ равен нулю, делить нельзя, поэтому тангенс не определён. Так бывает для углов, где прямая становится вертикальной.

Периодичность и знаки на окружности

01.

Повторение значений

После полного оборота значения синуса и косинуса повторяются. Поэтому достаточно понять их поведение на одном круге, а затем мысленно продолжить движение дальше.

02.

Первая четверть

В первой четверти обе координаты положительны, потому что точка находится справа и сверху. Здесь $\sin$ и $\cos$ имеют одинаковый знак.

03.

Вторая четверть

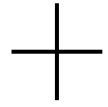
Во второй четверти синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным. Точка уже слева от оси, но ещё выше неё.

04.

Третья и четвёртая

В третьей четверти отрицательны оба значения, а в четвёртой положителен только косинус. Знаки легко запомнить по положению точки на окружности.





Это тождество показывает, что синус и косинус всегда согласованы и вместе описывают одну точку на окружности.

1

связывает синус и косинус одной формулой.

Теорема Пифагора для единичной окружности

Углы 30° , 45° , 60°

Угол	$\sin$	$\cos$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Для углов 30° , 45° и 60° удобно помнить точные значения синуса и косинуса. Они часто встречаются в стандартных прямоугольных треугольниках и помогают быстро решать задачи.

Эти значения легко запомнить по двум симметричным треугольникам.

Стандартные значения тригонометрических функций

Правильные обозначения в треугольнике



Сторона напротив угла

По принятому обозначению сторона a лежит напротив угла A . Это правило помогает не путаться, когда в формуле появляются сразу несколько сторон и углов.



Единый порядок

Стороны b и c работают так же: каждая стоит напротив своего угла. Благодаря этому теоремы синусов и косинусов читаются одинаково для любой вершины.



Проверка на чертеже

Перед подстановкой полезно быстро проверить схему на рисунке. Если обозначения совпадают с правилом, решение идёт без лишних ошибок.

Высота как ключ к доказательствам

Два прямоугольных треугольника

- Проведённая из вершины высота делит исходный треугольник на два прямоугольных. Это сразу даёт знакомые отношения для синуса, косинуса и помогает перейти к вычислениям.

Общий опорный отрезок

- У новой фигуры появляется общий отрезок — высота. Через него удобно выражать стороны, сравнивать части основания и связывать данные углы с длинами отрезков.

Площадь через высоту

- Если известны основание и высота, площадь находится по формуле половины произведения. Эта запись часто становится мостиком между геометрическим чертежом и тригонометрическими формулами.

Шаг к доказательству

- Та же высота позволяет увидеть, почему доказательства теорем начинаются с простого построения. Один дополнительный перпендикуляр делает сложный треугольник понятнее и удобнее для рассуждений.

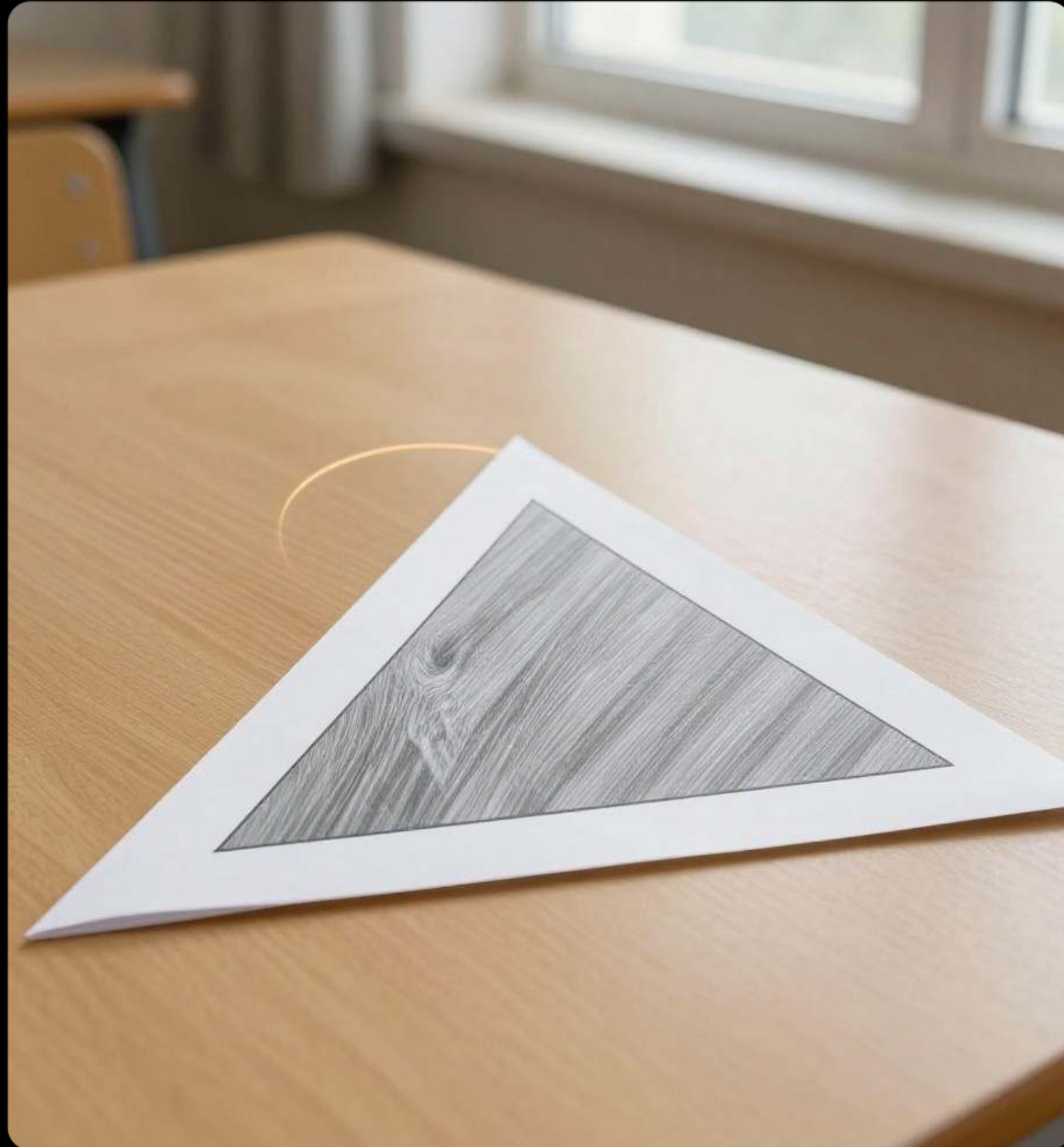


Подобие треугольников после построения высоты

Построение высоты делит треугольник на две части и позволяет сравнивать их через общие углы и пропорции.



Площадь через синус угла



Основание и высота

Если взять основание и провести к нему высоту, площадь можно считать как половину произведения основания на высоту. Это самый привычный геометрический способ измерения площади.



Синус внутри формулы

Когда две стороны образуют угол C , высоту можно выразить через синус этого угла. Тогда вместо неизвестной высоты в формулу входит $\sin C$, и получается удобная запись площади.



Угол между сторонами

Формула $S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$ показывает, что площадь зависит не только от длин сторон, но и от угла между ними. Чем угол больше, тем больше вклад синуса.



Удобство для задач

Эта запись особенно полезна в задачах, где высоту сразу найти трудно. Она объединяет тригонометрию и обычную геометрию в одну короткую формулу.

Формулировка теоремы синусов

01.

Берём пару

Сначала выбирают любую сторону треугольника и её противолежащий угол. Для пары a и A пишут отношение $a/\sin A$, чтобы получить первую часть общей формулы.

02.

Сравниваем ещё пары

Потом делают то же самое для сторон b и c с углами B и C . Оказывается, все три отношения оказываются равными друг другу в одном и том же треугольнике.

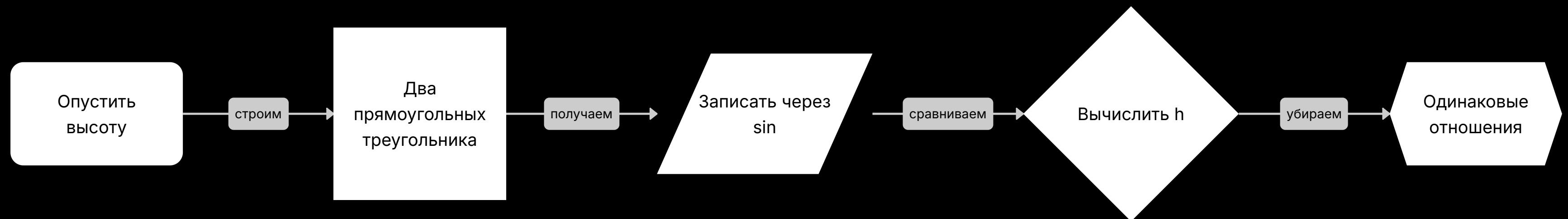
03.

Общий результат

Итог записывают так: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. Это и есть теорема синусов, которую удобно применять при двух углах и одной стороне.

Как появляется теорема синусов

Высота в треугольнике позволяет выразить стороны через синусы острых углов и затем сократить общую величину.



Связь с описанной окружностью

01.

Одна окружность

Для любого треугольника существует одна описанная окружность. Её радиус обозначают R , и именно он связывает все стороны с их противолежащими углами через синус.

02.

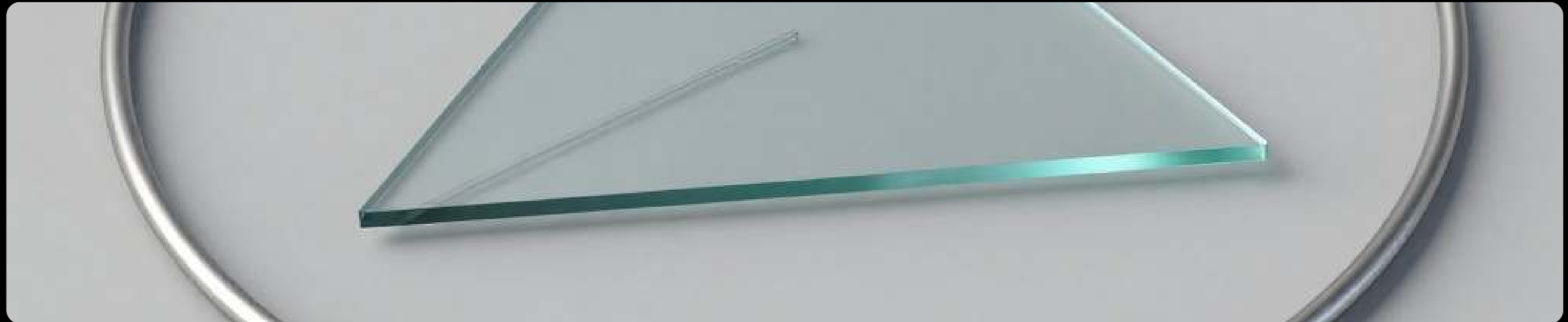
Формулы для сторон

Из теоремы синусов получается запись $a = 2R \cdot \sin A$. Аналогично выводятся формулы для b и c , поэтому каждая сторона выражается через один и тот же радиус.

03.

Связь с задачами

Это показывает, что треугольник как будто «вписан» в окружность с общим размером. Если известен радиус R , можно быстро переходить от углов к длинам сторон.



Формулировка теоремы косинусов

Главная формула

- Теорема косинусов записывается так: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Она связывает сторону a с двумя другими сторонами и углом между ними.

Связь с Пифагором

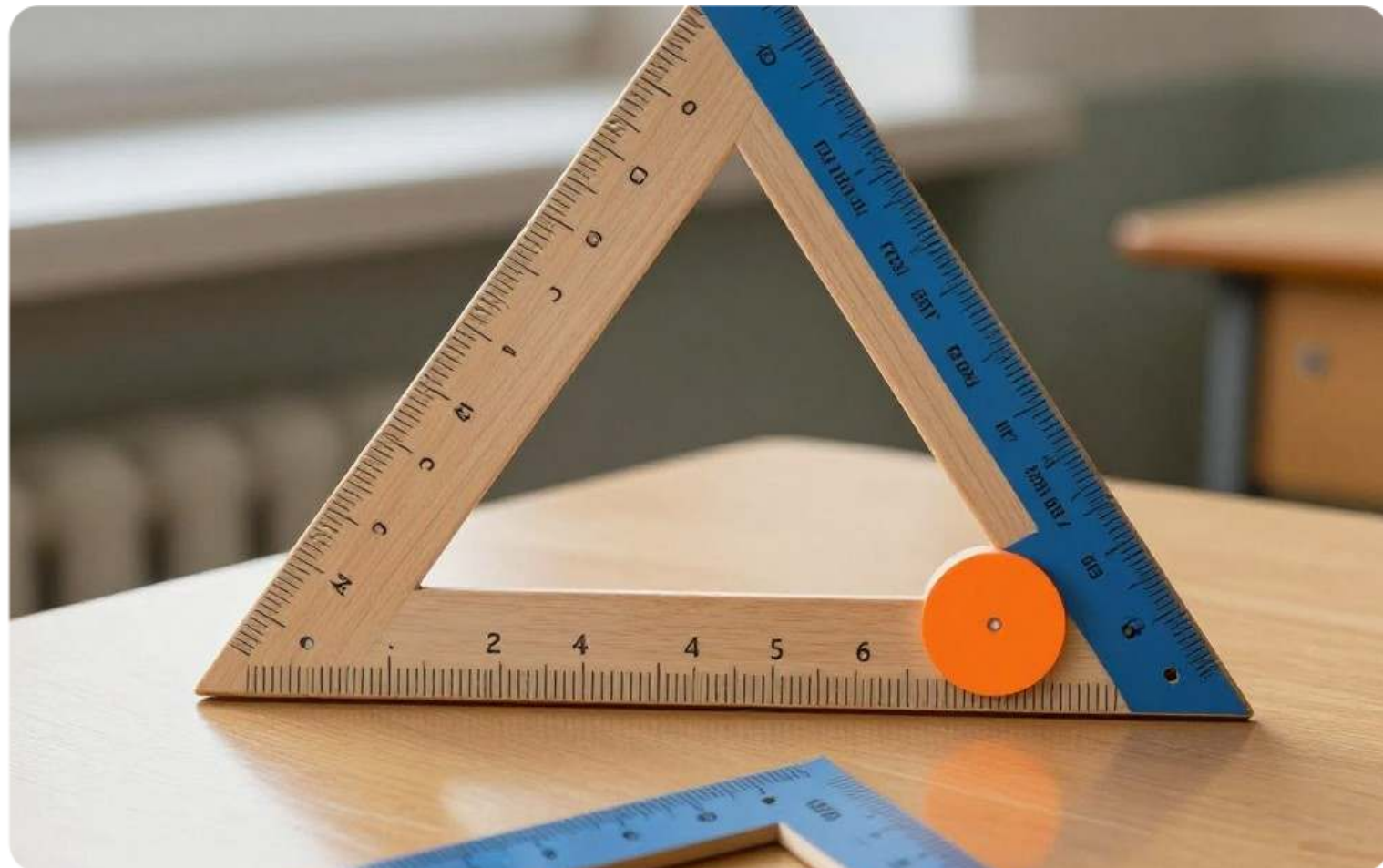
- Если угол A прямой, то $\cos A = 0$. Тогда формула сразу превращается в $a^2 = b^2 + c^2$, то есть в теорему Пифагора.

Для любого треугольника

- Поэтому теорема косинусов работает не только в прямоугольных, но и в любых треугольниках. Она расширяет знакомую формулу на более общий случай.

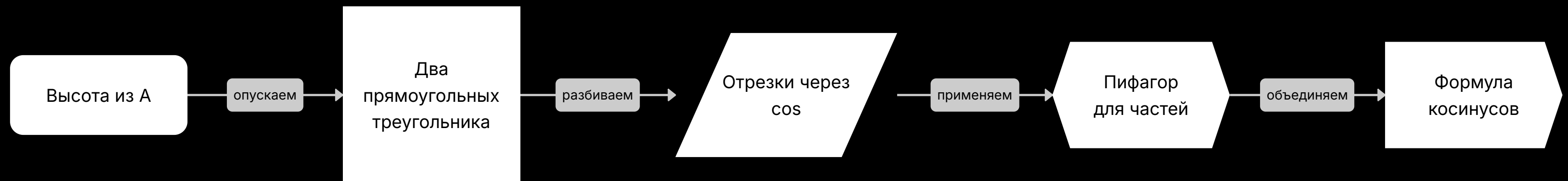
Практическая польза

- Формула особенно удобна, когда даны две стороны и угол между ними. В такой ситуации можно найти третью сторону без дополнительных построений.



Геометрическое доказательство теоремы косинусов

Построение высоты из вершины A позволяет разложить сторону a на части и применить теорему Пифагора к двум прямоугольным треугольникам.



Быстрые применения формулы



Найти угол

Когда даны все три стороны, формулу можно преобразовать и найти косинус нужного угла. Затем по таблице или калькулятору определяют сам угол.



Найти сторону

Если известны две стороны и угол между ними, теорема косинусов помогает сразу вычислить третью сторону. Это часто бывает в задачах на измерение расстояний и построение фигур.



Универсальный инструмент

Вместе обе ситуации покрывают почти все задачи на произвольный треугольник. Поэтому теорема косинусов считается одним из главных инструментов в геометрии.

Как выбрать нужный закон

- Сначала определяют, какие данные известны. Потом выбирают закон, который сразу даёт нужную связь между сторонами и углами, без лишних шагов и ошибок.
- Если выбрать закон по данным, решение становится короче и понятнее: синусы используют для пар «угол-сторона», косинусы — для случая с двумя сторонами или тремя сторонами.

Правила применения теорем синусов и косинусов

Известно	Нужна формула	Когда удобно
2 угла + сторона	синусов	поиск стороны
2 стороны + угол	косинусов	поиск стороны
3 стороны	косинусов	поиск угла

Итоги: три главные идеи



Тригонометрия в треугольнике — это не набор формул, а понятный способ связывать углы, стороны и высоты. Теоремы синусов и косинусов показывают, как из простых построений рождаются сильные результаты.