

Соотношения между отрезками при пересечении прямой с окружностью

В каких случаях произведения отрезков
равны и как это помогает решать задачи на
окружность.



Зачем нужны эти соотношения в школьной геометрии



В 7 классе окружность рассматривают в планиметрии: точки на окружности, точки вне её и пересечения прямых с окружностью. Соотношения через отрезки дают длины аккуратно, без громоздких построений. Важно уметь читать чертёж и фиксировать данные по рисунку.



Основные элементы: хорда, секущая, касательная



Хорда

Хорда — это отрезок, соединяющий две точки окружности. На чертеже важно сразу видеть обе точки пересечения с окружностью: тогда легко выбрать нужные обозначения для формул.



Секущая

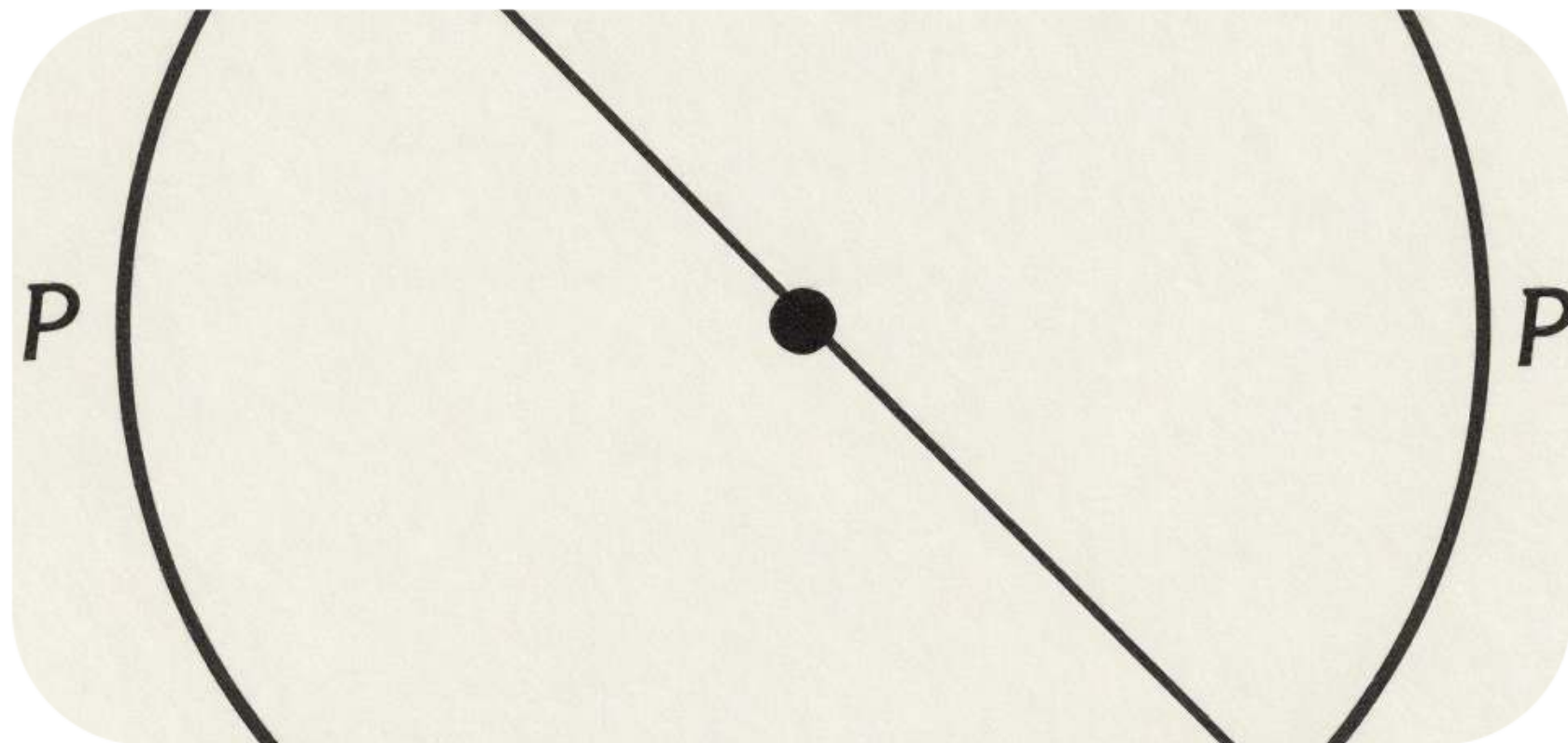
Секущая — прямая, которая пересекает окружность в двух точках. От точек пересечения она делит прямую на части: одна — ближе к внешней точке, другая — дальше.



Касательная

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. В задачах появляется характерная связка: длина касательной входит в равенство через квадрат.

Схема с секущей и хордой



+ Как не перепутать части отрезков

В такой схеме полезно подписывать отрезки так, чтобы было ясно, где именно находится точка P и какие точки принадлежат окружности. Тогда равенства в задачах записываются без путаницы и ошибок в обозначениях.

+ Что отмечают на рисунке

Обычно отмечают окружность, центр O , две точки пересечения прямой с окружностью и внешнюю точку. Две точки делят секущую на части: внешнюю и внутреннюю, а вся секущая — на линии между крайними отметками.

Пересекающиеся хорды внутри окружности

:::

+

Если хорды AB и CD пересекаются в точке P внутри окружности, выполняется равенство $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. В формуле участвуют четыре отрезка, получающиеся из двух хорд.

+

Точка P обязательно должна быть внутренней: от этого зависит, какие части отрезков берутся. Соотношение помогает находить один неизвестный отрезок, когда известны остальные три длины.

+

Выбирая отрезки, начинайте от точки пересечения P: для первой хорды берутся две части AP и PB, для второй – CP и PD. Так легче не перепутать пары в произведениях.

Три главных соотношения темы



Случай	Какая формула	Где стоит точка
Пересекающиеся хорды	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	внутри окружности
Две секущие из одной внешней точки	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	внешняя точка
Касательная и секущая	$PT^2 = PA \cdot PB$	внешняя точка

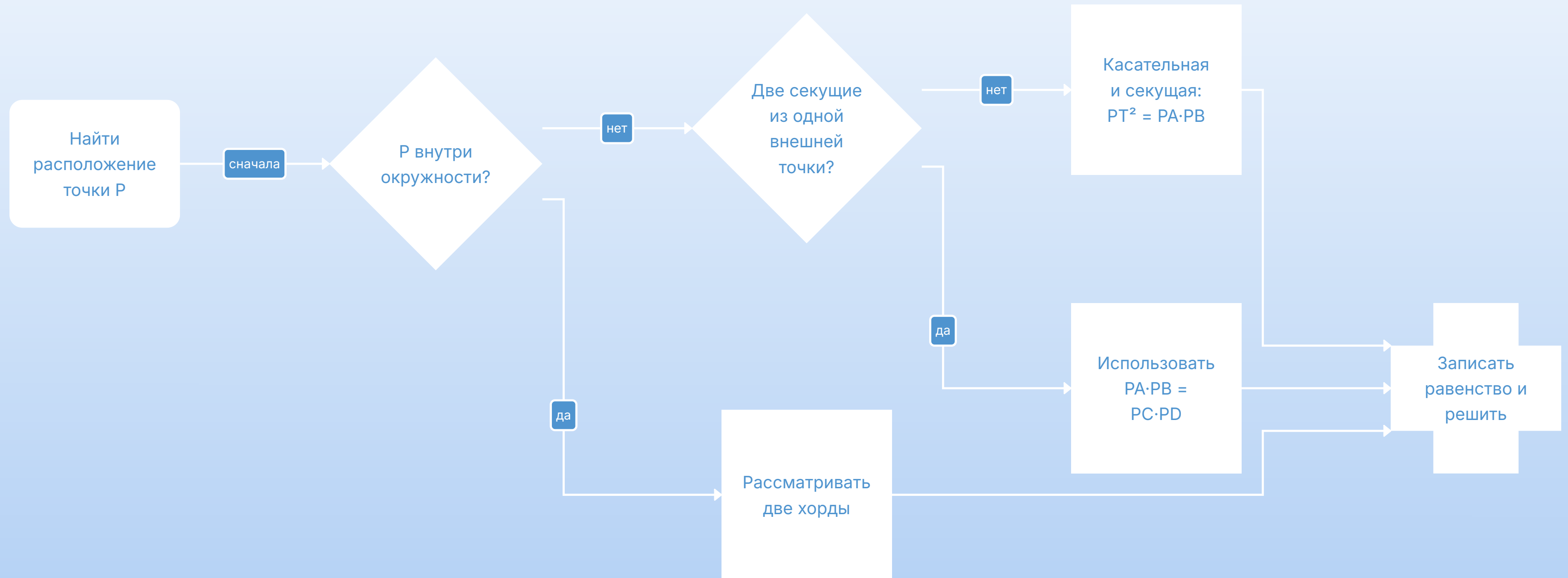
+ В таблице показаны случаи, какие отрезки входят в формулу и какой вид равенства получается.

+ Во всех трёх ситуациях равенство строится через произведения отрезков; единственное исключение — появление квадрата длины касательной.

- Планиметрия, тема «отрезки при пересечении прямых с окружностью», 7 класс

Как выбрать нужную формулу

Шаги выбора зависят от положения точки пересечения и типа прямых.



Когда из внешней точки P проведены секущие PAB и PCD , произведение частей первой секущей равно произведению частей второй. Так проще найти неизвестную длину.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Это соотношение позволяет связать внешние и внутренние части секущих в одно равенство.

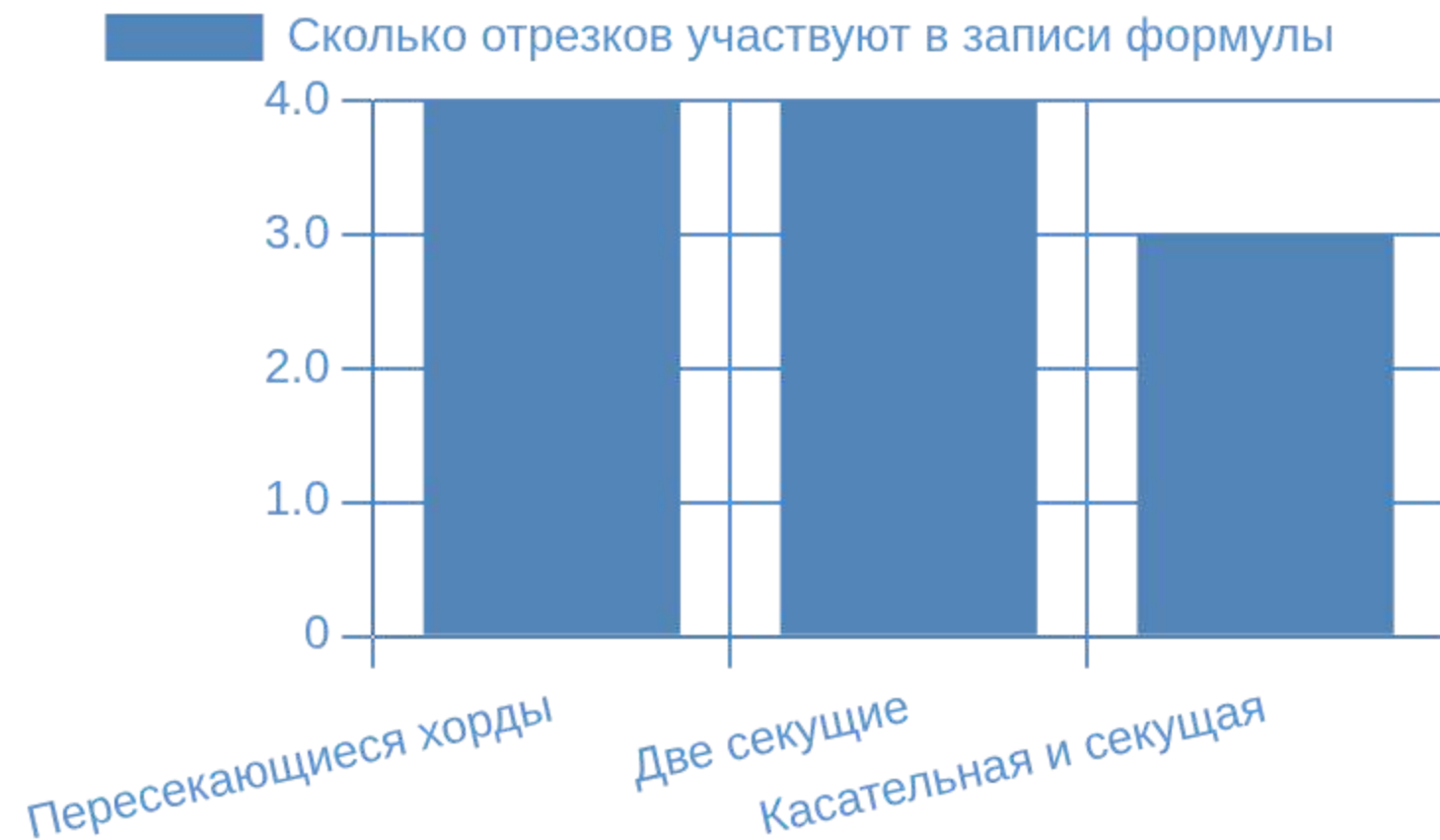
Планиметрия, теорема о произведениях отрезков при пересечении секущих из внешней точки (7 класс)

Касательная и секущая



- + Если из точки P вне окружности проведены касательная PT и секущая PAB , выполняется равенство $PT^2 = PA \cdot PB$. Квадрат длины касательной равен произведению внешней части и всей секущей.
- + Здесь важно правильно определить отрезки PA и PB : PA — расстояние от P до ближайшей точки пересечения секущей с окружностью, PB — до дальней точки пересечения.
- + При наличии двух известных длин из трёх величин PT , PA или PB третью можно найти из равенства. В задачах 7 класса это часто приводит к прямым вычислениям без сложных преобразований.

Сравнение трёх случаев в одной теме



Во всех вариантах ключевая идея одна: связь задаётся через произведение отрезков, а для касательной появляется квадрат её длины.

Чем точнее вы определили тип прямых и положение точки, тем легче выбрать формулу и сразу начать подстановку. Одинаковая структура помогает контролировать ход решения.

Сводка правил для произведений отрезков при пересечении прямых с окружностью (7 класс)

Откуда берутся произведения отрезков



1

Эти равенства не появляются «из ниоткуда»: их выводят через подобие треугольников, которое обычно возникает после того, как в рисунке добавляют вспомогательные отрезки.

2

В задачах на окружность часто проводят радиусы или строят дополнительные хорды/сущие так, чтобы получить треугольники с одинаковыми углами. Тогда отношения соответствующих сторон становятся равными.

3

Когда в подобных треугольниках складываются пропорции, в записи неизбежно появляются произведения пар отрезков. Так геометрические зависимости опираются на известные свойства пропорций.

Внутренние и внешние части отрезков



Для секущей удобно разделить её на две части: внутреннюю и внешнюю. Внутренняя часть лежит между точками пересечения прямой с окружностью.



Внешняя часть секущей — от внешней точки (где находится P) до ближайшей точки пересечения с окружностью. Именно её длина входит в формулу вместе с другой внешней частью.



Критично не перепутать: если в записи заменить внутреннюю часть на внешнюю, равенство получится неверным, даже когда рисунок выглядит аккуратно и логично.



Похожая внимательность нужна и для хорд: при пересечении в точке P берут отрезки до P в нужных направлениях, а не «целые хорды», чтобы совпали стороны в произведениях.

Типовые задачи по теме

- Материалы урока по теме «соотношения при пересечении прямых с окружностью» (типовые формулировки).

Что дано	Формула	Результат
AP, PB, CP	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	Найти PD
PA и PB, PC и PD	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	Найти нужный отрезок
PT, PA, PB	$PT^2 = PA \cdot PB$	Найти PT или PA
Длины даны для проверки	Соответствующее произведение	Проверить равенство

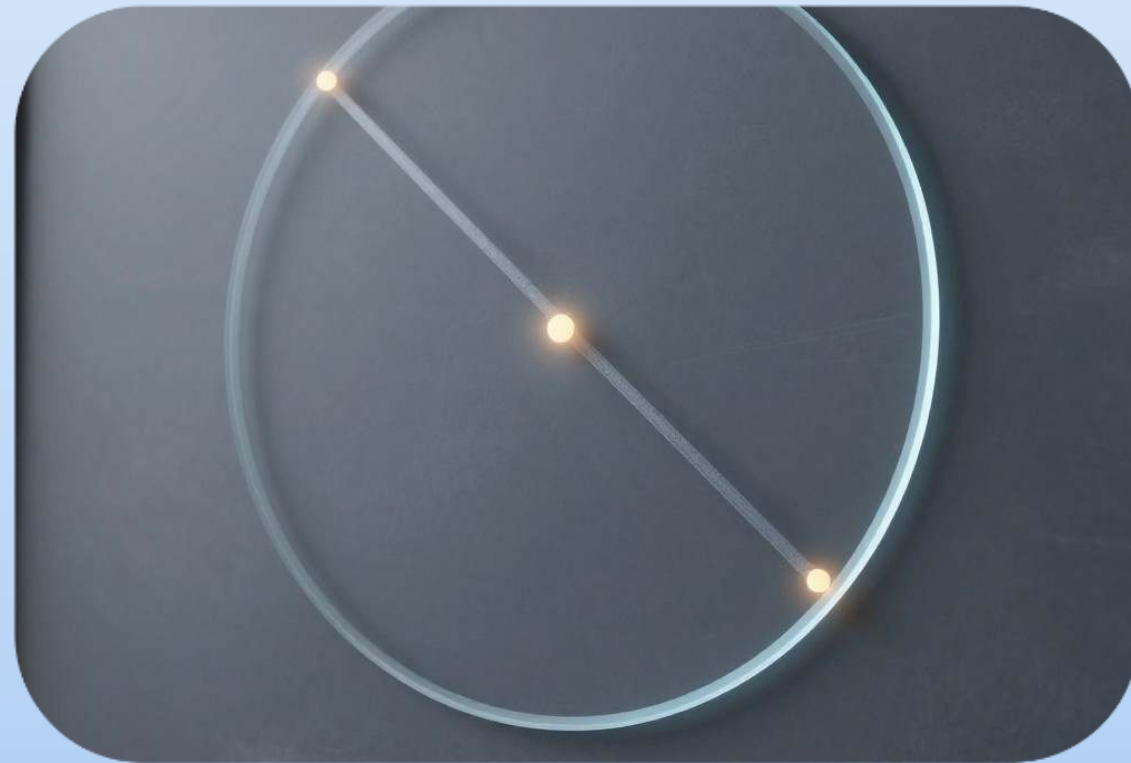
Столбцы: что дано → какая формула используется → какой результат требуется. В каждой строке задача сводится к одному из трёх соотношений темы.

Каждая задача сводится к одному из трёх произведений: для пересекающихся хорд, для двух секущих из внешней точки и для касательной с секущей.

Почему рисунок помогает в решении :::

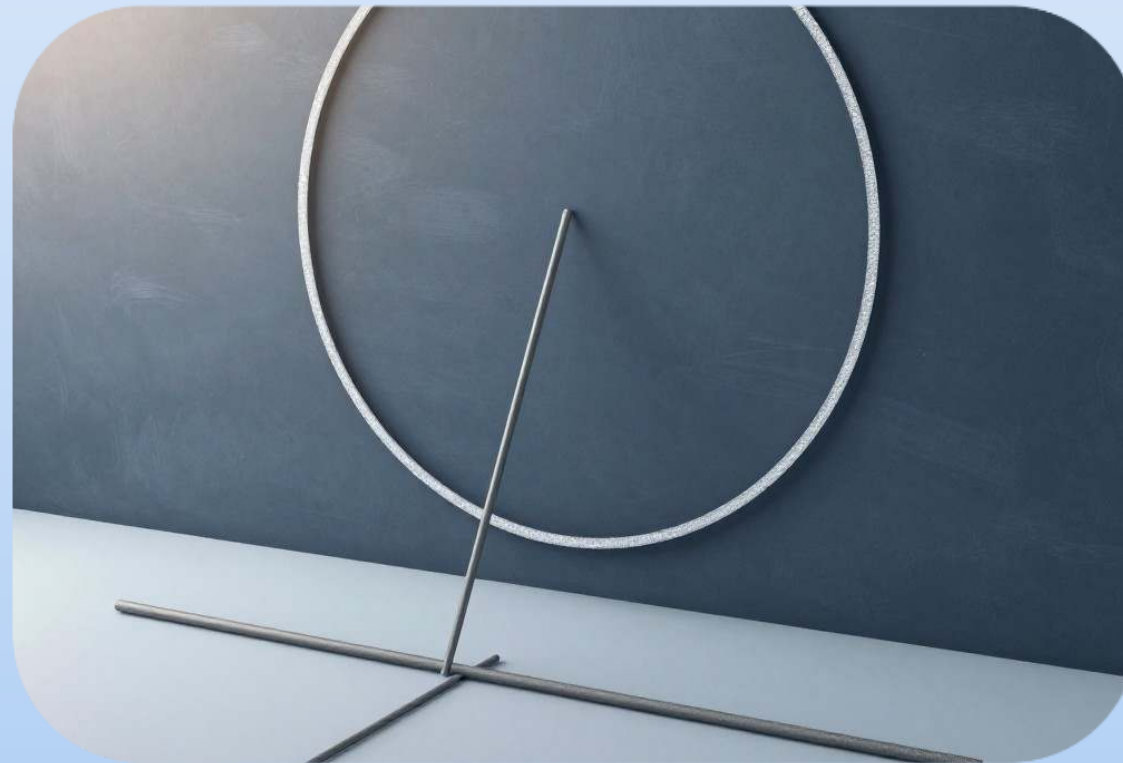
Точка Р подсказывает, где искать части отрезков

На чертеже отмечают точку Р и точки пересечения с окружностью. По месту Р сразу видно: какие отрезки относятся к внутренним частям, а какие — к внешним. Это помогает правильно выбрать обозначения перед подстановкой в формулу.



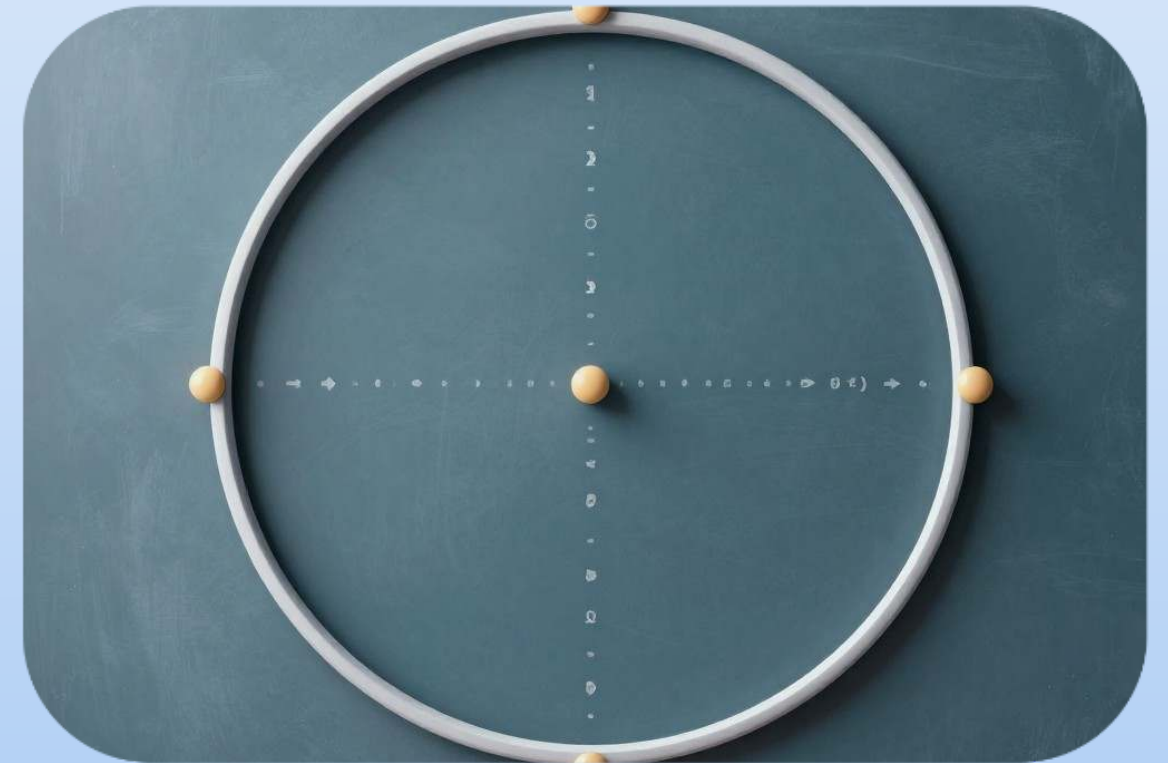
Одна и та же линия может играть разную роль

Иногда на рисунке две прямые похожи по виду, но одна из них может быть секущей, а другая — касательной. Подписи позволяют не спутать случаи и выбрать нужное произведение отрезков. Аккуратность здесь экономит время на исправления.



Неизвестный отрезок «привязывают» к нужному месту

Когда неизвестная величина показана прямо на рисунке, легче проверить себя: она действительно относится к тем двум сторонам, которые участвуют в произведении. Хороший чертёж снижает риск включить в формулу лишний фрагмент секущей или хорды.



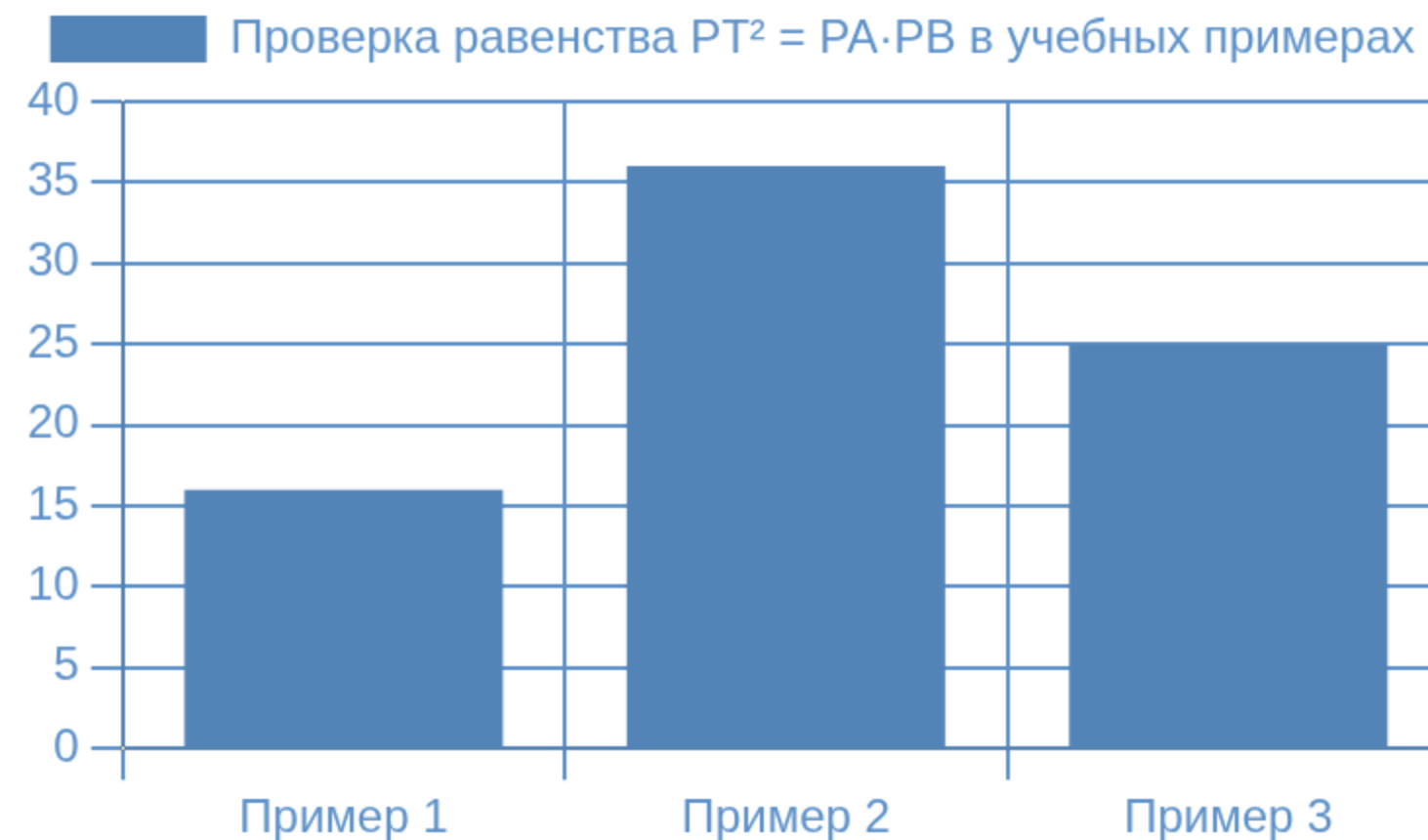
В примере с пересечением хорд
используют равенство $AP \cdot PB = CP \cdot PD$: $3 \cdot 5 = 2 \cdot PD$, значит $PD = 7,5$ см, а $15 = 15$.

7,5 см

Значение получается из произведений частей хорд и подтверждается проверкой равенства.

Числа взяты из примера в слайде (условие для демонстрации теоремы о пересекающихся хордах).

Сравнение вычислений для секущей и касательной



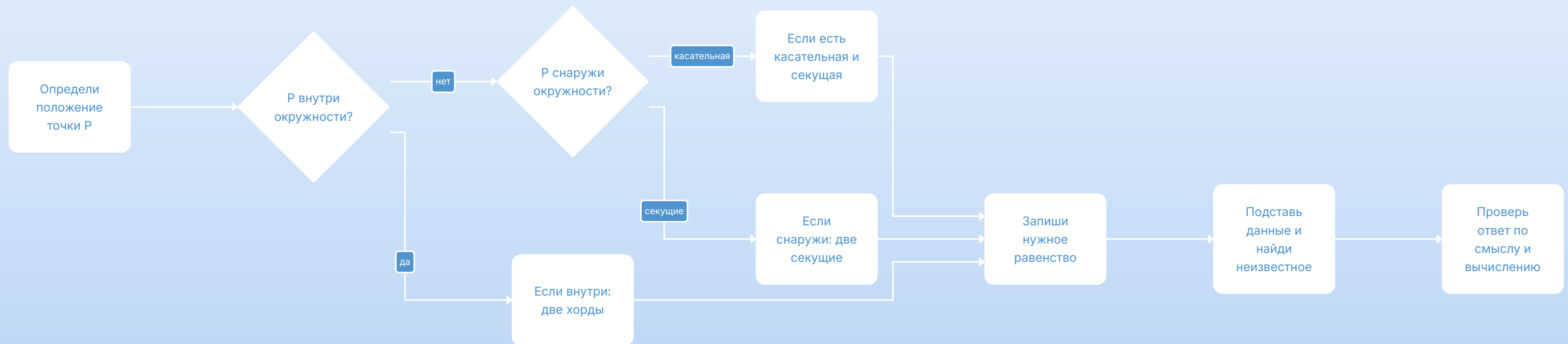
В каждом столбце показано PT^2 . Это значение совпадает с произведением двух частей секущей, если отрезки обозначены правильно и берутся именно нужные фрагменты.

Если верно выбраны внешняя часть секущей и вся секущая, то получаем одно и то же число: квадрат касательной и произведение отрезков. Ошибка обычно связана с выбором частей.

Подборка учебных примеров по формуле $PT^2 = PA \cdot PB$ (для демонстрации совпадения значений).

Алгоритм решения задач на окружность

Пошаговый выбор формулы по положению точки и прямых относительно окружности.



Типичные ошибки в 7 классе



Частая ошибка — перепутать хорду и секущую: если линия пересекает окружность в двух точках, она может быть секущей, но для формулы хорд требуется именно пересечение двух хорд в точке.



Ещё одна ловушка — путаница между внутренней и внешней частью секущей. В произведение нужно подставлять именно внешние части и всю длину секущей, а не «что ближе» на рисунке.



Нередко неверно выбирают формулу: касательная и секущая нельзя заменять двумя секущими. Ошибки в подстановке возникают и при включении в произведение не тех отрезков, что указаны в обозначениях.

Что объединяет все соотношения темы



Все формулы темы связывают взаимное положение прямой относительно окружности с длинами частей, которые получаются на этой прямой.



В каждом варианте ответ выражается через произведение двух отрезков: либо пары частей пересекающихся хорд, либо пары частей для двух секущих, либо квадрат касательной через произведение.



Эти зависимости помогают не только вычислять неизвестные длины, но и контролировать решение: корректность можно проверять равенством произведений на чертеже и в числах.

Короткий итог: выбирай случай — и умножай длины

При пересечении прямых с окружностью в 7 классе встречаются три основных соотношения: для пересекающихся хорд, для двух секущих из одной внешней точки и для касательной с секущей. Во всех случаях работает произведение отрезков, а выбор формулы зависит от расположения точек.