



Периодичность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

У синуса и косинуса значения повторяются регулярно: это отражает движение по единичной окружности.



Где в школьной геометрии «прячется» периодичность

Периодичность проявляется, когда мы работаем с координатной плоскостью, углами в радианах и единичной окружностью. Синус и косинус помогают строить графики и решать уравнения, а потому важны и в алгебре, и в геометрии, и в смежных науках.



2π

Для этих функций минимальный положительный период равен 2π .

Школьный курс тригонометрии, стандартные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Функция $f(x)$ периодическая, если существует $T > 0$: $f(x + T) = f(x)$ при всех x . Наименьшее положительное T — основной период; для $\sin x$ и $\cos x$ он равен 2π .

Единица окружности и происхождение периодичности

.1

Полный оборот как геометрический «толчок»

Точка на единичной окружности задаёт значения тригонометрических функций через свои координаты. После поворота на 2π радиан она возвращается в исходное положение, то есть угол «обнуляется» по форме графика.

.2

Почему именно координаты дают $\sin$ и $\cos$

Координата y этой точки равна $\sin x$, а координата x — $\cos x$. Поэтому при увеличении угла на 2π повторяются не только координаты, но и вся структура значений: нули, максимумы и минимумы.



График функции $y = \sin x$ на одном периоде

За один отрезок длиной 2π синус проходит полный цикл: от 0 к 1, затем обратно через 0 к -1 и снова в 0.

Так как форма на $[0; 2\pi]$ полностью повторяется, период синуса можно распознавать по расстоянию между одинаковыми «фазовыми» точками.

Данные основаны на стандартных значениях $\sin x$:
 $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin \pi = 0$,
 $\sin(3\pi/2) = -1$, $\sin 2\pi = 0$
(школьный курс тригонометрии).

График функции $y = \cos x$ на одном периоде

Косинус стартует с максимума 1 при $x = 0$, затем спускается до нуля при $\pi/2$ и достигает минимума -1 при π .

Поскольку к $x = 2\pi$ функция возвращается в то же положение (значение и «наклон» фазы), повторение происходит ровно через 2π .

Данные основаны на стандартных значениях $\cos x$: $\cos 0 = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$, $\cos 2\pi = 1$ (школьный курс тригонометрии).

Опорные точки функций $\sin x$ и $\cos x$

Набор ключевых углов задаёт «каркас» графиков: по нему удобно строить, проверять период и сравнивать две функции на одном промежутке.

Точки совпадают по амплитуде ± 1 и подтверждают общую периодичность: после сдвига на 2π значения возвращаются в исходный набор.

Школьный курс тригонометрии: значения $\sin$ и $\cos$ для стандартных углов.

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
$3\pi/2$	-1	0
2π	0	1

Почему период равен именно 2π

.1

При переходе от x к $x + 2\pi$ на единичной окружности происходит полный оборот. Точка возвращается в то же место, а значит, повторяются и $\sin$, и $\cos$.

.2

Сдвиг на π не даёт совпадения графика: синус меняет знак, а косинус тоже меняет знак ($\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$).

.3

Поскольку меньший сдвиг не возвращает исходные значения, наименьший общий период для $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π .

Горизонтальный сдвиг графиков и сохранение периода

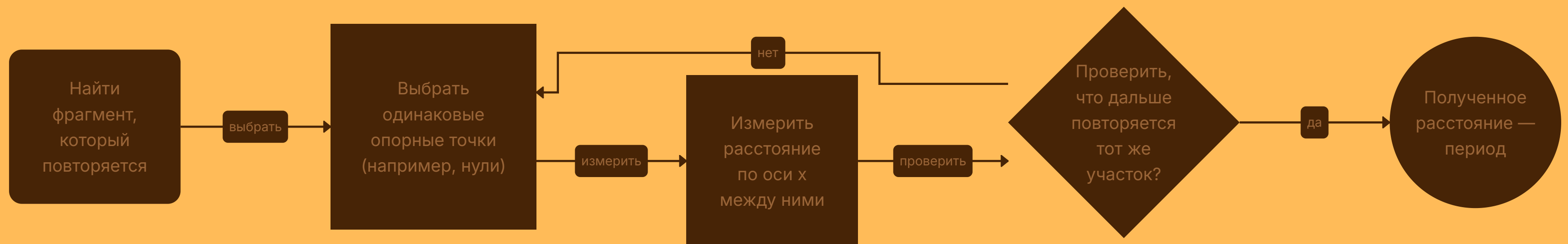


- Функции вида $y = \sin(x + a)$ и $y = \cos(x + a)$ сохраняют период 2π при любом постоянном a : повторяется не абсолютное положение, а длина «одного полного цикла».

- Горизонтальный сдвиг передвигает нули, максимумы и минимумы вдоль оси x , но не меняет масштаб по углу, поэтому и участок графика, который затем повторится, остаётся той же длины.

Как определить период по графику

Пошаговый алгоритм для $\sin x$ и $\cos x$ (и их сдвигов по оси x)



Сравнение функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

.1

Обе функции заданы при любых действительных x и ограничены: их значения всегда попадают в диапазон от -1 до 1 . Главное совпадение — одинаковая повторяемость, основной период равен 2π .

.2

Различие определяется фазовым сдвигом. Именно он приводит к тому, что максимум косинуса у $x = 0$ соответствует максимуму синуса, но смещённому на четверть периода.

.3

Эту связь удобно записать формулой $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Поэтому графики похожи по форме, но их ключевые точки — нули, максимумы и минимумы — расположены относительно оси x по-разному.

Значения $\sin x$ в точках одного периода

Эти значения отражают амплитуду 1 и показывают, как синус проходит через ноль трижды на отрезке длиной 2π .

По столбцам видно, что синус возвращается к исходному значению при $x = 2\pi$, то есть повторяет форму с периодом 2π .

Данные по точкам: $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ (учебные значения $\sin x$).

Периодичность и чётность функций

.1

Функция $y = \sin x$ является нечётной: при замене x на $-x$ значение меняет знак, потому что $\sin(-x) = -\sin x$. На графике это соответствует симметрии относительно начала координат.

.2

Функция $y = \cos x$ — чётная, так как $\cos(-x) = \cos x$. Следовательно, её график зеркально отражается относительно оси y , сохраняя значения без изменения знака.

.3

Чётность и периодичность — разные свойства: период задаёт длину повторения, а чётность описывает симметрию при отражении аргумента. Их сочетание делает графики «упорядоченными» и предсказуемыми.

.4

Зная эти признаки, легче строить и проверять графики: синус начинается с нуля и «переворачивается» на противоположной стороне, а косинус имеет значение 1 при $x = 0$ и не меняет знак при отражении.

2π

Такой сдвиг оставляет значения синуса и косинуса неизменными для любого аргумента.

Идентичности тригонометрии: формулы сложения и значения $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.

Формулы сложения дают $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ и $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Поэтому период 2π подтверждается не только окружностью, но и вычислениями.

Общая повторяемость через интервалы длиной 2π

На отрезке от -4π до 4π графики проходят полный цикл четырежды: форма, нули и экстремумы воспроизводятся без изменения масштаба.

Повторение на равных по длине участках подтверждает устойчивость периода как фундаментального свойства функций.

Схематические опорные точки для иллюстрации периода (учебные свойства $\sin x$ и $\cos x$).

Практическое значение периодичности



Маятник: движение с «памятью» о своём цикле

Когда маятник колеблется, один период — это полный цикл «от максимума до максимума». Именно поэтому говорят о повторении величины через фиксированный промежуток времени. Синусоида удобна как математическая модель такого колебательного процесса.



Звук и электрический ток: период как основа ритма

В звуковых волнах и переменном электрическом токе изменения регулярно возвращаются к исходному состоянию. Для описания таких процессов используют гармонические функции: синус и косинус задают форму колебаний, а период определяет частоту повторения. Поэтому графики служат и в измерениях, и в расчётах.

Сравнительная таблица свойств $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Сводим ключевые характеристики: определённость, диапазон значений, период, а также то, как функции ведут себя при замене x на $-x$.

Таблица показывает: период у обеих функций одинаков, а различие проявляется в симметрии (нечётность синуса и чётность косинуса) и начальном значении.

Учебные свойства тригонометрических функций.

Свойство	$\sin x$	$\cos x$
Область определения	Все x	Все x
Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Период	2π	2π
Чётность	Нечётная	Чётная
Значение при $x = 0$	0	1

.1

Частая ошибка — принять π за период, потому что знаки значений могут казаться повторяющимися. Однако при сдвиге на π меняется знак: $\sin(x + \pi) = -\sin x$ и $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

.2

Ещё одна проблема возникает при просмотре рисунка без учёта масштаба по оси x . Расстояние «между соседними точками» может быть меньше или больше самого периода — всё решают единицы измерения на графике.

.3

Иногда путают период с расстоянием между нулями или экстремумами. У синуса интервалы между некоторыми опорными точками действительно похожи, но полный повтор графика происходит только через 2π .

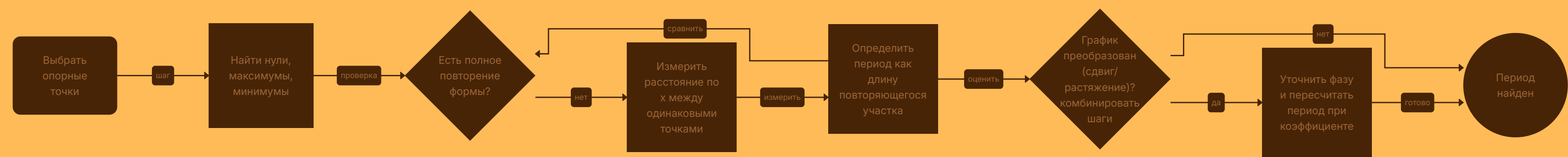
.4

Чтобы избежать ошибок, ищите участок, который целиком воспроизводит форму: положение нулей, максимумов и минимумов должно совпасть после сдвига по оси x .

Типичные ошибки при определении периода

Алгоритм анализа графика синуса или косинуса

Процесс определения периода по графику и опорным точкам для базовых функций и их горизонтальных сдвигов.



Периодичность — как «якорь» для синуса и косинуса

Периодичность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ задаётся полным оборотом точки на единичной окружности и повторением графика через 2π . Одинаковый основной период сочетается с разными симметриями.