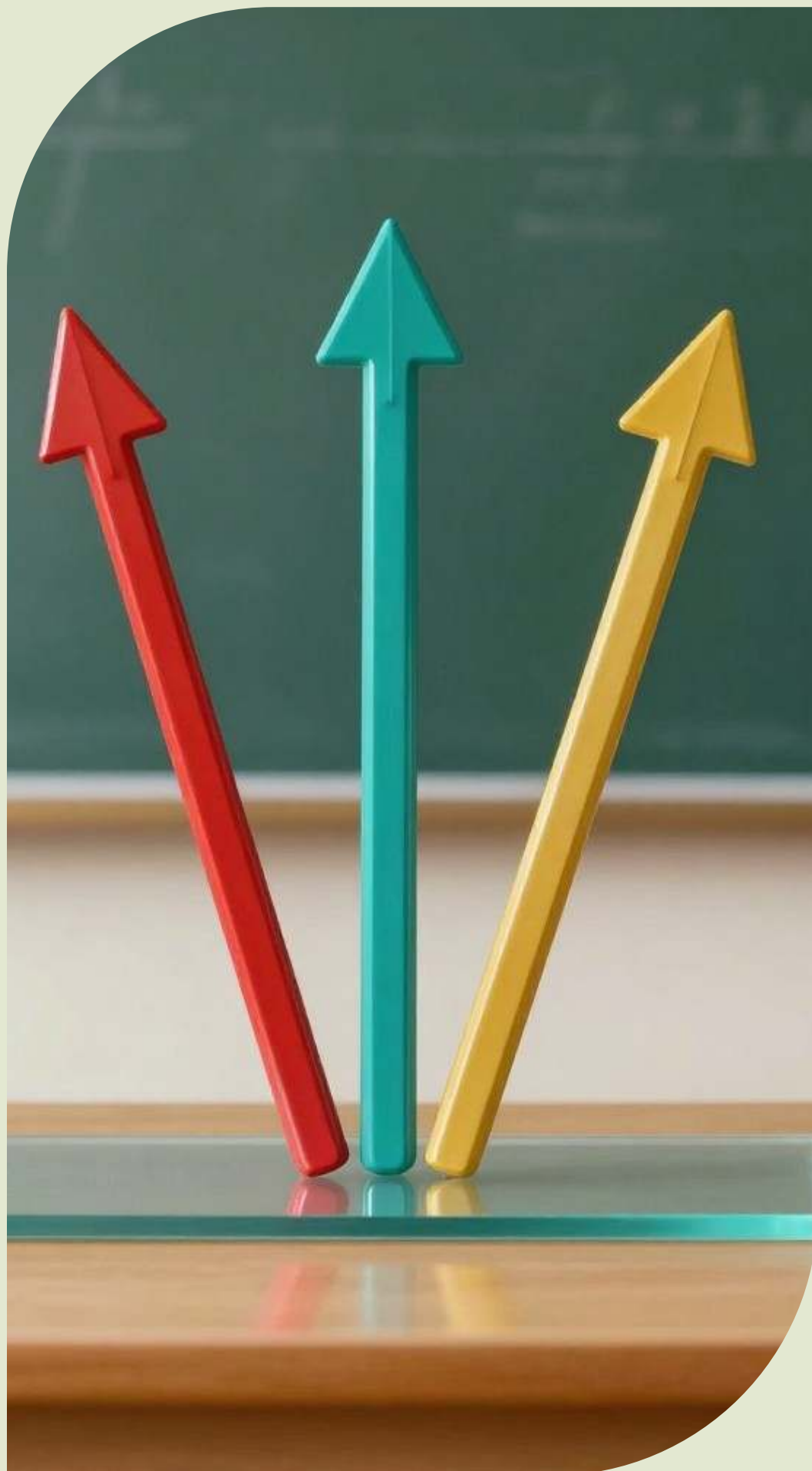




Компланарные векторы в геометрии 10 класса

Разберём, как распознать компланарность, проверить её координатно и применить в стереометрии.

Место темы в курсе стереометрии

В 10 классе компланарность связывает векторы с пространством и подготавливает к работе с плоскостями, сечениями и координатным методом. Ранее вы освоили вектор, координаты, длину, коллинеарность и действия с векторами.



Определение компланарных векторов

01

Компланарные векторы — это векторы, которые можно расположить так, чтобы их направления лежали в одной плоскости. Тогда геометрическая «картина» становится плоской, а не пространственной.

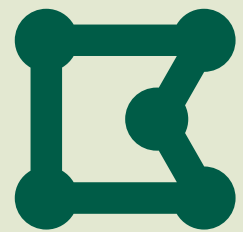
02

Если векторы параллельны одной и той же плоскости, то они также считаются компланарными. Направления при таком подходе фактически задают одну и ту же плоскостную ориентацию в пространстве.

03

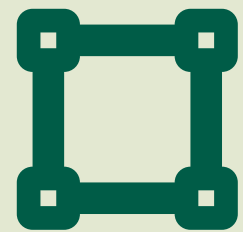
Любые два вектора всегда компланарны: через два направления можно провести плоскость. Для трёх и более векторов уже требуется проверка — плоскость может не «собраться» автоматически.

Геометрический смысл понятия



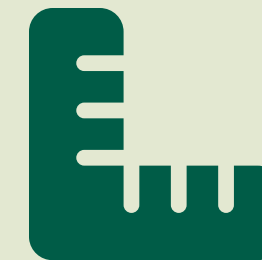
Переход от пространства к плоскости

Компланарность показывает, что система векторов ведёт себя как плоская. Если три направления можно уложить в одну плоскость, то задачи о взаимном расположении упрощаются и приближаются к плоской геометрии.



Достаточно двух независимых направлений

В одной плоскости положение любого третьего направления задаётся через два неколлинеарных вектора этой плоскости. Поэтому компланарные векторы можно рассматривать как выражаемые через две «опорные» прямые.



Связь с фигурами и сечениями

Поскольку компланарные векторы задают плоскость, тема напрямую связана с параллелограммами, треугольниками и плоскими сечениями многогранников. Это помогает переходить от векторов к геометрии тел.

Проверка компланарности трёх векторов

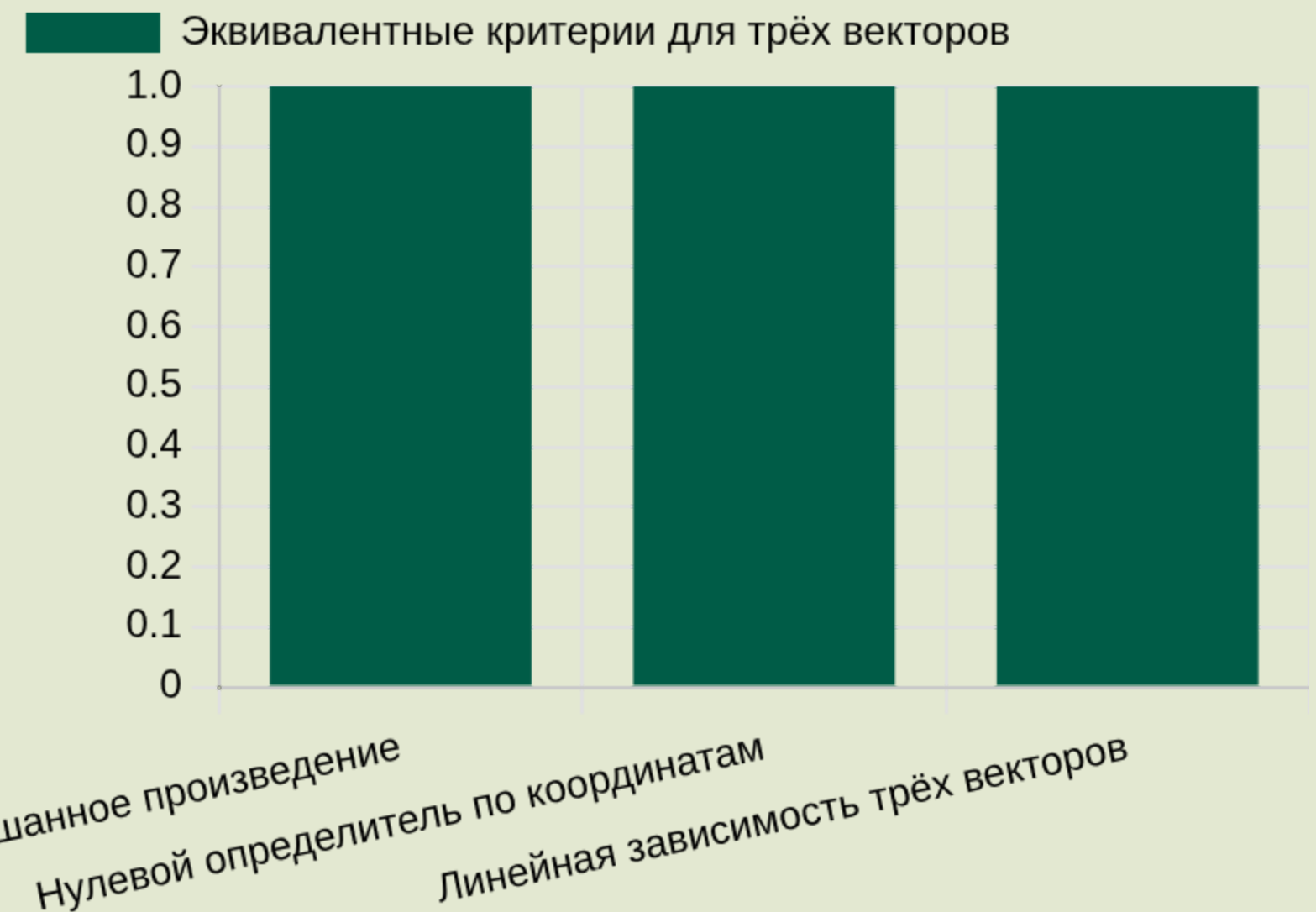
Данные: три вектора в пространстве, заданные координатами



Критерии компланарности в одном взгляде

Если вычисления дают один и тот же «нулевой» результат, то это не частный случай: все критерии работают одинаково полно.

Обобщение школьных критериев для трёх векторов (определитель, смешанное произведение, линейная зависимость).



Равенство нулю означает, что объём, который «задают» три направления, вырождается, и векторы лежат в одной плоскости.

Основные признаки компланарности

Условие	Что вычисляют	Вывод при нуле
компланарность	смешанное произведение	векторы в одной плоскости
компланарность	определитель 3×3	векторы в одной плоскости
компланарность	линейная зависимость	один выражается через два
компланарность	объёмный критерий	параллелепипед вырождается

Для трёх векторов все признаки эквивалентны: нулевой результат в любом из критериев гарантирует компланарность.

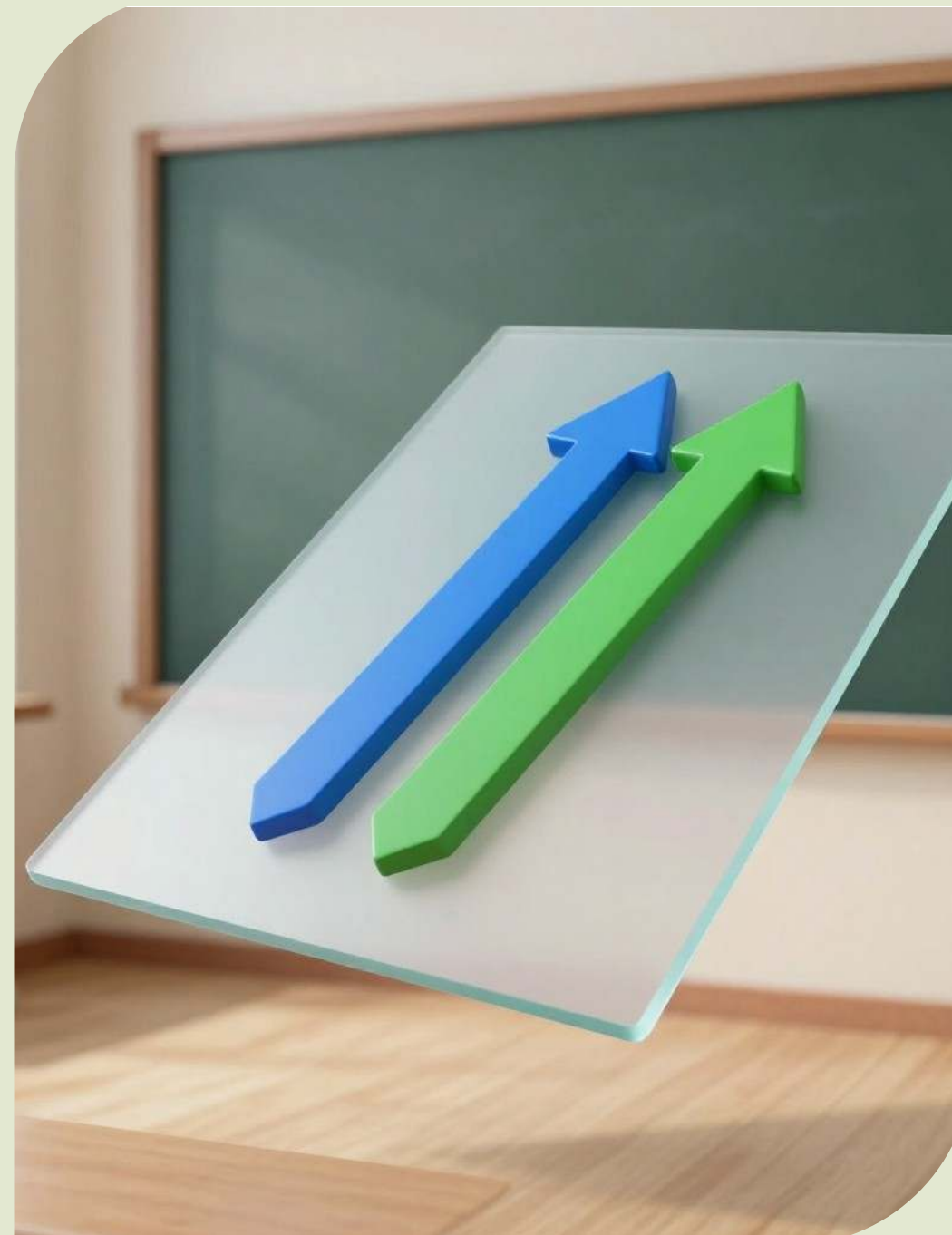
Сопоставление четырёх эквивалентных критериев для трёх векторов.

Критерии компланарности для трёх векторов в школьной стереометрии.

Компланарность на чертеже в пространстве

Что видно на рисунке

На изображении показана плоскость и несколько векторов, направленных внутри неё. В то же время изображён вектор, который выходит за пределы плоскости, то есть задаёт другое пространственное направление.



Почему это считается компланарностью

Векторы, лежащие в одной плоскости, компланарны; то же верно и для параллельных направлений относительно этой плоскости. Если два вектора пересекаются в одной плоскости, вместе с третьим подходящее «плоское» расположение тоже сохраняется.



0

Нулевое значение указывает на вырожденность пространственного набора направлений и на наличие зависимости между тремя векторами.

Теоретическая связь компланарности и линейной зависимости для трёх векторов.

Для трёх компланарных векторов один выражается через два других, значит они линейно зависимы. Обратное утверждение тоже верно: линейная зависимость означает компланарность.

Сравнение компланарных и некопланарных наборов

Компланарный набор даёт нулевые значения в критериях (определитель, смешанное произведение), а некопланарный — ненулевые и «разворачивает» объём.

Сравнение по стандартным критериям компланарности для трёх векторов.



Такое различие помогает быстро понять взаимное расположение без громоздких чертежей: критерий «нуля» работает как надёжная граница.

Координатный критерий компланарности

1.

Пусть заданы векторы $a(x_1, y_1, z_1)$, $b(x_2, y_2, z_2)$, $c(x_3, y_3, z_3)$. Если они компланарны, то их направления можно описать одной плоскостью, а это отражается в координатной форме.

2.

Составьте определитель 3×3 из координат векторов (в выбранном порядке как столбцы или строки). Условие компланарности записывается как равенство нулю этого определителя: $\det=0$.

3.

Если определитель не равен нулю, векторы образуют «объёмный» набор направлений и общей плоскости для них не существует. Критерий удобен тем, что не требует чертежа и работает в типовых школьных задачах.

Формулы, которые используются при проверке

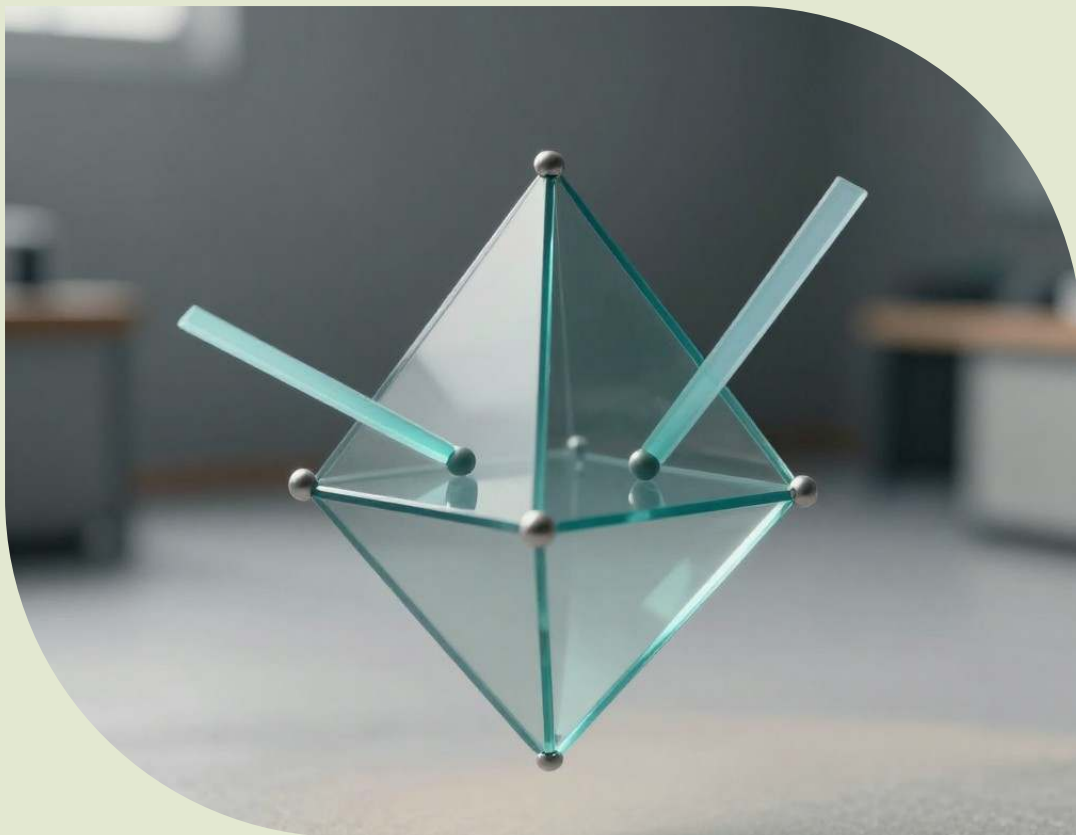
Сравните три эквивалентных подхода для трёх векторов: через определитель, через смешанное произведение и через критерий линейной зависимости. Отдельно отметим смысл ненулевого результата — он означает отсутствие общей плоскости и ненулевой объём.

Учебная программа по теме векторов и плоскостей (школьный курс геометрии).

Что проверяем	Условие	Вывод при результате
Определитель	$\det(x_1 \ x_2 \ x_3; y_1 \ y_2 \ y_3; z_1 \ z_2 \ z_3)=0$	Компланарность
Смешанное произведение	$(a,b,c)=0$	Компланарность
Линейная зависимость	$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, не все $\alpha, \beta, \gamma = 0$	Компланарность
Ненулевой результат	$\det \neq 0$ или $(a,b,c) \neq 0$	Некомпланарность, ненулевой объём

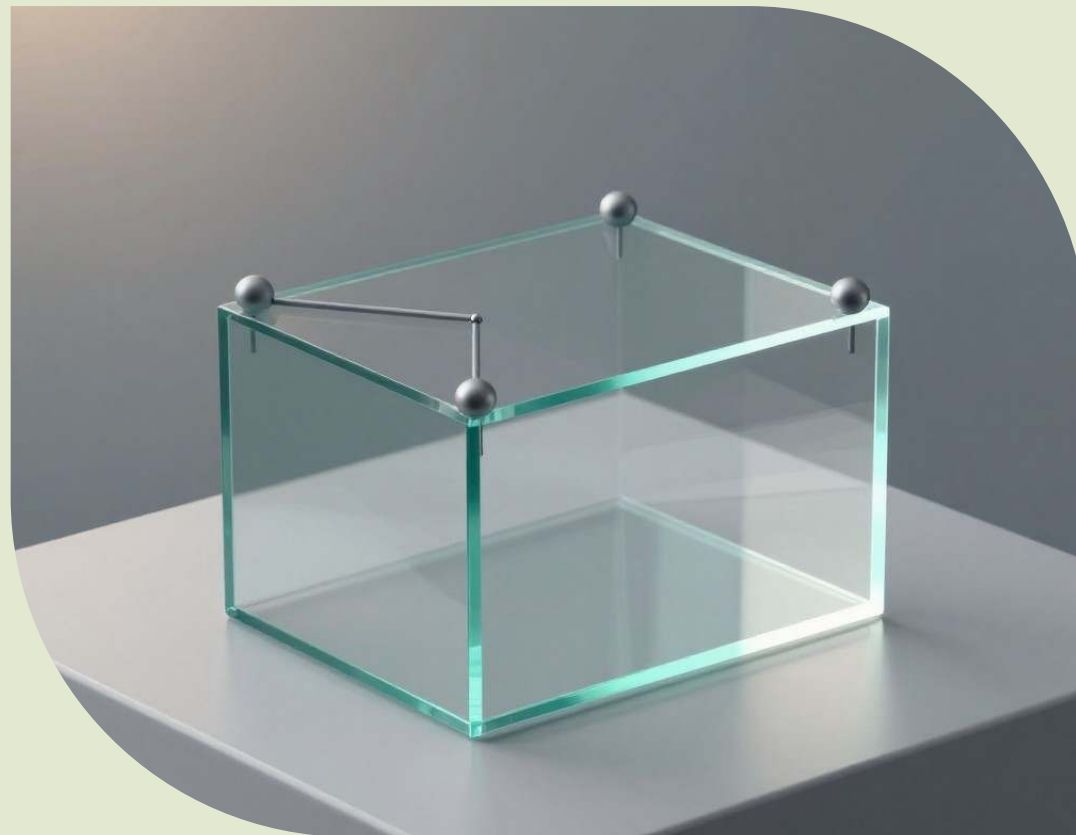
Три записи фактически выражают одну геометрическую ситуацию: для трёх векторов признак «объёма» и признак «плоскости» согласованы — ноль соответствует компланарности.

Типовые задачи по теме в школьной геометрии



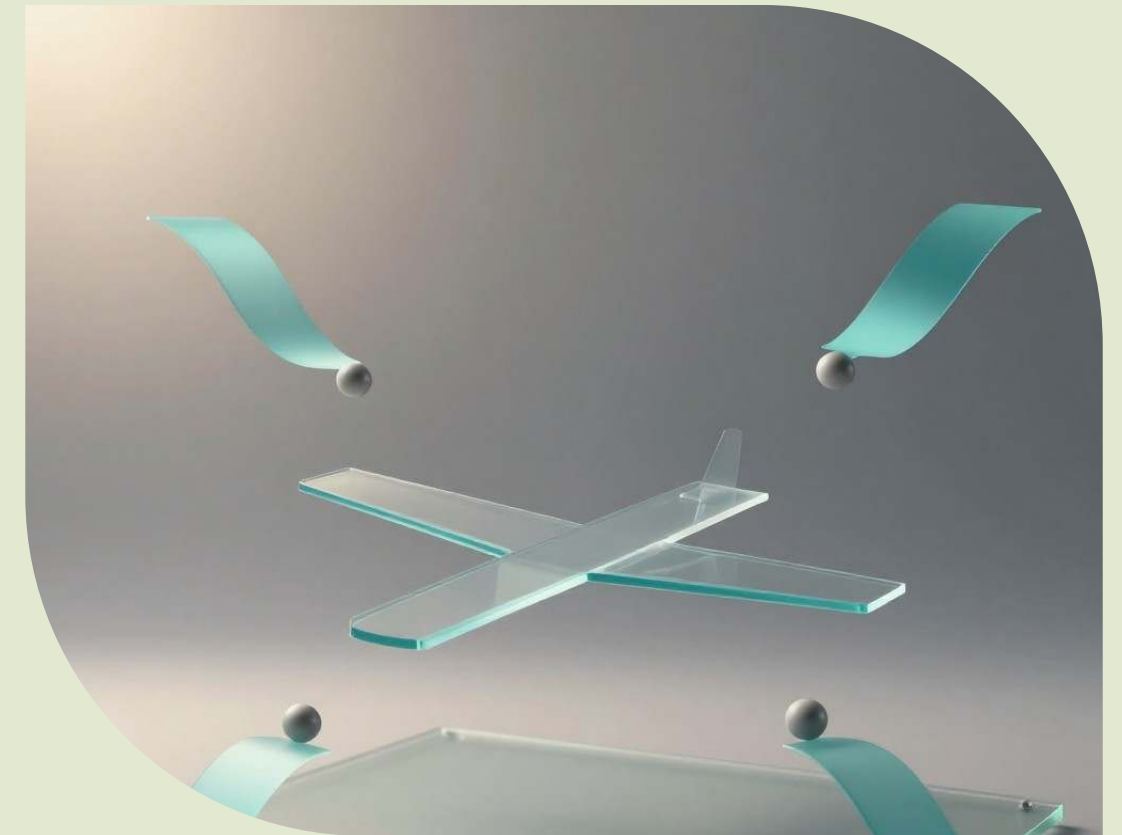
Тетраэдр и «проверка по векторам»

В задачах по тетраэдру часто требуется понять, лежат ли направления рёбер в одной плоскости. Вы берёте векторы, составленные по координатам вершин, и проверяете компланарность, чтобы обосновать существование плоского сечения.



Параллелепипед: грань «замыкает» направления

Когда рассматривают параллелепипед, компланарность проявляется в связях между рёбрами одной грани. По векторам, направленным вдоль рёбер, обычно доказывают, что выбранные точки принадлежат одной плоскости и что полученная фигура является сечением.



Плоское сечение: найти плоскость из векторных данных

Сечения многогранников часто формулируются как вопрос о плоскости, задаваемой тремя направлениями. Если векторы компланарны, плоскость существует, а по координатам точек можно оформить её описание и дальше использовать для вычислений углов и длин.

Алгоритм решения задач на компланарность

Логика проверки для трёх векторов: сначала переводим геометрию в координаты, затем оцениваем результат.



Почему компланарность важна в приложениях

Компланарность помогает «свести» пространственную ситуацию к плоской модели: когда общая плоскость подтверждена, дальше расчёты становятся проще и нагляднее.

Схема учебного обсуждения
(качественные соответствия, без статистики).



Если направления действительно компланарны, плоская интерпретация даёт корректные преобразования и сечения; при некомпланарности требуется учитывать третий «степень свободы».

Частые ошибки при изучении темы

01

Путают компланарность и коллинеарность. Коллинеарные векторы лежат на одной прямой, а компланарные — в одной плоскости. По ошибке в определении критерий применяют к неправильному геометрическому случаю.

02

Утверждают, будто компланарными могут быть только два вектора. На самом деле любые два вектора всегда компланарны, а проверка нужна именно для трёх и более векторов, когда общая плоскость не гарантирована.

При вычислении определителя допускают технические промахи. Перестановка столбцов меняет знак определителя, а неправильные координаты в строках или столбцах способны привести к неверному выводу о компланарности.

03

Ещё одна частая проблема — выбор векторов «не того набора». Если векторы составлены не из тех точек или направления взяты с неверными коэффициентами, смешанное произведение и определитель перестают отражать нужную плоскость.

04

Связь с площадью и объёмом



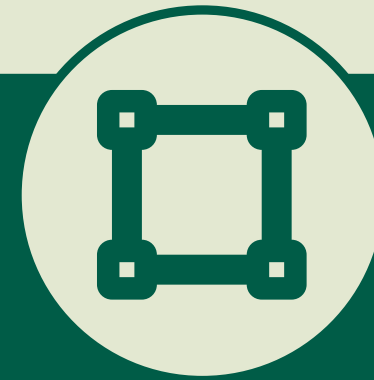
Нулевой объём как сигнал плоскости

Если три вектора компланарны, построенный на них параллелепипед «сплющивается», и его объём равен нулю. Это напрямую следует из смешанного произведения: оно тоже обращается в ноль.



Ненулевой объём соответствует «пространству»

Ненулевое смешанное произведение означает, что векторы не ограничиваются одной плоскостью: они задают пространственный параллелепипед с положительным объёмом. Тогда ни общий перпендикуляр, ни плоское объяснение не подходят.



Переход от плоских фигур к пространственным

В плоскости через векторные описания легко находить площади параллелограмма и треугольника, а в пространстве — объём. Понимание компланарности помогает «переключаться» между этими уровнями задач.

Плоские и пространственные наборы векторов

В учебной практике удобно рассматривать тройку признаков как «проверочный чек-лист»: при компланарности они подтверждают друг друга, а при некомпланарности — конфликтуют.

Схематическое представление соответствий между признаками (методическая иллюстрация).

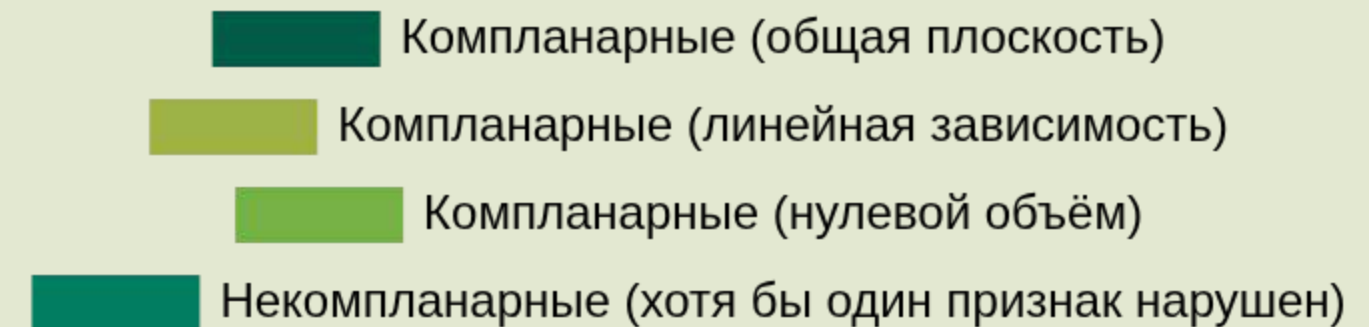


Диаграмма подчёркивает надёжность критерия объёма: для трёх векторов нулевой объём согласуется с существованием общей плоскости и линейной зависимостью.

Примеры использования компланарности в задачах

1. В стереометрии компланарность помогает обосновать, что точки действительно лежат в одной плоскости. Обычно это делается через векторы, построенные по координатам вершин или заданным направляющим.

2. При работе с многогранниками компланарность применяют для сечений: сначала выбирают векторы, характеризующие рёбра и направления, затем проверяют общую плоскость, а после — корректно формируют контур сечения.

3. В координатных задачах критерий ускоряет вычисления: он позволяет проверять взаимное расположение направлений, находить неизвестные координаты по условиям принадлежности плоскости и избегать лишних построений.



Компланарность — универсальный мост между плоскостью и пространством

Компланарные векторы — базовое понятие стереометрии 10 класса: для трёх векторов эквивалентны общая плоскость, нулевой определитель, нулевое смешанное произведение и линейная зависимость. Это позволяет решать задачи на сечения, объёмы, координаты и пространственные построения.

