

Уравнение окружности

Окружность на координатной плоскости задаётся центром и радиусом: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.





+ Что уже известно и зачем нужна эта тема

Вам помогают координатная плоскость, расстояние между точками и радиус. Окружность — это набор точек на одном расстоянии от центра. Уравнение связывает картинку с алгеброй: находит центр и радиус и проверяет точки.



Окружность как множество точек

🎯 Центр и радиус

Центр обозначают $C(a; b)$, радиус — r . Любая точка $M(x; y)$ на окружности находится на одинаковом расстоянии r от центра, то есть $CM=r$ — это главное условие.



Точки на окружности

Если точка M лежит на окружности, то её расстояние от центра точно равно r . В координатной записи это приводит к равенству, которое превращается в стандартное уравнение окружности.



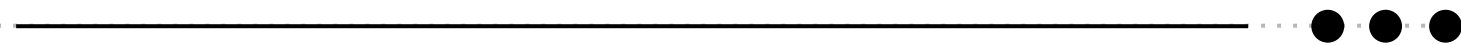
Внутри и снаружи

Сравнивая расстояние CM с радиусом r , получаем геометрию на языке чисел: внутри окружности $CM < r$, снаружи $CM > r$. Поэтому уравнение сразу помогает понять положение точки.



Схема с осями и отрезком радиуса

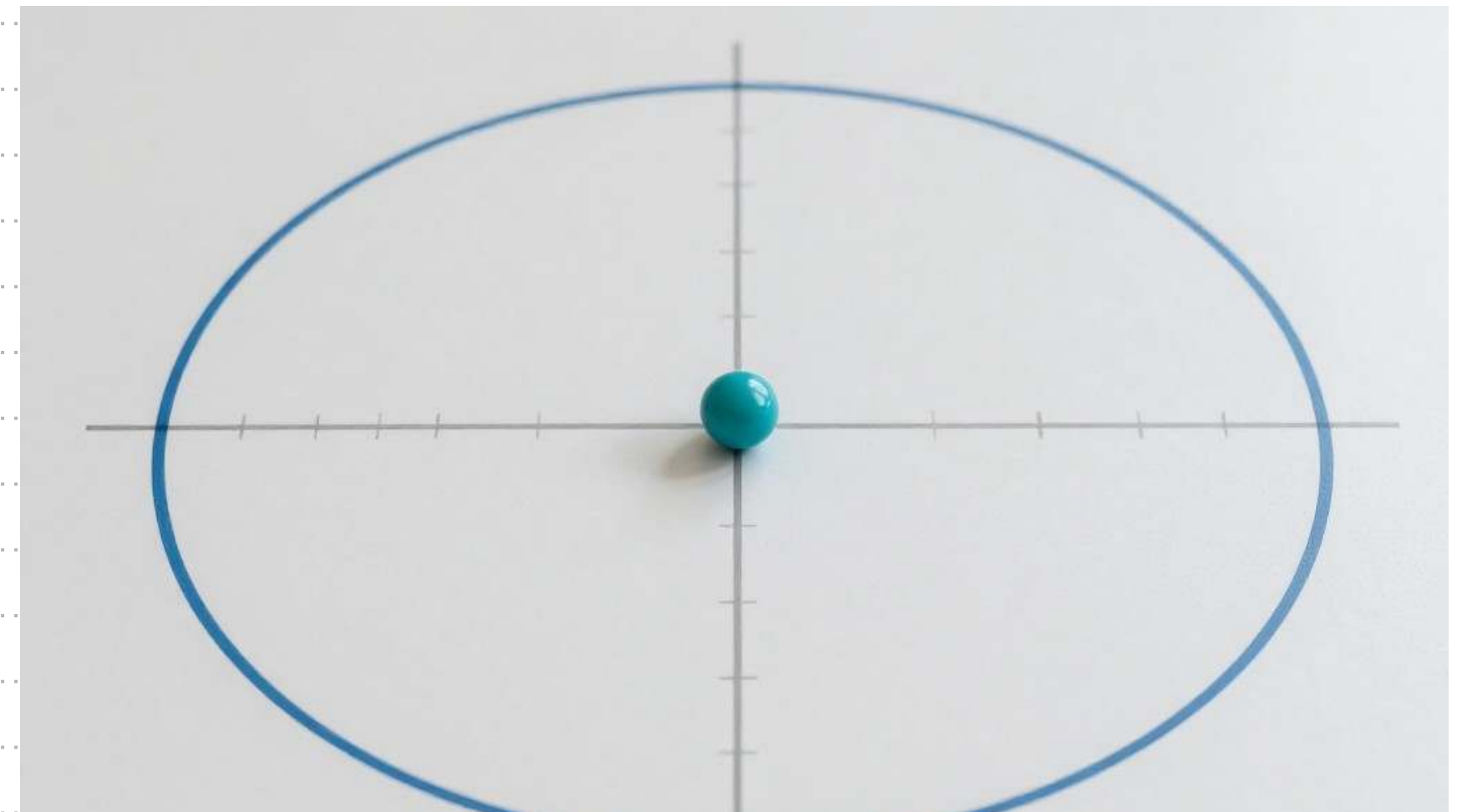
Рассматриваем оси координат, центр $C(a; b)$ и точку $M(x; y)$ на окружности. Отрезок CM — это радиус r . Если опустить перпендикуляры от C и M на оси, можно получить прямоугольный треугольник.

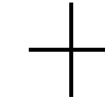


Связь с теоремой Пифагора

По координатам разности по осям дают катеты треугольника: $(x-a)$ и $(y-b)$. Тогда длина CM выражается формулой расстояния через теорему Пифагора: $CM^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

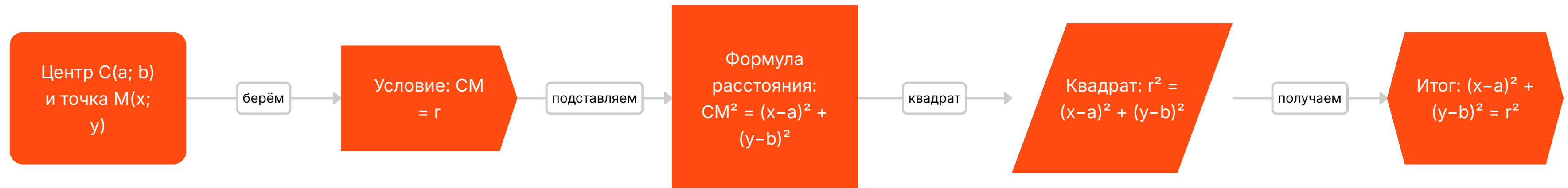
+ Координатная модель окружности





От геометрии к формуле окружности

Цепочка шагов: центр и точка на окружности → условие расстояния → преобразование





Стандартное уравнение окружности

Стандартный вид: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Числа a и b задают координаты центра $C(a; b)$, а r — радиус. Это уравнение сразу “говорит”, где расположена окружность.

Правая часть равна квадрату радиуса, поэтому она неотрицательна. Даже если радиус маленький, r^2 всё равно ≥ 0 . Благодаря этому уравнение корректно описывает окружность на координатной плоскости.

Если $r=0$, то $r^2=0$ и уравнение сводится к $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$. Тогда окружность превращается в одну точку — центр $C(a; b)$.



Как меняются окружности при разных параметрах

При одном и том же центре окружность “раздувается” с ростом r : меняется размер, а форма остаётся той же — это именно геометрическое влияние радиуса.



Когда меняется центр при фиксированном r , окружность просто перемещается по плоскости. Радиус отвечает за масштаб, координаты центра — за положение.

Схематические данные для сравнения параметров: $r=2, 4, 6$ (один центр) и те же r при разных центрах.



Уравнение, центр и радиус: примеры

Уравнение	Центр	Радиус
$x^2 + y^2 = 25$	(0; 0)	5
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$	(3; -2)	4
$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$	(-1; 4)	3

Учебные преобразования стандартного уравнения окружности.



По стандартному виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ сразу читаются координаты центра и радиус. Проверка не требуется: центр и r “закладываются” в скобках и в правой части.

Во всех трёх примерах видно: a и b считываются из знаков внутри скобок, а r — как квадратный корень из правой части.



0

Тогда значение r равно нулю, и окружность вырождается в одну точку — центр.

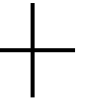
Когда центр совпадает с началом координат, получаем запись $x^2 + y^2 = r^2$. А при $r=0$ остаётся одна точка, поэтому строить “окружность” не нужно.

Общее правило из стандартного уравнения окружности.





Как найти центр и радиус по уравнению



В выражении $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ центр читается по знакам в скобках: $x-a$ соответствует координате a , а $y-b$ соответствует координате b . Главное — не перепутать знак.

Радиус берут из правой части: если там стоит r^2 , то r равен квадратному корню. Например, при $r^2=49$ получаем $r=7$, потому что радиус — величина неотрицательная.

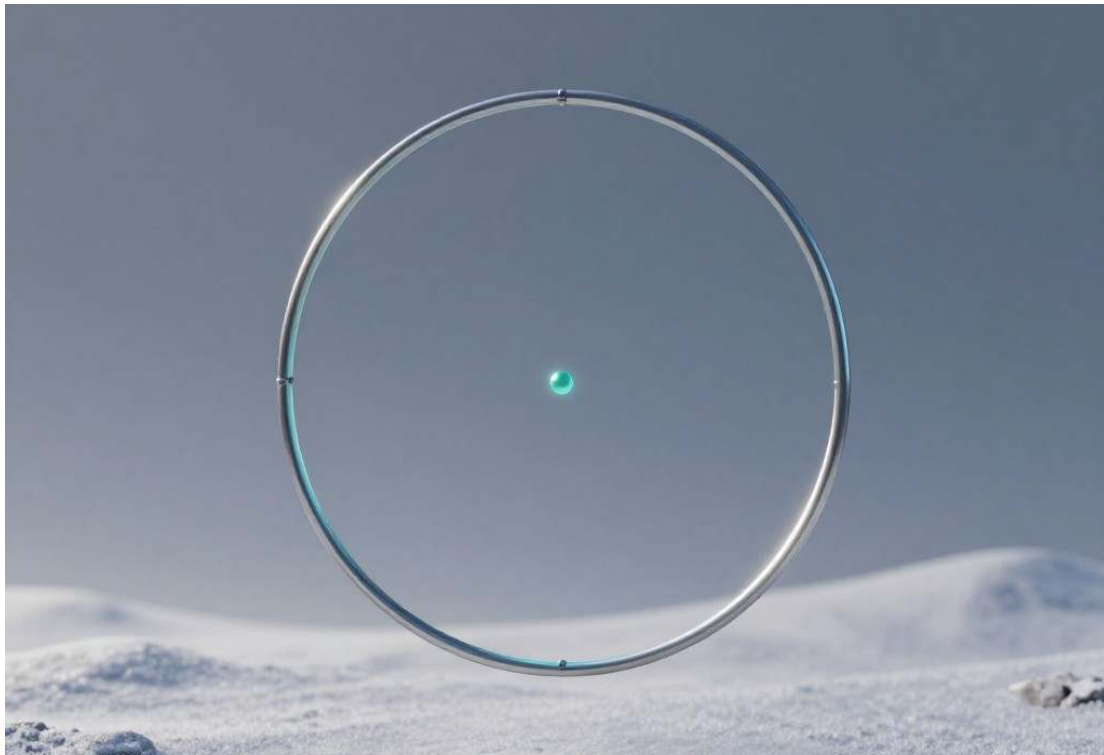
После нахождения a , b и r удобно проверить ответ смыслом: радиус не должен быть отрицательным, а центр — точка $C(a; b)$. Такой порядок экономит время при решении задач.



Проверяем точку: что она делает относительно окружности

Точка совпала с окружностью

Подставьте координаты точки $M(x; y)$ в уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Если после вычислений слева получается r^2 , значит расстояние от центра до точки равно радиусу. На рисунке такая точка лежит точно на «контуре» окружности.



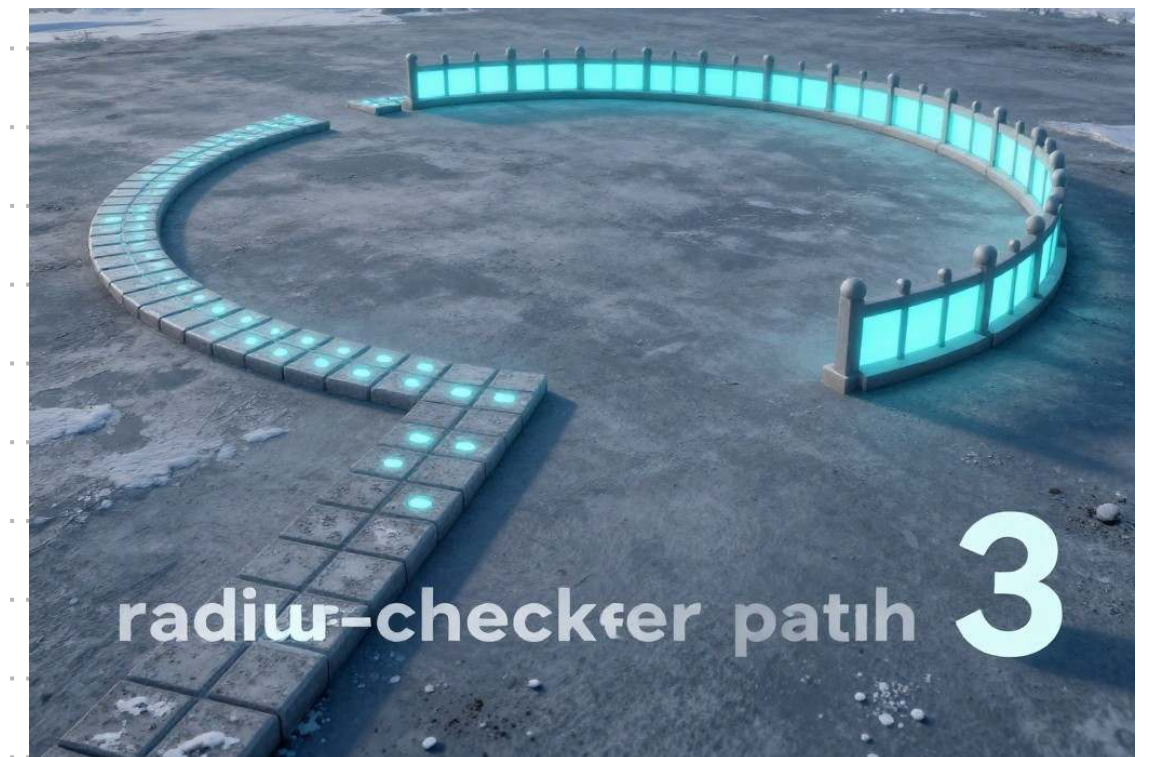
Точка внутри: до центра ближе, чем надо

После подстановки левая часть получается меньше r^2 . Это означает, что CM — расстояние от центра до точки — меньше радиуса. Визуально такая точка находится «внутри круга», и окружность окружает её со всех сторон.



Точка вне окружности: радиус не дотягивается

Если подстановки дают значение больше r^2 , то CM больше радиуса. Значит точка расположена дальше от центра, чем граничные точки окружности. На изображении её легко узнать по тому, что она оказывается «за пределами» окружности.





36

Эта величина показывает, чему равен квадрат радиуса в уравнении окружности.

Для центра $C(2; -1)$ и радиуса 6 уравнение принимает вид $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$.

Собственная иллюстрация на основе условия: $r = 6 \Rightarrow r^2 = 36$





Как приводят общее уравнение к стандартному виду

1/

Сначала группируют члены с x и отдельно члены с y : нужно выделить выражения вида $x^2 \pm kx$ и $y^2 \pm my$. Так проще подготовить формулы к превращению в полные квадраты.

2/

Далее подбирают числа, которые добавляют и затем вычитают, чтобы получить $x^2 \pm kx = (x-a)^2$ и $y^2 \pm my = (y-b)^2$. Добавленные числа обязательно учитываются в правой части.

3/

После приведения в стандартный вид уравнение приобретает форму $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Тогда сразу видно центр $C(a; b)$: a — это число возле x , b — возле y .

4/

Остаётся определить r : это квадратный корень из правой части. Такой способ работает даже если в начале центр и радиус были неочевидны, потому что полные квадраты «раскрывают» параметры окружности.



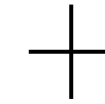
Выделение полных квадратов на конкретном примере

В выражении $x^2 - 6x$ и $y^2 + 4y$ нужно «добавить по 9 и 4», чтобы получить $(x-3)^2$ и $(y+2)^2$.



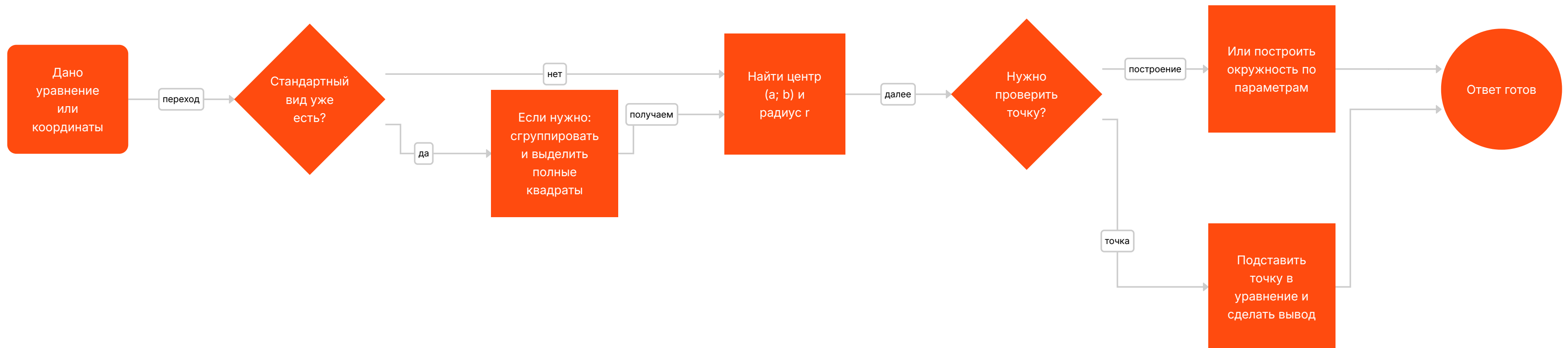
По диаграмме видно, что именно добавленные числа превращают исходные члены в полные квадраты, а значит позволяют считывать центр (3; -2) и радиус 5.

Преобразование уравнения $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 12$ в стандартный вид: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$
(учебная демонстрация)



Порядок действий при работе с окружностью

Типовая логика задач по уравнению окружности (9 класс)



Типичные ошибки при работе с уравнением окружности

Ошибка	Правильная запись	Пояснение
Знак в скобках читают как координату	$(x-3)^2 \rightarrow$ центр по x равен 3	Минус в $(x-3)^2$ означает, что $a = 3$; центр читают по знакам внутри скобок.
$r^2 = 0$ считают «обычной» окружностью	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$	Если $r = 0$, радиус нулевой: получается одна точка, а не окружность.
Потеряли добавленные числа при выделении квадратов	$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$	При преобразованиях добавленные значения обязаны «переехать» в правую часть, иначе радиус будет неверным.

Здесь показаны частые промахи: как неверно читают знак в скобках, что происходит при $r^2 = 0$ и почему нельзя забывать добавленные числа после выделения квадратов.

Большинство ошибок связано с чтением параметров (центр и радиус) и с аккуратностью преобразований: знак и добавленные числа критически влияют на итог.



Связь с реальными объектами и задачами



Наведение и прицеливание

В задачах навигации и управления радиус зоны до цели удобно описывать окружностью: центр задаёт положение объекта, а радиус — допустимую погрешность или дальность действия.



Съёмка и фокусные зоны

Круглые области на плоскости встречаются в моделировании камер: например, радиус покрытия объектива или видимая область кадра задаются параметрами окружности на координатной плоскости.



Радиус датчиков и сигналов

Если датчик «чувствует» на фиксированном расстоянии, границу зоны можно представить окружностью. Тогда точка внутри означает, что сигнал будет принят.



Технические модели местности

В инженерных и школьных прикладных задачах границы зон действия, ограничения по дальности и расстояния между объектами переводят в координаты. Уравнение окружности помогает работать с ними напрямую.



Основные типы задач по теме

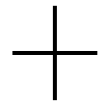
Преобразование общего уравнения в стандартный вид встречается чаще: оно требует выделения полных квадратов и аккуратных вычислений.



Диаграмма подсказывает, что ключевой навык — преобразования, а затем уже чтение центра и радиуса для проверки точек или построения окружности.



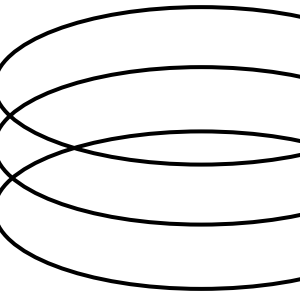
Формулы, которые нужно ПОМНИТЬ



Главная формула окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Она связывает координаты любой точки с центром $C(a; b)$ и радиусом r через равенство квадратов расстояний.

Формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Она объясняет, почему в уравнении появляются суммы квадратов.

Если центр окружности в начале координат, то запись упрощается до $x^2 + y^2 = r^2$. Этот случай помогает быстрее решать задачи на построение и проверку точек.



Уравнение окружности превращает рисунок в вычисления

Оно объединяет геометрию и алгебру: по уравнению находят центр и радиус, строят окружность и проверяют, где находится точка. В 9 классе важно узнавать стандартный вид, выделять полные квадраты и читать координаты центра по знакам.