

# Линейные уравнения с двумя переменными

Разберём уравнения вида  $ax + by = c$  и их графики.





# Почему эта тема важна

Такие уравнения описывают повседневные зависимости: цену и количество, путь и время, число предметов и общую стоимость. Один и тот же смысл можно записать словами, формулой и показать на графике, чтобы увидеть связь наглядно и точно понимать условие задачи.

# Общий вид линейного уравнения

## 1 Запись уравнения

Линейное уравнение с двумя переменными записывают в виде  $ax + by = c$ . Здесь  $x$  и  $y$  — неизвестные, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — числа, задающие связь между ними.

## 2 Роль коэффициентов

Числа  $a$  и  $b$  называют коэффициентами при переменных. Они показывают, как связаны  $x$  и  $y$ , и не могут быть равны нулю одновременно, иначе уравнение потеряет нужный вид.

## 3 Примеры записи

К таким уравнениям относятся  $2x + y = 7$ ,  $x - 3y = 12$  и  $5x + 2y = 10$ . Все они содержат две переменные и одно равенство.

# Что означает решение уравнения

## Пара чисел

Решением называют пару чисел  $(x; y)$ , при которой левая часть уравнения становится равной правой. Если равенство выполняется, пара подходит, если нет — не подходит.

## Пример ошибки

Пара  $(4; 1)$  не является решением, потому что  $2 \cdot 4 + 1 = 9$ , а не 7. Значит, проверка всегда начинается с подстановки чисел в уравнение.

## Пример подходящих точек

Для уравнения  $2x + y = 7$  подходят пары  $(1; 5)$ ,  $(2; 3)$  и  $(3; 1)$ . При подстановке каждая из них делает равенство верным, значит, это решения.



# Проверка пар чисел для уравнения $2x + y = 7$

| Пара чисел | Подстановка         | Результат |
|------------|---------------------|-----------|
| (0; 7)     | $2 \cdot 0 + 7 = 7$ | да        |
| (1; 5)     | $2 \cdot 1 + 5 = 7$ | да        |
| (2; 3)     | $2 \cdot 2 + 3 = 7$ | да        |
| (4; 1)     | $2 \cdot 4 + 1 = 9$ | нет       |

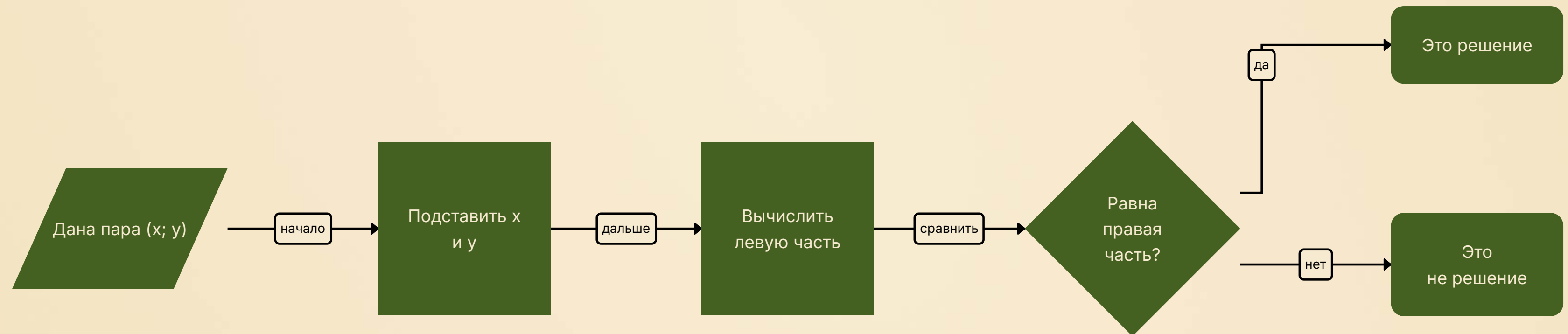
Сравним несколько пар чисел и увидим, что верных решений может быть больше одного.

У одного линейного уравнения может быть несколько правильных пар чисел; проверка выполняется сравнением левой и правой частей.

Подстановка пар чисел в уравнение  $2x + y = 7$ .

# Как проверить пару чисел

Алгоритм подстановки значений в линейное уравнение



# Сколько решений бывает у уравнения

## ● Решений много

Линейное уравнение с двумя переменными обычно имеет бесконечно много решений. Каждая новая подходящая пара чисел добавляет ещё одну точку, которая тоже удовлетворяет условию.

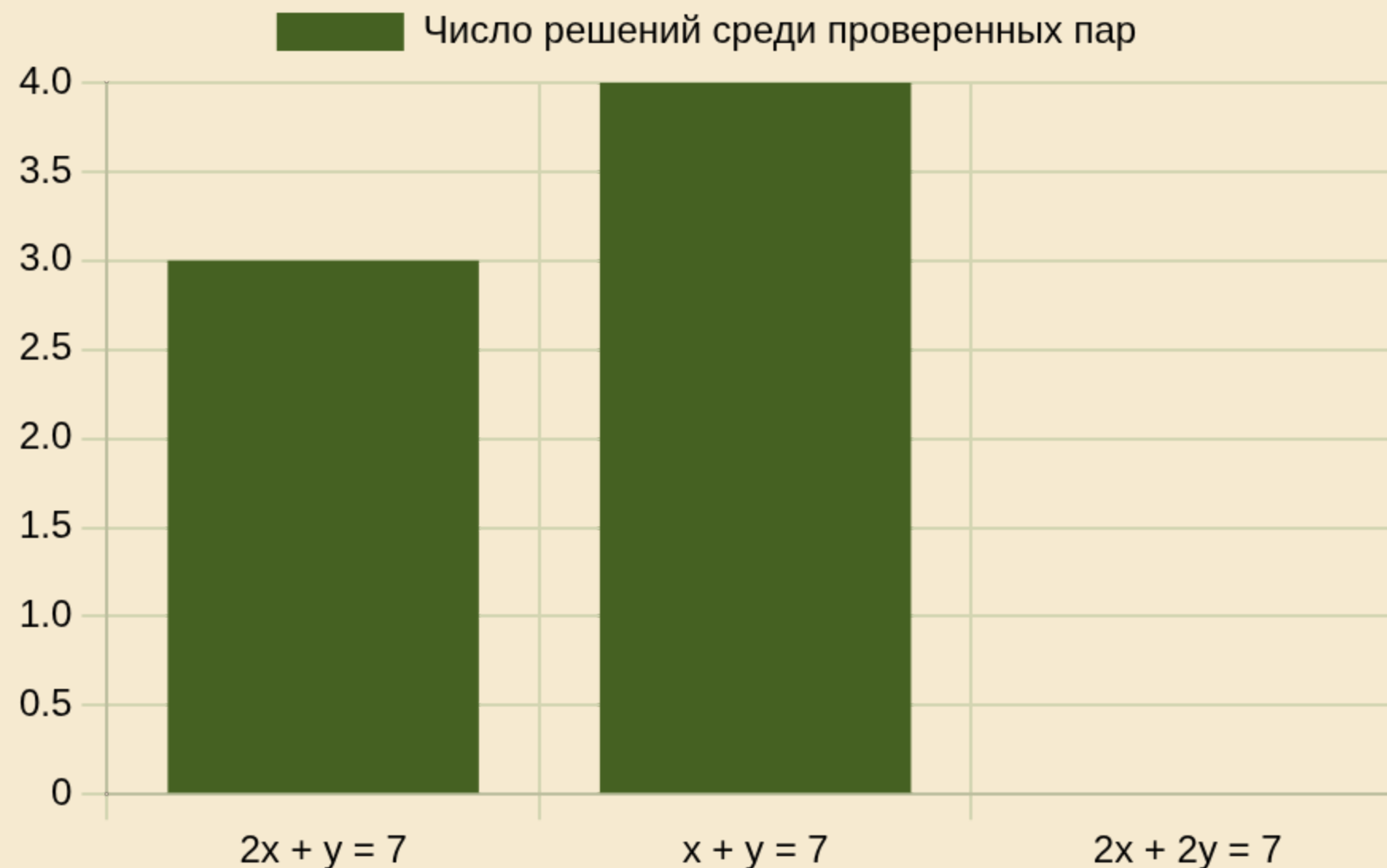
## ● Один смысл — много пар

Важно помнить, что одно уравнение не задаёт единственную пару чисел. Оно описывает целый набор решений, поэтому проверять и находить их можно разными способами.

## ● Точки на плоскости

Если отметить все решения на координатной плоскости, получится не набор случайных точек, а одна прямая. Это удобно: по графику сразу видно, какие пары чисел подходят.

# Сравнение количества решений у разных уравнений



Мы сравниваем только результаты проверки нескольких одинаково подобранных пар чисел, а не все возможные решения.

Коэффициенты влияют на число подходящих пар среди выбранных примеров, поэтому набор решений у уравнений различается.

Учебный пример проверки нескольких пар чисел для трёх линейных уравнений.

# График линейного уравнения

## 1 Прямая линия

Каждому линейному уравнению с двумя переменными соответствует прямая на координатной плоскости. Все точки этой прямой имеют координаты, которые удовлетворяют уравнению.

## 2 Точки вне графика

Если точка не лежит на прямой, её координаты не являются решением. Поэтому по графику можно быстро отличать подходящие пары чисел от неподходящих.

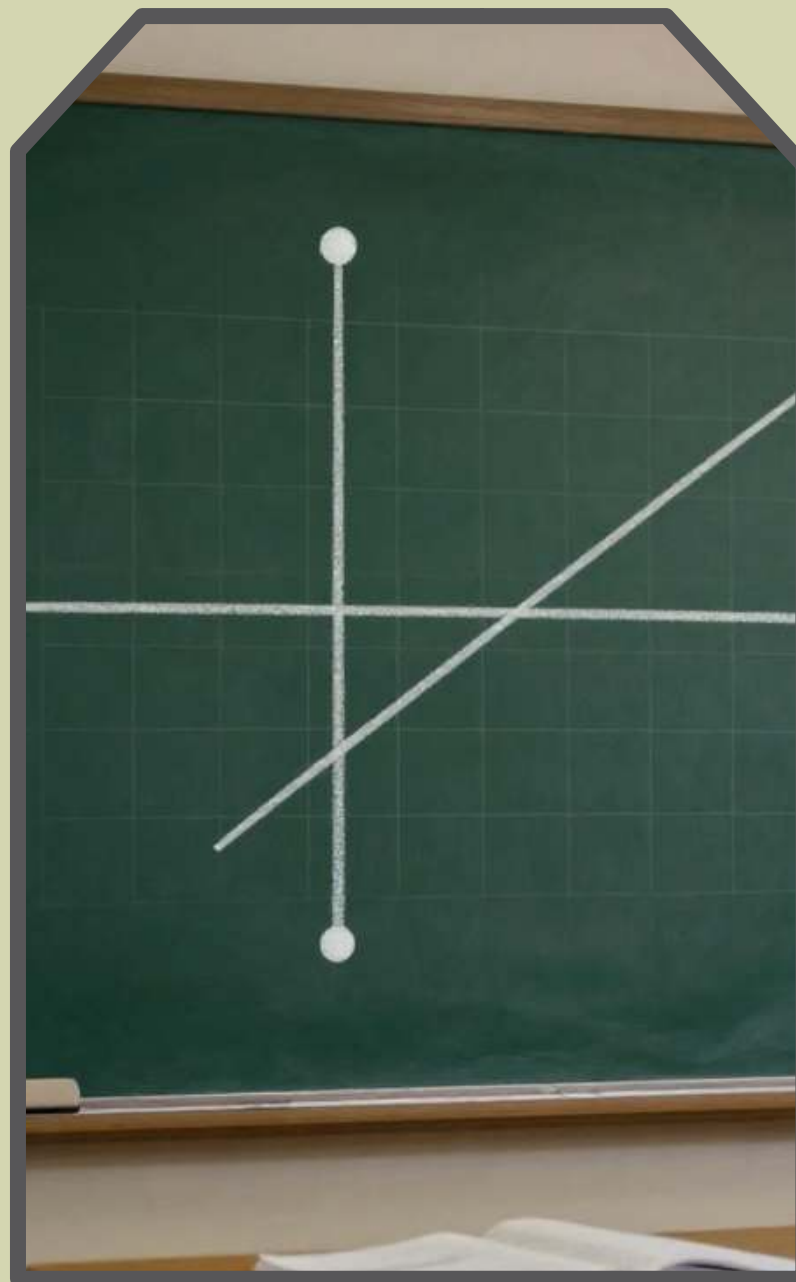
## 3 Связь алгебры и геометрии

В этой теме формула и рисунок описывают одно и то же. Уравнение показывает зависимость, а график помогает увидеть её в виде прямой линии.

# Построение графика по двум точкам

## 1 Найти две точки

Для уравнения  $x + y = 6$  удобно взять точки  $(0; 6)$  и  $(6; 0)$ . Обе пары подходят, потому что при подстановке равенство остаётся верным.



## 2 Провести прямую

После отметки точек на координатной плоскости через них проводят прямую линию. Эта линия и будет графиком уравнения  $x + y = 6$ .

# Точки пересечения с осями координат

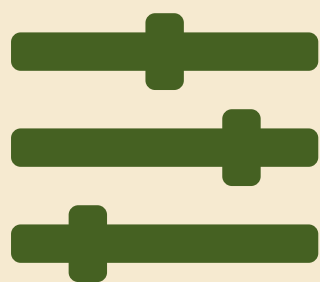
Точки, где прямая пересекает оси, удобно использовать как готовые опорные точки для построения графика.

Если при  $x = 0$  и  $y = 0$  легко получить точки, график строится быстрее и без лишних вычислений.

Составлено по правилам нахождения пересечений с осями координат для линейных уравнений

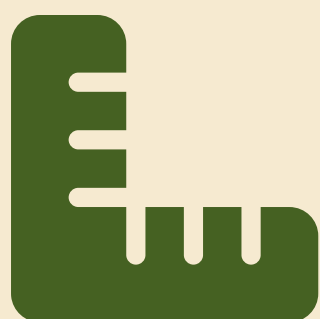
| Уравнение    | $x = 0$   | $y = 0$  | Что помогает сделать |
|--------------|-----------|----------|----------------------|
| $2x + y = 4$ | $(0; 4)$  | $(2; 0)$ | Найти 2 точки        |
| $3x - y = 6$ | $(0; -6)$ | $(2; 0)$ | Построить прямую     |
| $x + 2y = 8$ | $(0; 4)$  | $(8; 0)$ | Проверить график     |

# Как коэффициенты связаны с видом прямой



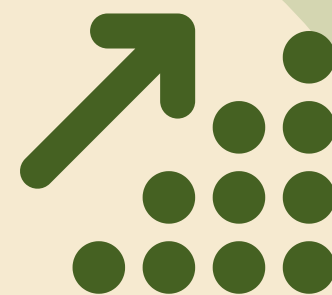
## Наклон прямой

Коэффициенты при  $x$  и  $y$  определяют, насколько быстро меняется одна переменная при изменении другой. Из-за этого прямая на графике может выглядеть более крутой или более полой.



## Сила изменения

Чем больше по модулю коэффициент, тем заметнее влияние соответствующей переменной. Тогда небольшое изменение  $x$  или  $y$  вызывает более резкое изменение второй величины на координатной плоскости.



## Знак коэффициентов

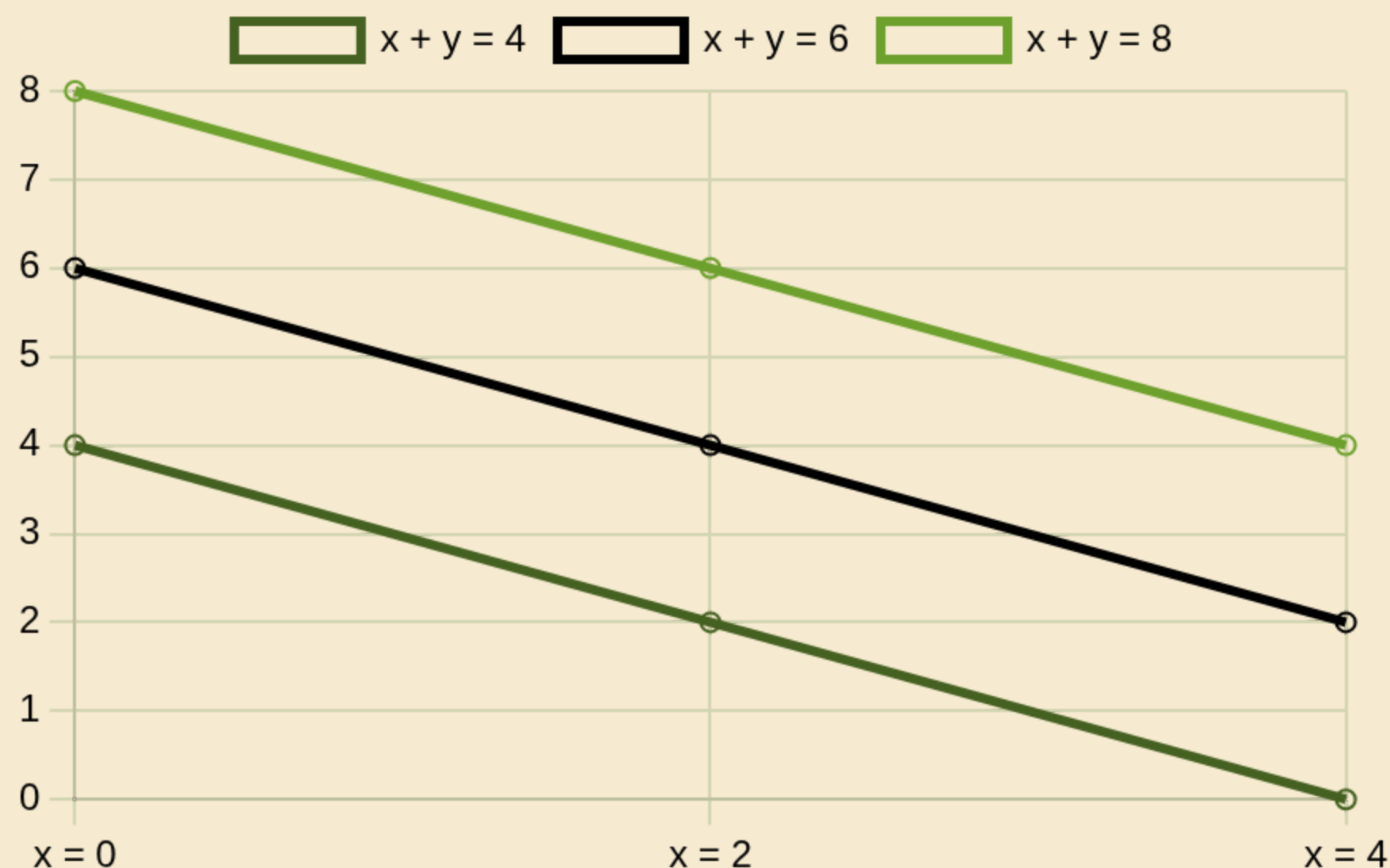
Если коэффициенты имеют разные знаки, прямая обычно идет сверху вниз. При одинаковых знаках она может подниматься снизу вверх, поэтому знак помогает заранее представить форму графика.



## Внешний вид графика

Меняя коэффициенты, мы меняем не только наклон, но и общий вид линии. Поэтому два уравнения похожей формы могут задавать совершенно разные прямые.

# Как меняется график при изменении свободного члена



Во всех трёх случаях сохраняется одна и та же зависимость между  $x$  и  $y$ , поэтому линии остаются параллельными.

При изменении  $c$  прямая сдвигается вверх или вниз, но ее наклон не меняется.

Учебный пример для сравнения уравнений  $x + y = 4$ ,  $x + y = 6$ ,  $x + y = 8$

# Текстовые задачи и уравнения

## 1 Выдели величины

Сначала нужно понять, какие две величины связаны в условии: например, количество предметов и их стоимость. Это помогает увидеть, что именно нужно обозначить буквами  $x$  и  $y$ .

## 2 Составь выражение

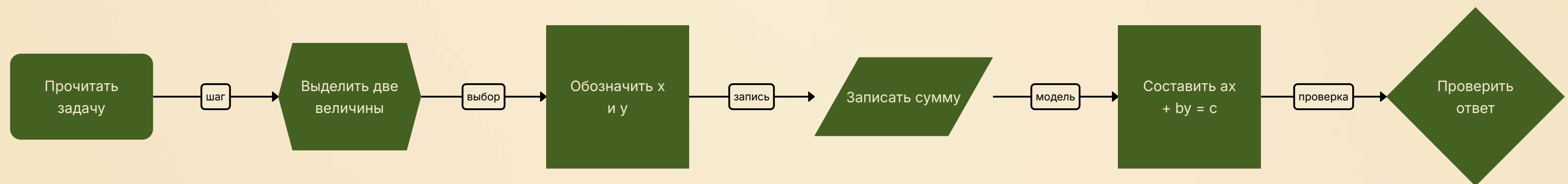
Затем записывают сумму всех частей задачи: стоимость покупок, расстояние или общее количество. Коэффициенты показывают цену, длину или другое значение одной единицы.

## 3 Проверь смысл ответа

После решения важно сравнить найденные числа с условием задачи. Ответ должен быть не только вычислен верно, но и подходить по смыслу: нельзя купить половину предмета, если задача об этом не говорит.

# Как составить уравнение по условию задачи

Алгоритм помогает перевести текст задачи на язык уравнений и проверить полученный ответ.



# Пример задачи из жизни школьника

## Записываем условие

Катя купила 2 булочки и 3 сока за 180 рублей. Если булочка стоит 30 рублей, неизвестной остается цена одного сока, которую удобно обозначить буквой  $y$ .

## Находим ответ

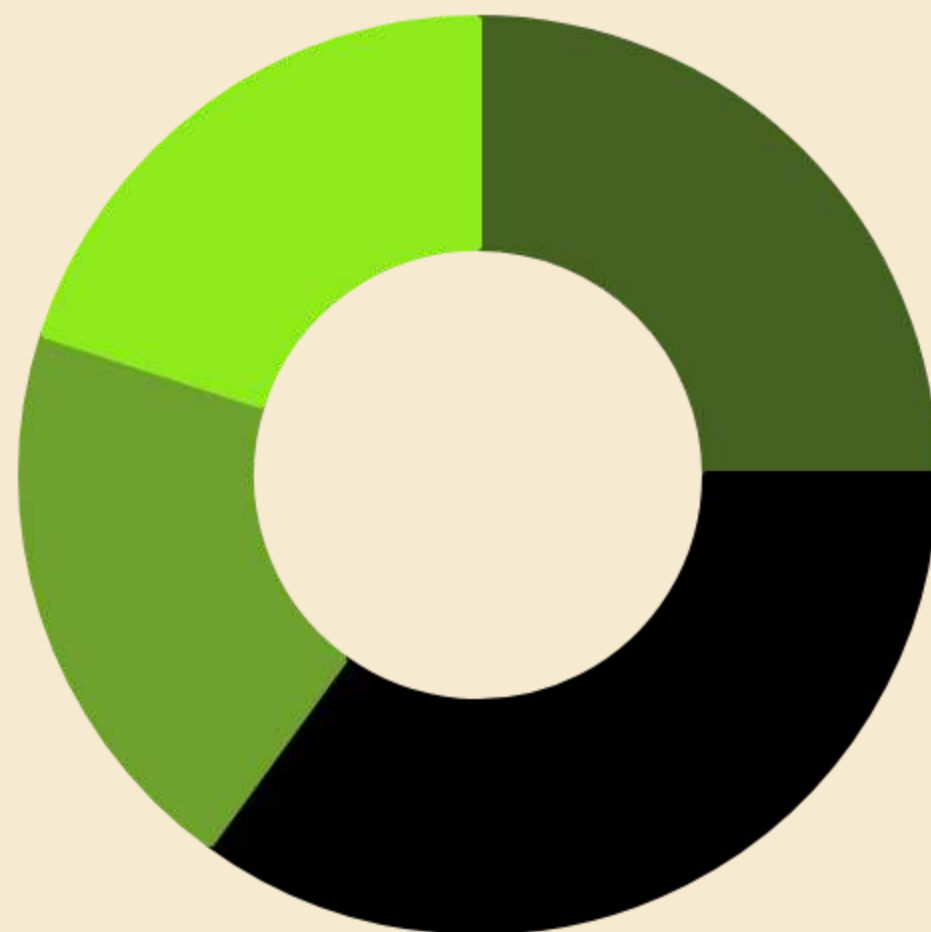
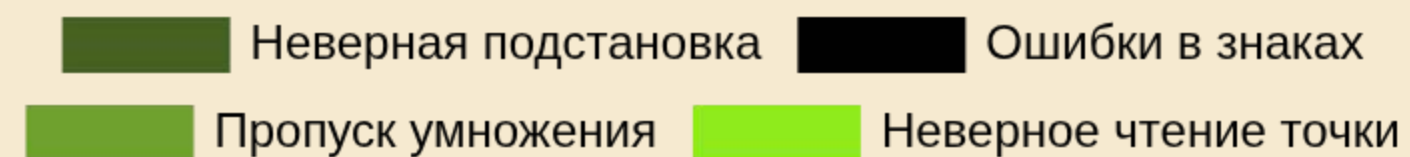
После вычислений получаем  $y = 40$ . Значит, один сок стоит 40 рублей, а проверка подстановкой показывает, что условие задачи выполняется точно.

## Составляем уравнение

Стоимость двух булочек равна 2·30, а стоимость трёх соков —  $3y$ . Поэтому общее условие можно записать как  $2 \cdot 30 + 3y = 180$ , где все суммы относятся к одной покупке.



# Типичные ошибки при решении уравнений



Чаще всего трудности возникают не из-за самой идеи, а из-за невнимательной записи вычислений и координат точек.

Основные потери связаны со знаками и арифметикой, значит, важнее всего аккуратно проверять каждую запись.

Учебное обобщение типичных ошибок при работе с линейными уравнениями

# Уравнение и его график: одно и то же разными способами

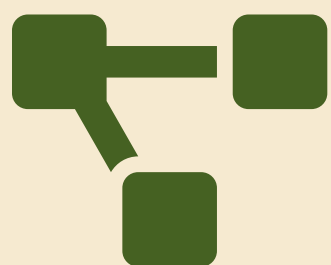
| Запись            | Что означает          | Пример       | Вид на плоскости |
|-------------------|-----------------------|--------------|------------------|
| $ax + by = c$     | связь двух переменных | $2x + y = 7$ | прямая           |
| $(x; y)$          | одно решение          | $(1; 5)$     | точка на прямой  |
| множество решений | все подходящие пары   | все точки    | вся прямая       |

Одна и та же зависимость может быть записана формулой, показана точкой или изображена прямой на координатной плоскости.

Алгебраическая запись и график описывают одну зависимость, поэтому можно переходить от формулы к рисунку и обратно.

Составлено по свойствам линейного уравнения с двумя переменными

# Где пригодится эта тема дальше



## Системы уравнений

Знание линейных уравнений с двумя переменными помогает понять, как находить общие решения сразу для двух условий. Это важная основа для следующей темы — систем уравнений.



## Графики зависимостей

На координатной плоскости можно изображать не только простые прямые, но и сравнивать разные зависимости между величинами. Такой навык нужен во многих задачах алгебры.



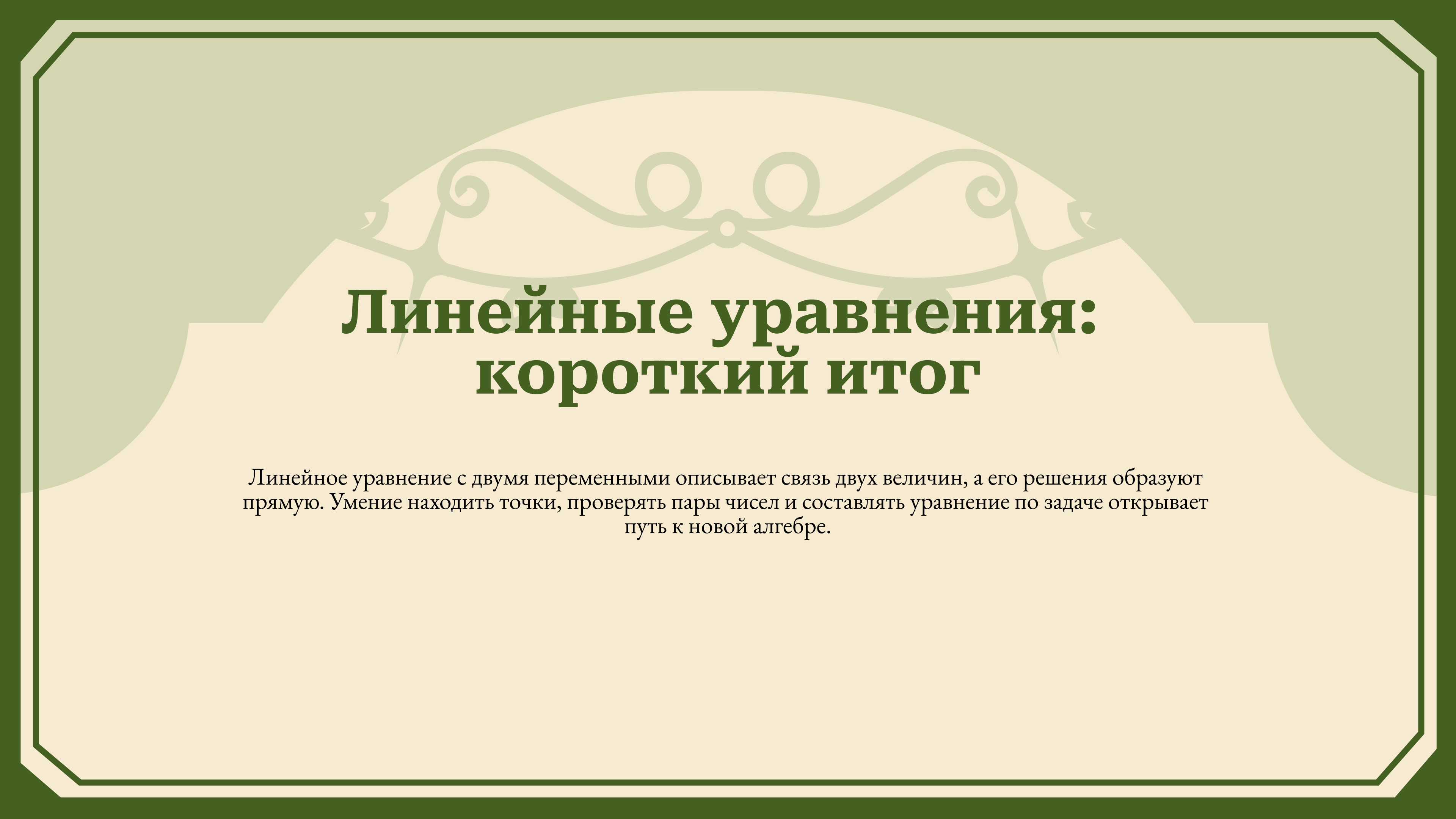
## Сравнение величин

Эта тема учит сопоставлять цены, длины, время и количество предметов. Благодаря этому становится проще решать жизненные задачи, где нужно выбрать правильную математическую модель.



## Перевод на язык математики

Уроки по этой теме развивают умение понимать текст задачи и записывать его формулой. Это полезно не только в алгебре, но и при изучении других предметов.



# Линейные уравнения: короткий итог

Линейное уравнение с двумя переменными описывает связь двух величин, а его решения образуют прямую. Умение находить точки, проверять пары чисел и составлять уравнение по задаче открывает путь к новой алгебре.