

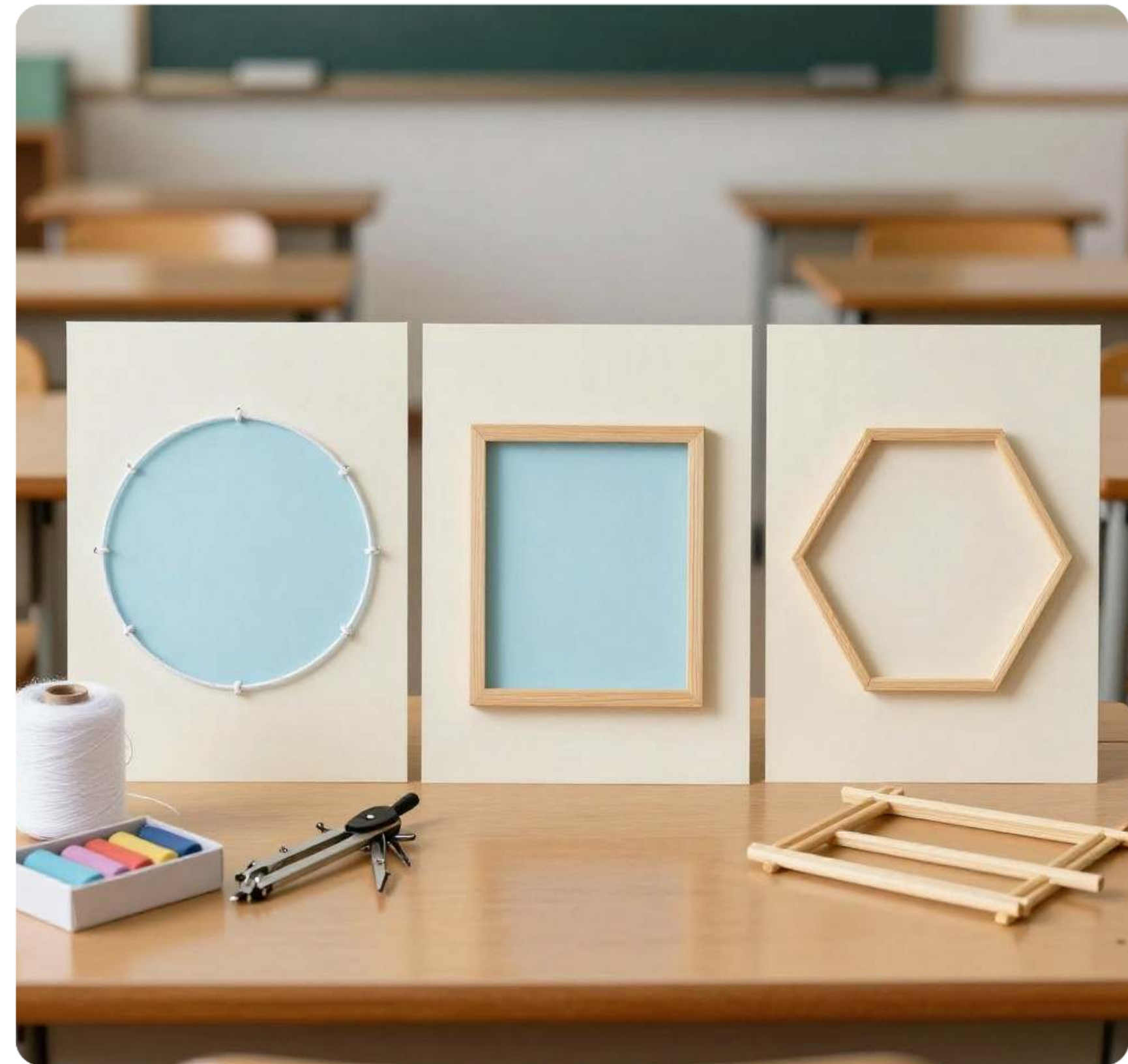


Изопериметрическая задача в геометрии

Какая фигура при фиксированном периметре даёт максимальную площадь? Ответ — круг.

Почему эта задача важна на уроке геометрии

Она связывает периметр, площадь и форму: при одинаковой «границе» результат может сильно отличаться. Для 7 класса это наглядный способ применить формулы и понять роль симметрии в сравнении фигур.



Что сравнивают в изопериметрической задаче

1

Периметр — это сумма длин всех сторон или длина границы фигуры. Его считают как «сколько нужно верёвки», чтобы обвести контур без разрывов или наложений.

2

Площадь показывает величину внутренней части фигуры. Это то, что получится «внутри границы», и именно её стараются сделать как можно больше.

3

При одном и том же периметре площадь может быть разной: квадрат, прямоугольник, равносторонний треугольник и круг распределяют границу по-разному, поэтому и внутреннее место получается разным.

Площади фигур при одинаковом периметре



При фиксированной длине границы круг выходит самым «выгодным» по площади, а у вытянутых форм — наименьшая.

График показывает общий принцип: чем равномернее распределена граница, тем больше внутреннего пространства удаётся «упаковать».

Использованы школьные формулы для периметра и площади; сравнение выполнено в относительных значениях при одном периметре.

Почему круг дает наибольшую площадь

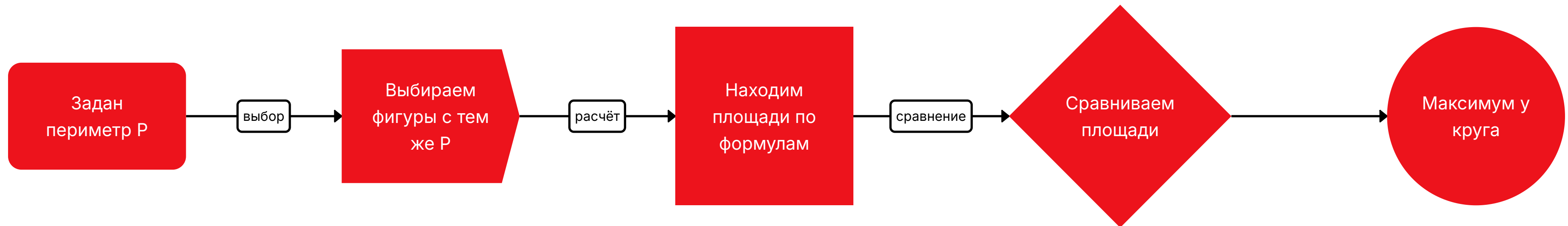
У круга все точки границы находятся на одинаковом расстоянии от центра. Поэтому форма «не теряет» выгодные места из-за выступов или сужений.

Если растягивать фигуру или делать её более угловатой, периметр всё равно остаётся тем же, но часть длины границы оказывается менее эффективной для увеличения площади.

Именно поэтому при фиксированной длине контура площадь круга получается максимальной: вся граница работает одинаково и помогает «держат» больше внутреннего пространства.

Как решается изопериметрическая задача

Сравнение нескольких фигур с одним и тем же периметром и расчёт их площадей по формулам



История задачи и ее образное объяснение

Нить, которая ищет лучший контур

Представьте натянутую нить, из которой нужно получить фигуру с заданной длиной. Если дать нити «самой выбрать» форму, она стремится к границе без лишних изгибов. Так в воображении появляется круг как оптимальный вариант.



Легенда о Дидоне и строгая математика

Связь идеи с древними временами напоминает историю о Дидоне, основавшей Карфаген. Образ превращается в математическую задачу: при фиксированной длине границы найти максимум площади. В итоге легенда помогает запомнить смысл поиска оптимума.



Старинные чертежи и переход к геометрии

Мысленно соедините контуры разных фигур: многоугольников, кривых, окружности. На рисунках видно, как от образного сравнения приходит строгий вывод. История идеи показывает путь от рассказа к доказательному правилу.



Если периметр 20 см, площадь круга оказывается примерно $31,8 \text{ см}^2$ — больше, чем 25 см^2 у квадрата.

31,8 см²

**При том же периметре
круг даёт заметно
большую площадь, чем
квадрат.**

Вычисления по формулам окружности и квадрата (без внешних источников).

Сравнение фигур при одном периметре

Фигура	Периметр	Площадь	Вывод
Круг	P	S_{max}	больше всех
Квадрат	P	S	среднее
Равностор. треугольник	P	S	меньше квадрата
Прямоугольник 2:1	P	S	наименьшая среди перечисленных

Школьные формулы для периметра и площади.

В таблице сравниваются круг, квадрат, равносторонний треугольник и прямоугольник 2:1 при одном и том же периметре; в столбце площади видно, что круг занимает первое место.

При одинаковой длине границы круг даёт максимальную площадь; среди остальных лучше оказывается более «симметричная» форма.

Формулы, которые нужны для сравнения



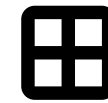
Круг

Для круга используем $P = 2\pi r$ и $S = \pi r^2$. Подставляя одно и то же P , находим радиус и затем площадь, чтобы сравнить с другими фигурами.



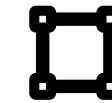
Квадрат

Для квадрата применяются $P = 4a$ и $S = a^2$. Значение стороны a легко получить из периметра, после чего площадь становится однозначно вычисляемой.



Равносторонний треугольник

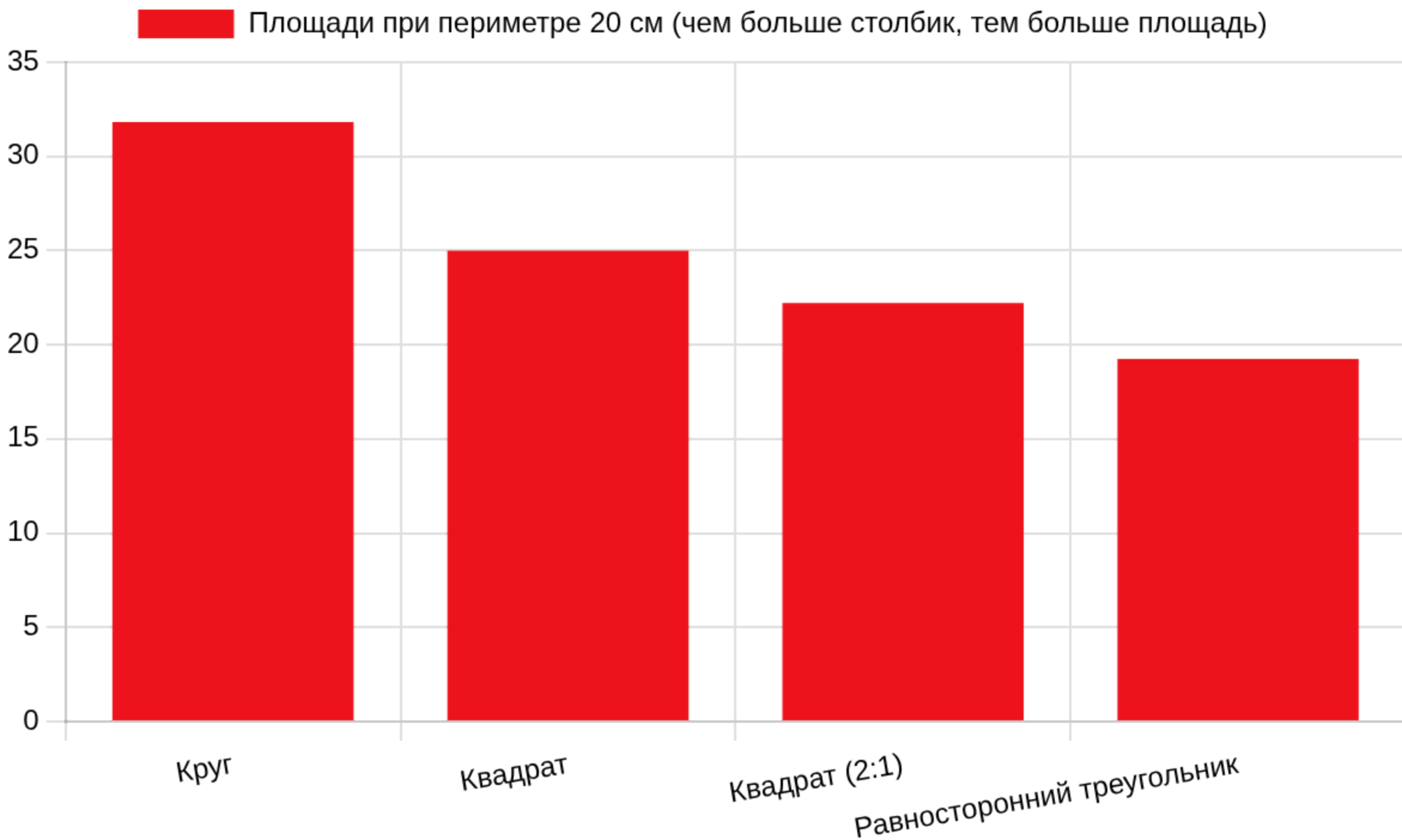
Для равностороннего треугольника: $P = 3a$ и $S = (\sqrt{3}/4)a^2$. Эти формулы помогают перевести фиксированный периметр в площадь без дополнительных допущений.



Сравнение через подстановку

С одинаковым P по формулам находят S для каждой фигуры и сравнивают результаты. Так видно, что форма границы влияет на площадь сильнее, чем кажется на первом шаге.

Как меняется площадь у разных фигур



При одинаковой длине границы фигуры заметно различаются по площади: круг занимает больше места внутри, а «угловатые» и вытянутые формы — меньше.

Гистограмма показывает прямую зависимость: форма сильнее влияет на площадь, чем само число периметра. Максимум достигается у круга, минимум — у треугольника.

Расчёт по школьным формулам для периметра $P = 20$ см; численные значения округлены до сотых.

Изопериметрический принцип в природе

Мыльные пузыри стремятся стать шаром, потому что шар даёт максимальную «выгоду» при заданной общей поверхности молекул: внутреннее пространство получается самым рациональным.

В плоской геометрии тот же смысл выражает круг: при фиксированной длине границы он «обнимает» наибольшую площадь и не тратит периметр на выступы.

Многие природные структуры стараются распределять материал и энергию экономно: чем меньше «лишних» изгибов и утолщений, тем эффективнее итоговая форма.

Где эта идея встречается в жизни

Клумба и дорожка: максимум места на том же бордюре

Круглая клумба выглядит простой, но даёт практичный выигрыш: при той же длине ограничителя внутри помещается больше растений. Это похоже на расчет «периметр фиксирован, площадь максимальна». Поэтому круг часто выбирают для аккуратных бордюров и дорожек с плавными линиями.

Упаковка: меньше материала — тот же контур

Производители упаковки подбирают форму так, чтобы при заданной длине обвязки получить большую внутреннюю часть. Круглые или близкие к ним формы удобны тем, что распределяют «границу» равномерно. В результате на складах и в логистике экономится материал и упрощается расчёт объёма.

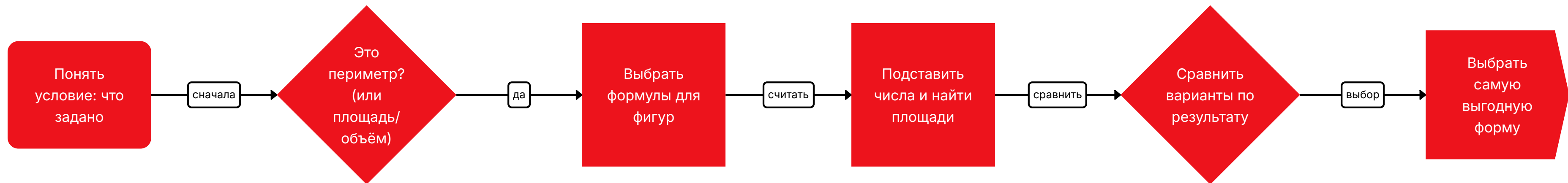
Резервуары и трубы: плавные контуры работают лучше

Когда проектируют ёмкости и трубопроводы, важны экономия материала и устойчивость конструкции. Плавные контуры помогают равномерно распределять нагрузку, а круглые поперечные сечения удобны в производстве. Так геометрический принцип подсказывает, где форма действительно «работает на результат».



Как применяют задачу в практических расчетах

Логика решения: задано ограничение (обычно периметр), затем сравнивают варианты по вычисляемым площадям и выбирают лучший.



Что происходит при изменении формы

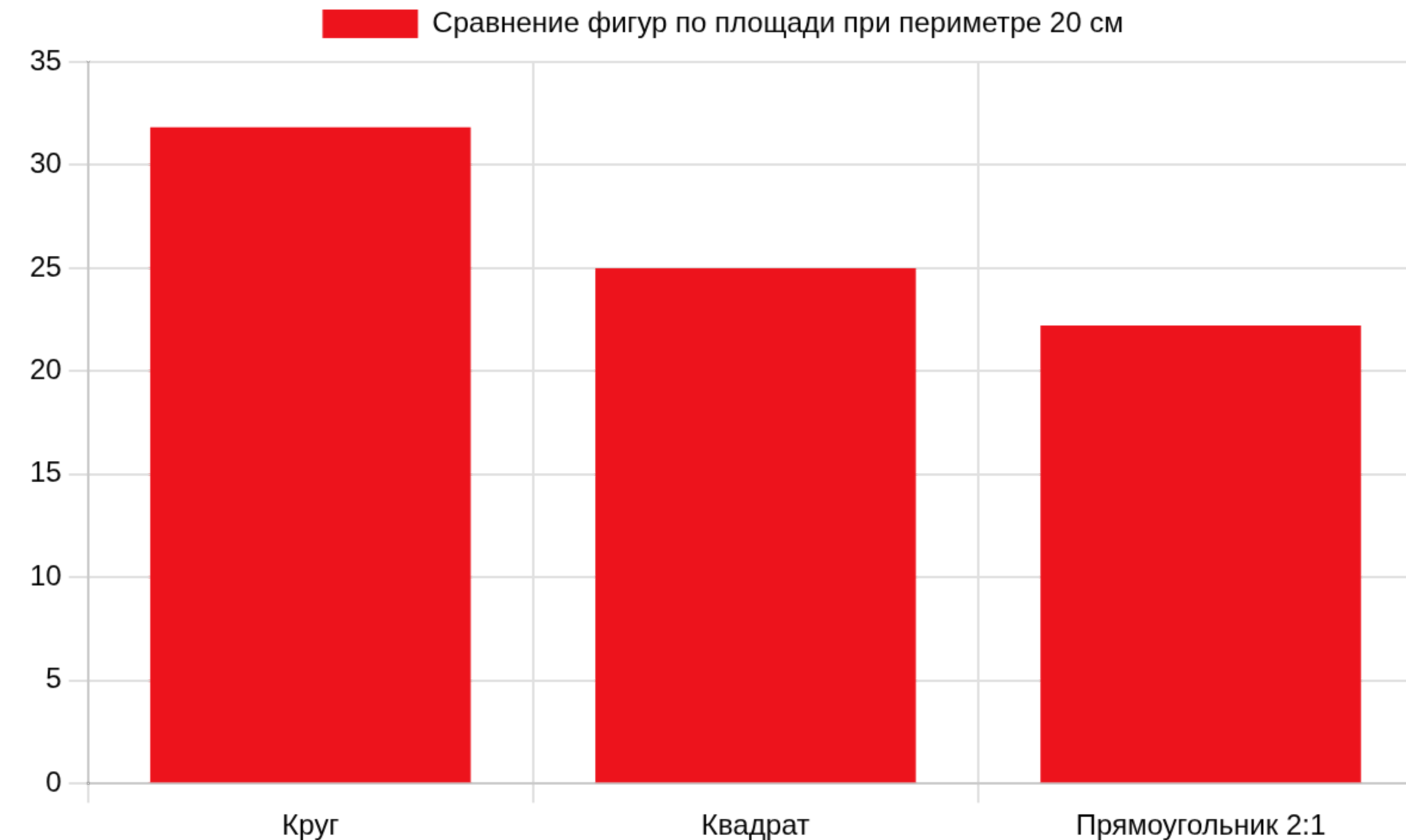
Сравнение трёх случаев при сохранении общего периметра показывает: чем равномернее форма, тем больше «полезная» площадь внутри. Это хорошо объясняет роль симметрии в изопериметрической задаче.

Главный итог: при фиксированной длине границы более симметричные формы дают большую площадь, а вытянутые — меньшую.

Фигура	Изменение границы	Площадь	Вывод
Квадрат	Сохраняем периметр	Растёт по сравнению с вытянутыми	Симметрия выгодна
Прямоугольник	Сильнее вытягиваем	Становится меньше	Неравномерность ухудшает результат
Вытянутая форма	Похожа на овал	Минимальная среди вариантов	Выступы «съедают» площадь

Обобщённые результаты сравнения при одинаковом периметре; качественные выводы следуют из изопериметрического принципа.

Симметрия и площадь при одном периметре



С ростом симметрии граница распределяется равномернее, поэтому часть «длины» меньше уходит на невыгодные вытягивания и углы.

Круг занимает лидирующую позицию по площади: квадрат — середина, а прямоугольник с сильным различием сторон — наименьший результат среди сравниваемых.

Расчёт площадей для $P = 20$ см по школьным формулам; значения округлены.

Изопериметрическая задача как пример оптимизации

Постановка ограничения

Задаётся условие: фиксирована длина замкнутой границы (периметр). Осталось выяснить, какая форма даст максимальную площадь внутри.

Сравнение вариантов

Выбирают несколько подходящих фигур и по формулам находят их площади при том же периметре. Затем сравнивают результаты по величине площади.

Выбор лучшего решения

По итогам сравнения выбирают фигуру с наибольшей площадью. В этом учебном примере ею оказывается круг.

Главный математический факт задачи

1

Среди всех замкнутых плоских фигур одинаковой длины наибольшую площадь имеет круг. Это — классический факт геометрической оптимизации на школьном уровне.

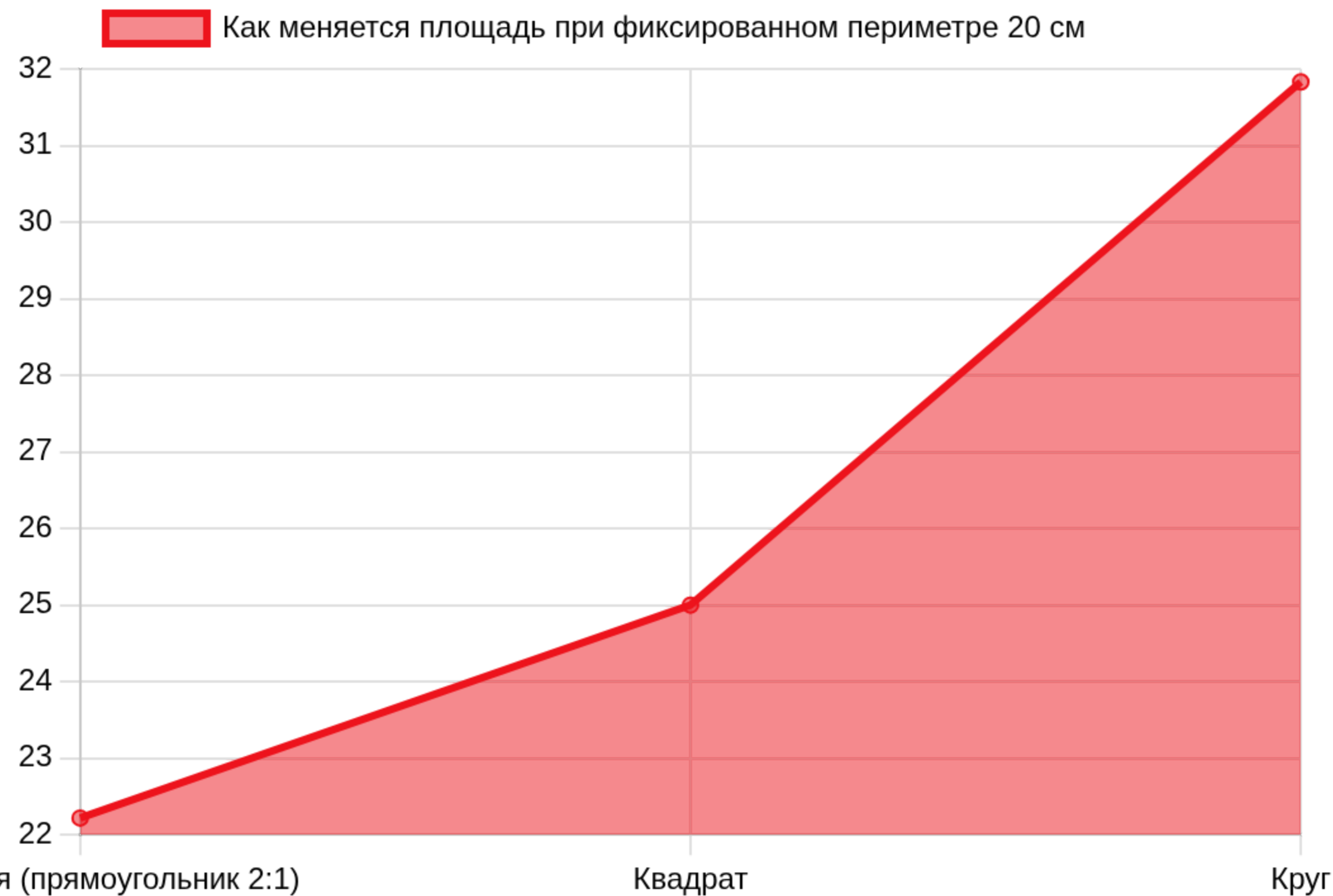
2

Идея объясняет, почему «красота» формы часто связана с выгодой: равномерная граница помогает превратить длину в максимально возможное внутреннее пространство.

3

Утверждение полезно как ориентир для задач: если периметр фиксирован, то нужно внимательно следить за формой, а не только за числами в условии.

Периметр и площадь: одинаковые числа не означают одинаковый результат



Расчёт по формулам для $P = 20$ см; значения округлены до сотых.

График показывает: при одном и том же периметре площадь зависит от того, насколько форма «собирает» границу к центру.

Рост симметрии соответствует увеличению площади. Наибольшее значение получает круг, а более вытянутые фигуры дают меньший результат при той же длине границы.

Идея, которая помогает выбирать лучшее

При фиксированном периметре максимальную площадь даёт круг. Задача связывает форму, симметрию, периметр и площадь и показывает, как геометрия помогает искать выгодные решения на практике.