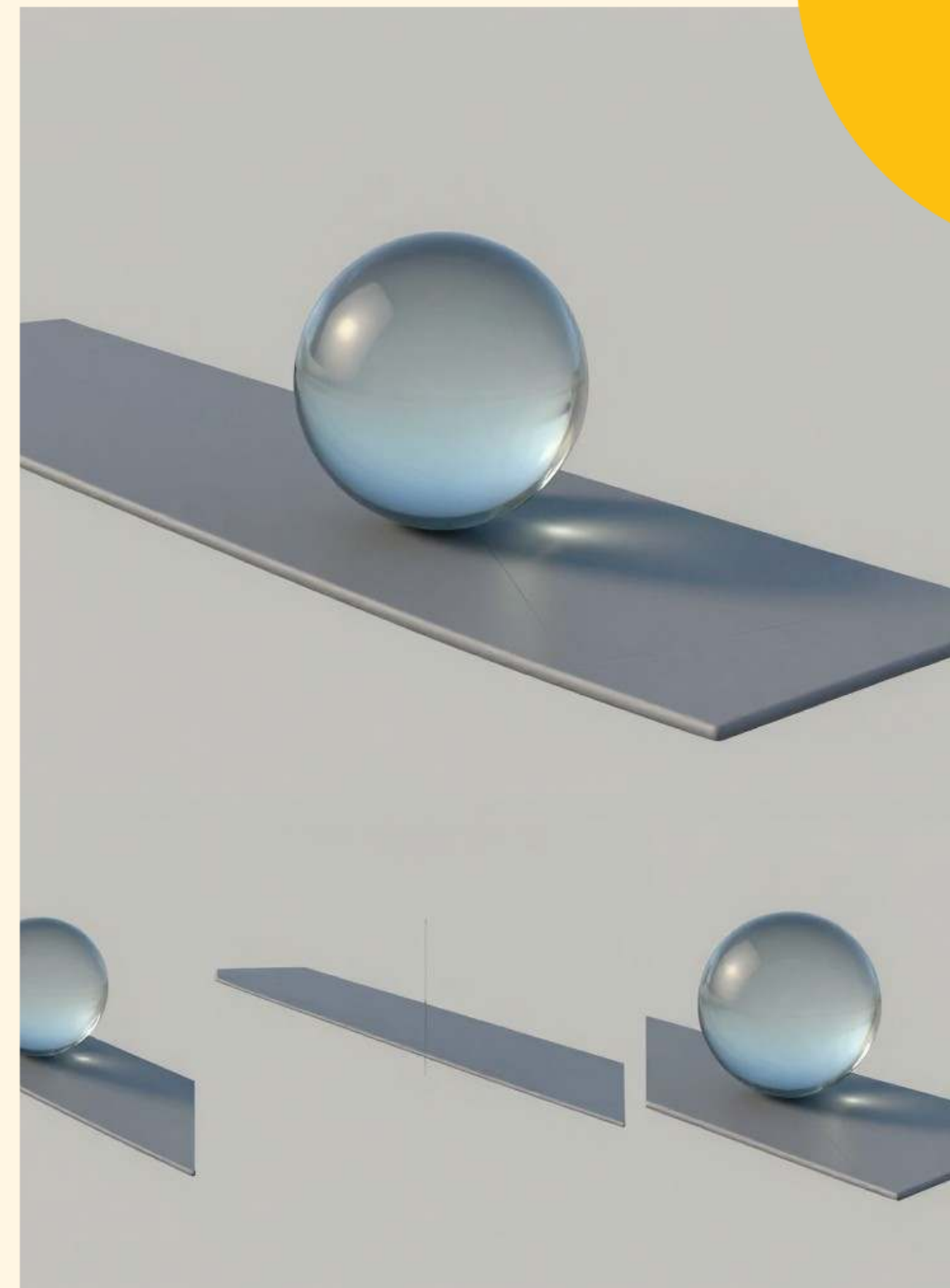


Взаимное расположение сферы и плоскости

Сравнивая расстояние от центра до плоскости с радиусом, определяем вид пересечения в пространстве.



Почему это важно в стереометрии 11 класса

Тема соединяет определения сферы и плоскости с вычислением расстояний, сечений и касательных плоскостей. Поэтому она регулярно появляется в задачах: нужно не только понять рисунок, но и быстро применить формулу к координатной модели.

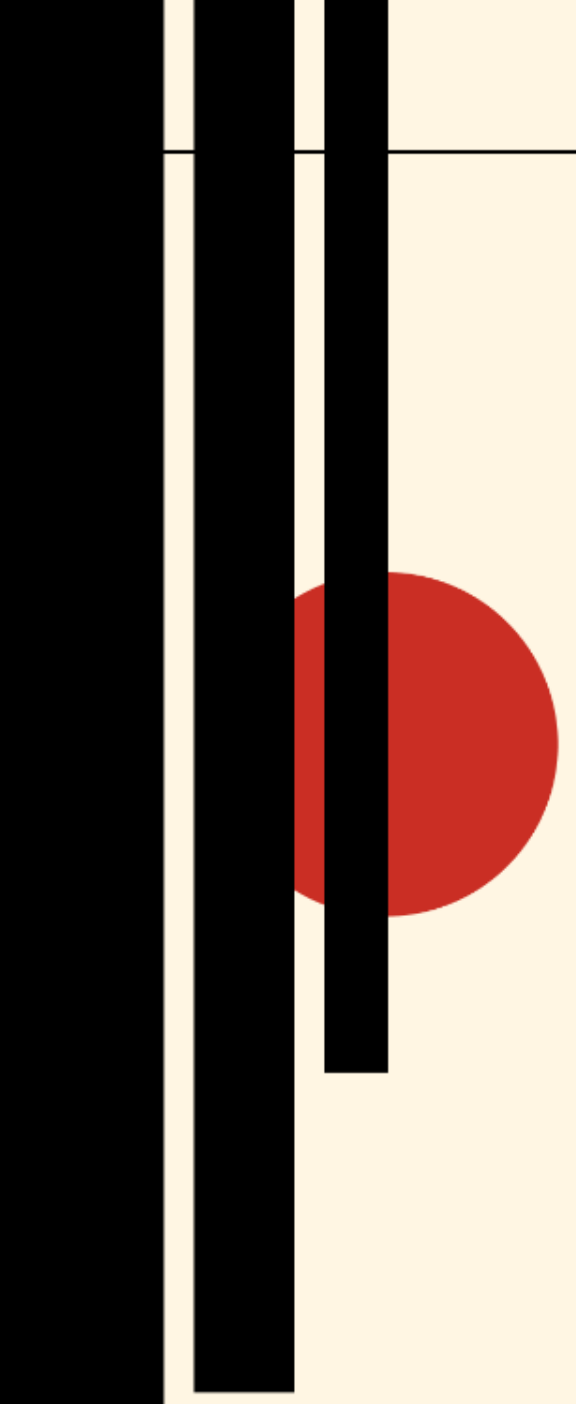


Сфера как геометрическое множество точек

- Сфера — это множество точек пространства, равноудалённых от одной точки, называемой центром сферы. Расстояние от центра до любой точки сферы постоянно и равно радиусу R .

- Если центр обозначен $O(a, b, c)$, то в декартовой системе координат сфера описывается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

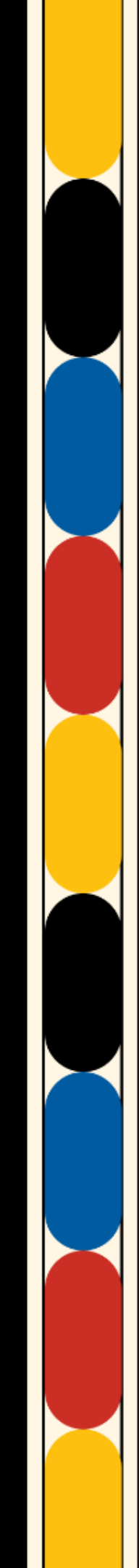
- Эти обозначения особенно удобны, когда требуется исследовать взаимное расположение сферы и плоскости через вычисления в координатах.



Вычисляя d для центра сферы, сравнивают его с радиусом R . В формуле важны модуль и нормаль плоскости через $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.


$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Эта величина определяет, насколько далеко точка от плоскости, и потому помогает классифицировать пересечение со сферой.



Три случая: что получится при пересечении сферы и плоскости

Критерий задаётся сравнением расстояния d от центра сферы до плоскости и радиуса R .

Сравнение трёх случаев

Три ситуации полностью различаются по отношению d и R : от отсутствия пересечения до окружности сечения.

Достаточно вычислить расстояние от центра сферы до плоскости и сравнить его с радиусом.

Случай	Соотношение	Число общих точек	Результат
1	$d > R$	0	нет пересечения
2	$d = R$	1	касание
3	$d < R$	бесконечно много	окружность сечения

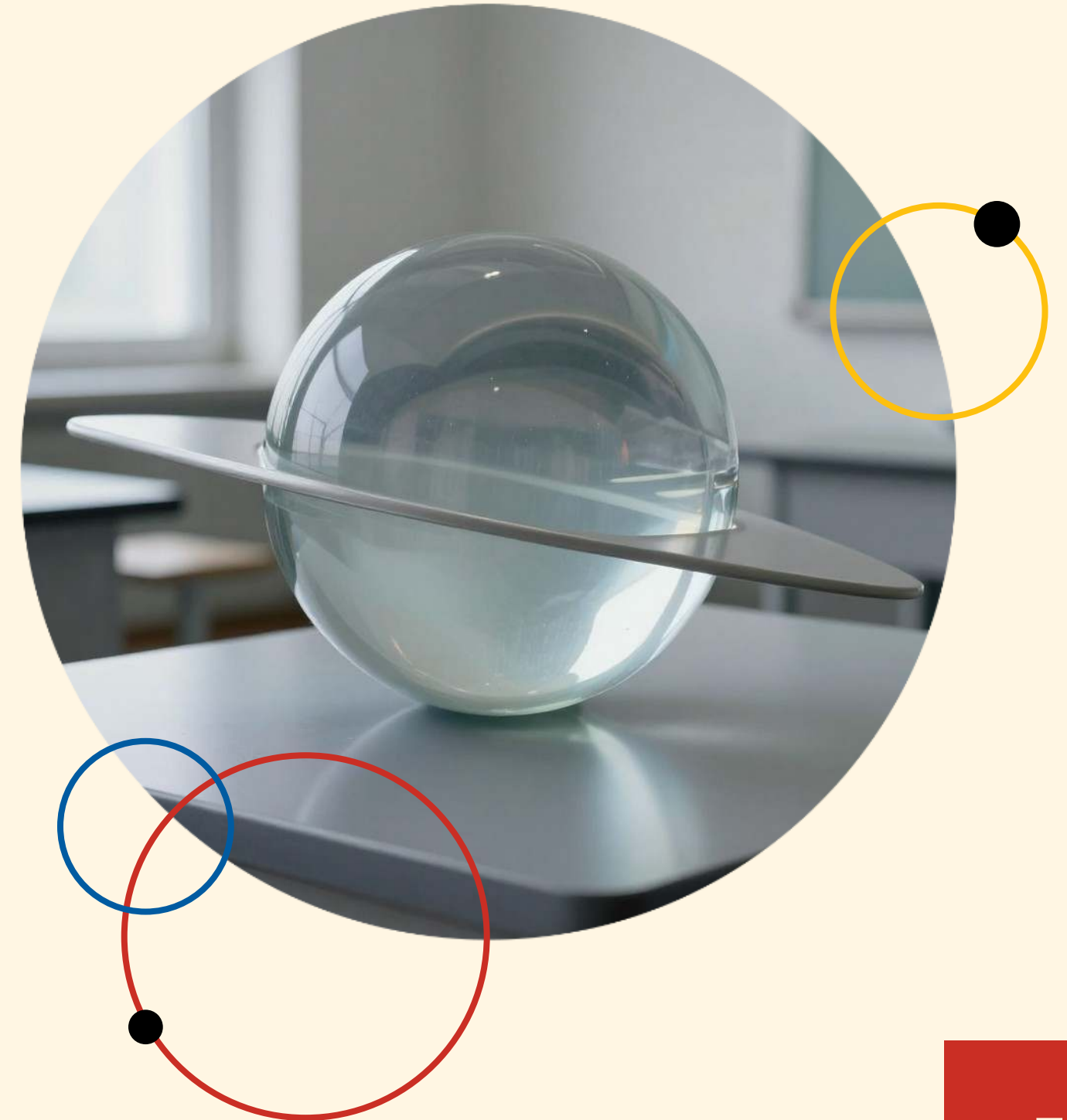
Сечение сферы плоскостью

Когда $d < R$, пересечение — окружность

Если расстояние d от центра сферы до плоскости меньше радиуса R , плоскость пересекает сферу. Пересечение образует окружность, лежащую в самой плоскости.

Как найти радиус окружности сечения

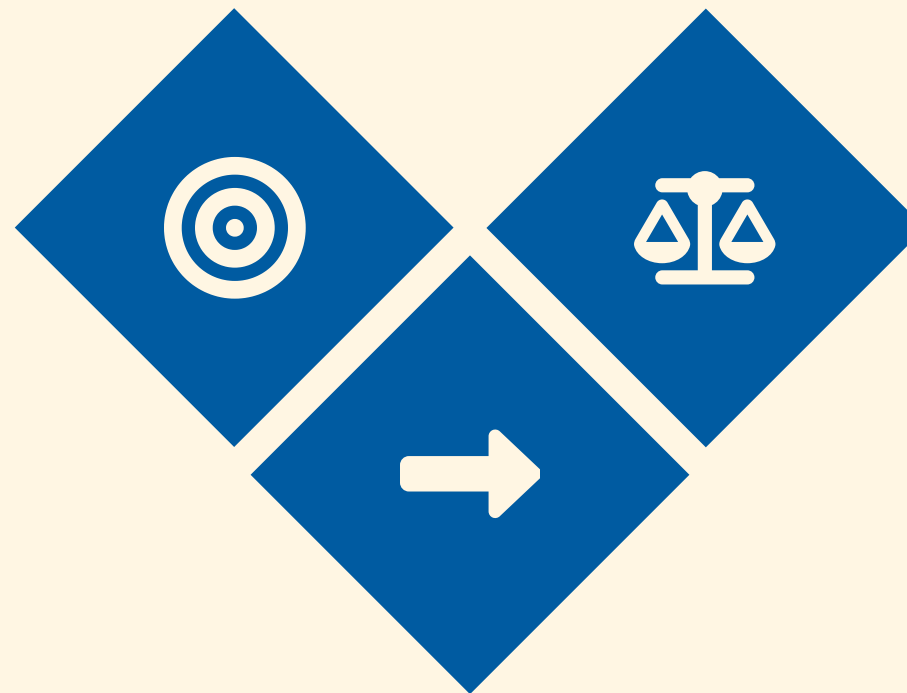
Центр этой окружности находится в основании перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость. Радиус окружности сечения выражается формулой $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Ключевые признаки касательной плоскости

Одна общая точка

Плоскость называют касательной к сфере, если она имеет с ней ровно одну общую точку. Именно этот признак отличает касание от пересечения по окружности.



Условие $d=R$

При касании расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу: $d=R$. Следовательно, касательная — частный случай общего правила для взаимного расположения.

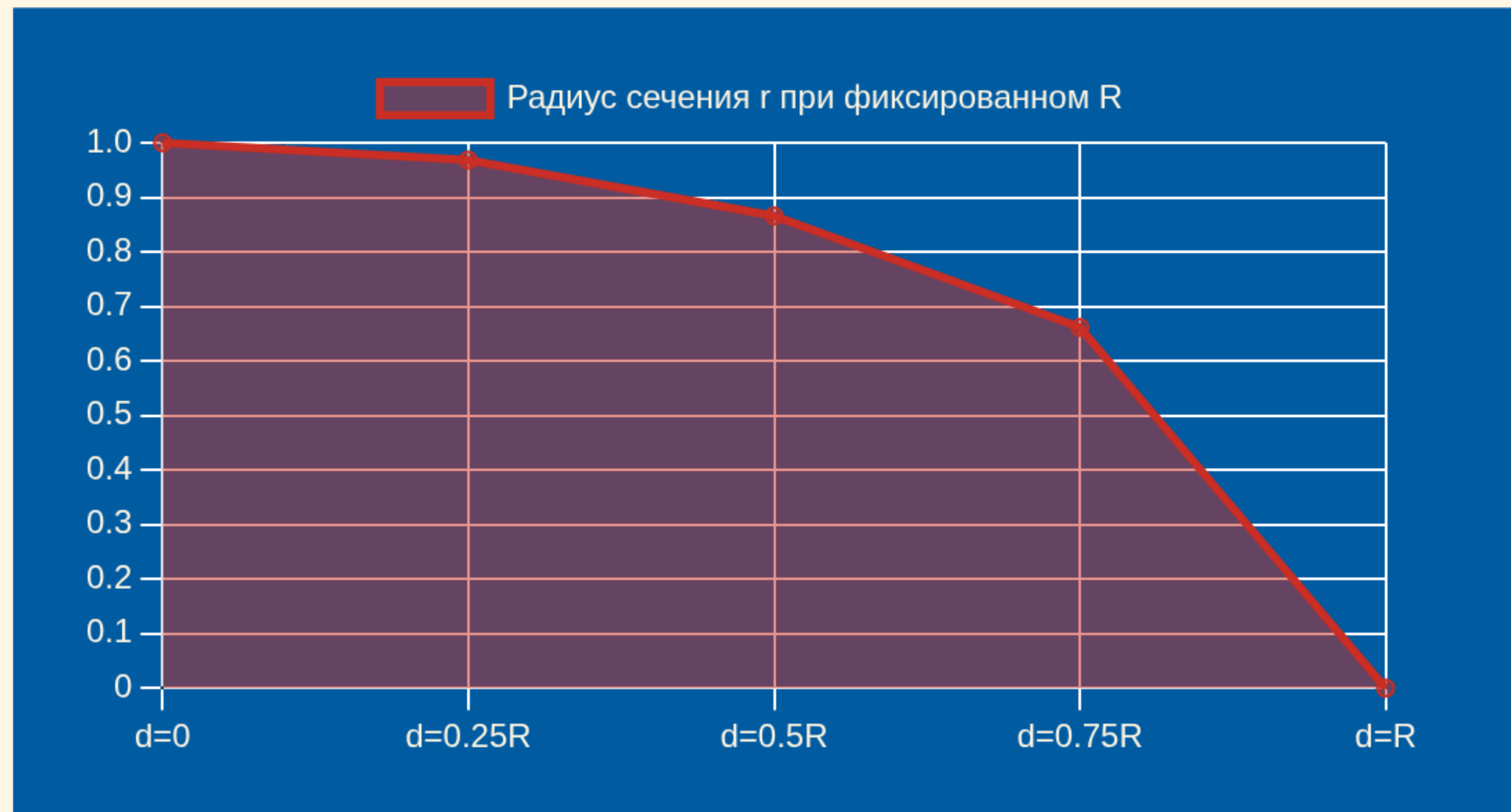
Перпендикуляр по радиусу

В точке касания радиус, проведённый из центра сферы, перпендикулярен касательной плоскости. Поэтому перпендикуляр из центра определяет направление касания.

Как меняется радиус сечения при увеличении d

Формула $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ показывает:
уменьшение r происходит не линейно, а
быстрее по мере приближения к касанию.

График подтверждает: чем ближе плоскость
к положению касательной, тем меньше
размер сечения, и при $d=R$ оно исчезает.



Зависимость получена из $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ при фиксированном R (школьная стереометрия), построено по нормированным значениям

Вывод формулы через прямоугольный треугольник

Опустим из центра сферы перпендикуляр на плоскость пересечения. В точке на окружности сечения получаем прямоугольный треугольник, связанный с расстояниями d и r .

Второй катет равен радиусу окружности сечения r , ведь он измеряет расстояние от основания перпендикуляра до точки пересечения в плоскости.

Гипотенуза этого треугольника равна радиусу сферы R , поскольку соединяет центр сферы с точкой окружности сечения. Один катет равен d — расстоянию от центра до плоскости.

По теореме Пифагора получаем $R^2 = d^2 + r^2$, откуда следует основная формула $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Если плоскость проходит через центр сферы, то $d=0$. Тогда радиус сечения равен R , а граница сечения — большой круг сферы. Это базовый ориентир для понимания остальных случаев.

$$d=0$$

**Это означает, что
расстояние от центра
сферы до плоскости
равно нулю, поэтому
пересечение имеет
наибольший возможный
радиус.**

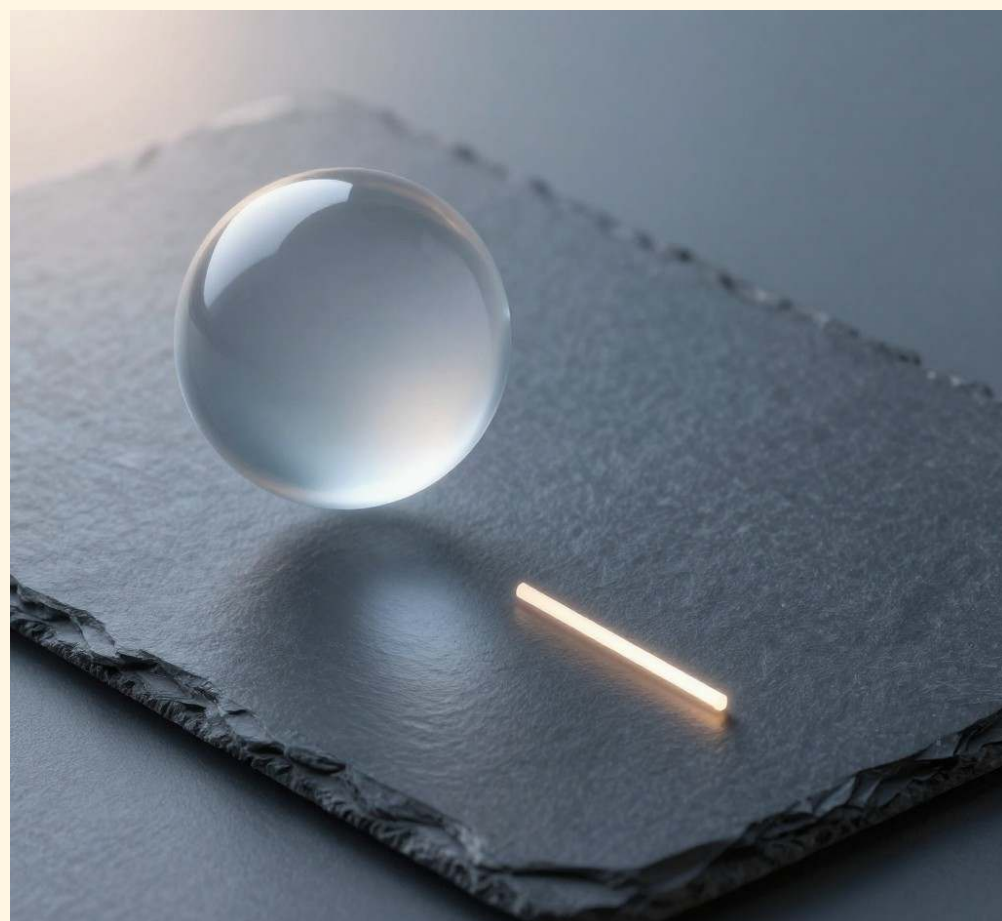
Основные формулы темы

Соберите в одну таблицу ключевые выражения: они напрямую связывают уравнения, расстояние d и геометрические результаты пересечения сферы и плоскости.

Все ответы сводятся к сравнению d и R и, при $d < R$, к применению связи $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

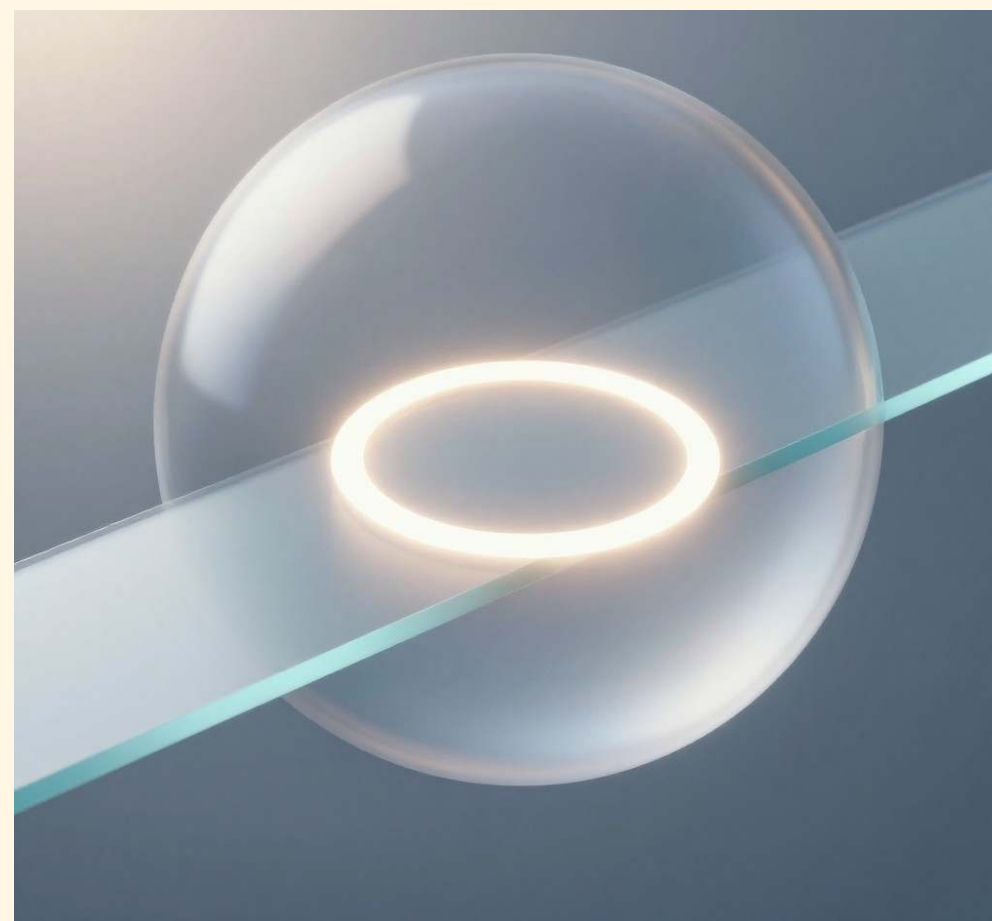
Величина	Формула	Назначение
Расстояние d	$ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$	определить d
Радиус сечения r	$\sqrt{R^2 - d^2}$	найти r при $d < R$
Касание	$d = R$	одна общая точка
Нет пересечения	$d > R$	общих точек нет

Координатная интерпретация: как это выглядит на чертеже



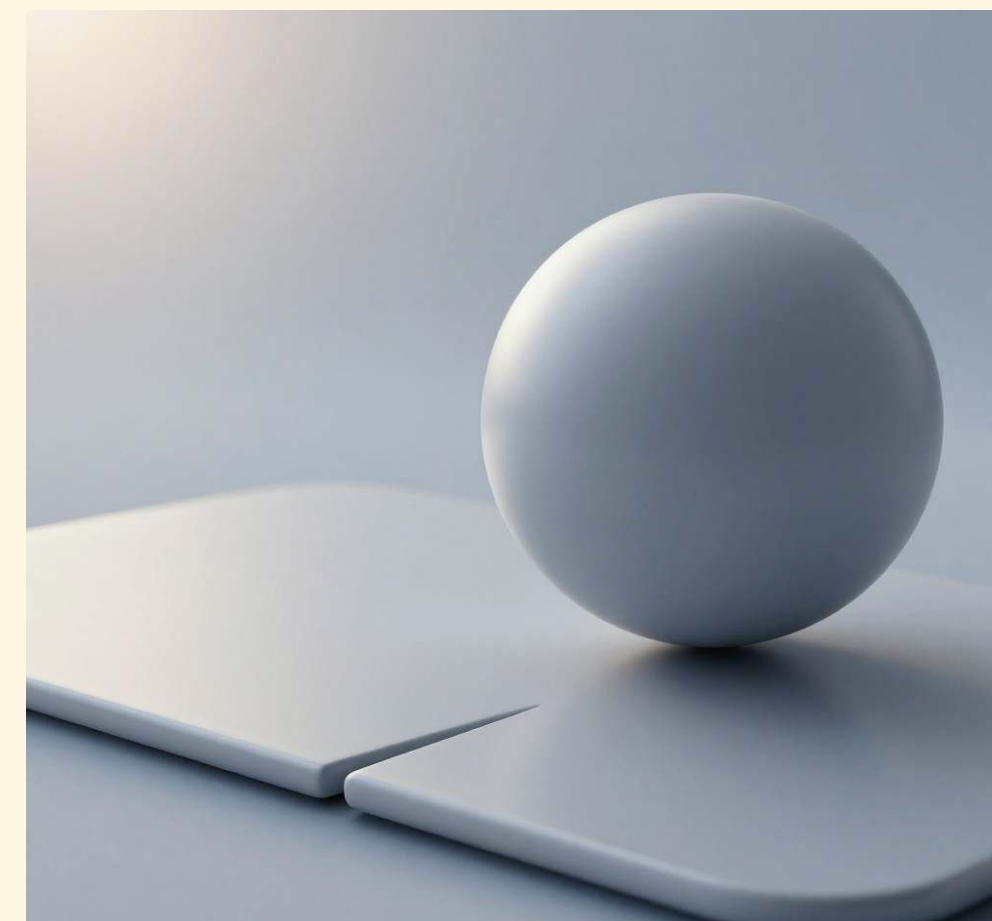
Когда сфера и плоскость «встречаются» в координатах

Заданы уравнения: сфера с центром и радиусом и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Для взаимного расположения вычисляют расстояние d от центра сферы до плоскости. Именно эта величина превращает алгебру в геометрию.



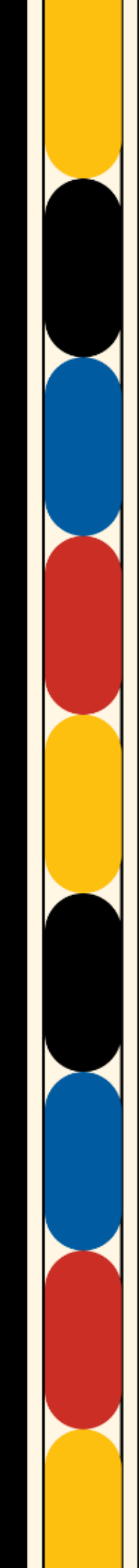
Сечение появляется как окружность на плоском срезе

Если $d < R$, то плоскость пересекает сферу и на чертеже возникает окружность сечения. Её геометрический смысл появляется после визуализации: центр окружности лежит в основании перпендикуляра от центра сферы к плоскости.



Касание — самый «тонкий» контакт

Когда $d = R$, окружность сечения «схлопывается» в одну точку — точку касания. В этот момент плоскость касается сферы, а перпендикуляр из центра к плоскости становится радиусом к точке касания.



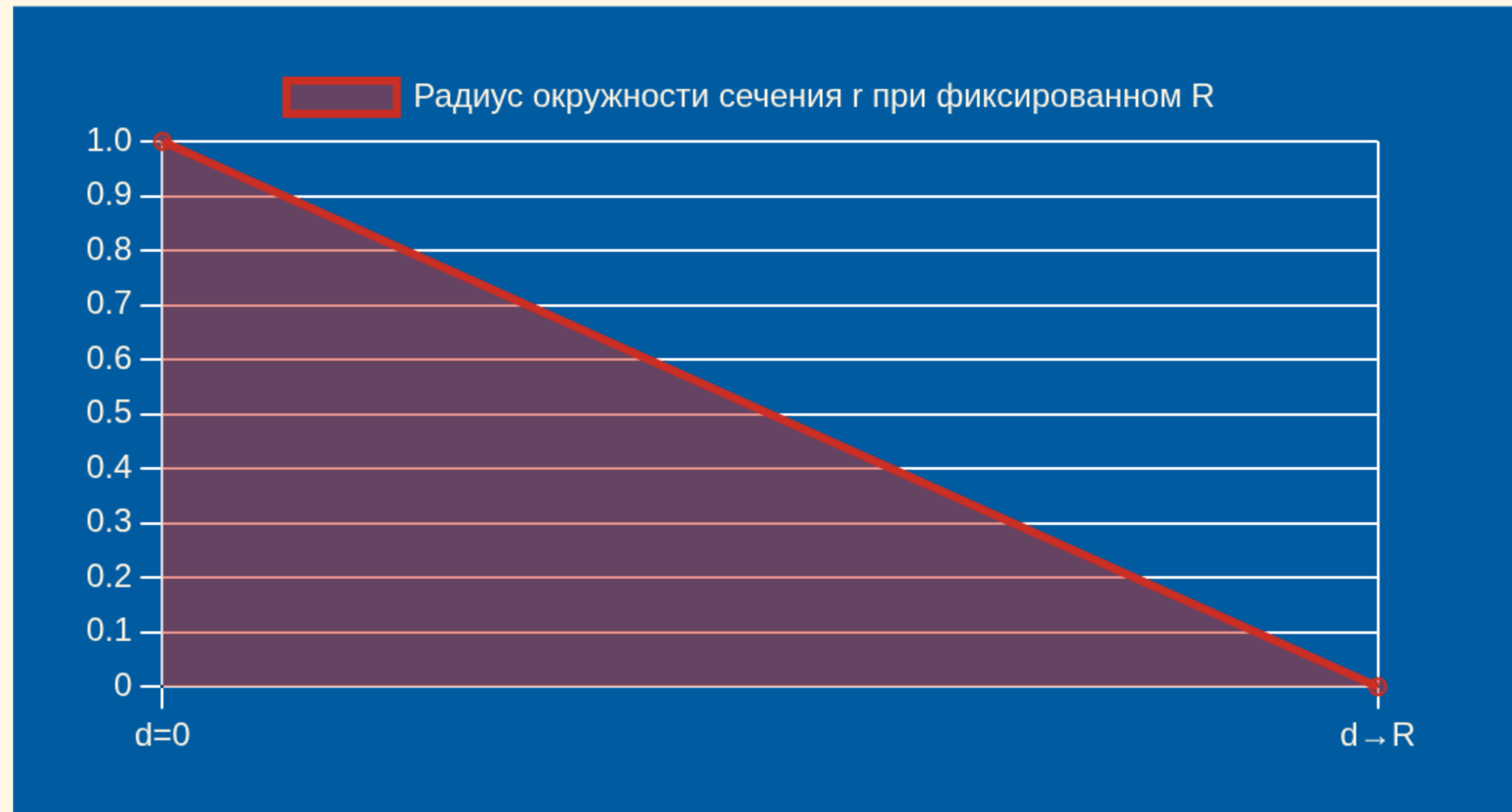
Алгоритм решения задач на сферу и плоскость

Логика решения опирается на вычисление расстояния от центра сферы до плоскости и дальнейшее сравнение d и R .

Три области значений расстояния d

При фиксированном R изменение положения плоскости проявляется только через d : радиус сечения убывает и исчезает при приближении к касанию.

Разбиение на области $d > R$, $d = R$ и $d < R$ полностью определяет число общих точек; внешний наклон плоскости сам по себе не влияет на результат.



Школьный курс стереометрии, зависимость $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ при $d < R$.

Типовые задачи и ответы



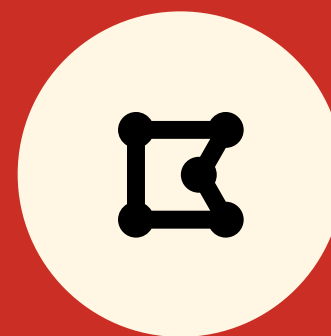
Определить тип пересечения

Дано уравнение сферы и плоскости. Находят расстояние d от центра сферы до плоскости, сравнивают d и R и получают ответ: нет пересечения, касание или окружность сечения.



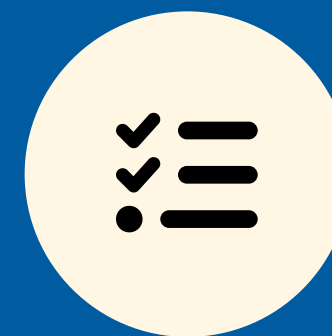
Найти радиус и площадь сечения

Если $d < R$, применяют $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Далее при необходимости вычисляют площадь сечения по $S = \pi r^2$. Такие задачи учат аккуратно переходить от расстояния к геометрии.



Составить условие касания

Когда требуется найти плоскость, касающуюся сферы, используют критерий $d = R$. Это превращает геометрическую формулировку в проверяемое уравнение для плоскости и её параметров.



Проверить ответ по смыслу

Результат удобно интерпретировать: r должен быть действительным только при $d < R$, а при $d = R$ должно получаться одно пересечение. Такой контроль снижает риск вычислительных ошибок.

Типичные ошибки при решении

Сопоставьте частую ошибку с причиной и правильным ориентиром, чтобы быстрее находить «слабое место» в решении.

Большинство промахов связано не с «идеями», а с подстановкой: что считать радиусом, как оформлять расстояние и как делать логическое сравнение d и R .

Ошибка	Причина	Правильный ориентир
Путаница R и r	Смешение радиуса сферы и радиуса сечения	R — радиус сферы; r — радиус окружности сечения
Пропуск модуля	Неверная запись расстояния до плоскости	в формуле расстояния используется модуль
Ложное касание	Не выполнено сравнение d и R	касание только при $d=R$
Ошибки по уравнениям	Не найден центр сферы	сначала определяют центр и радиус сферы

Практическое значение модели сфера—плоскость

Модель сфера—плоскость помогает описывать сечения шаров и круглых тел: от геометрических задач до реальных «срезов» в материалах. По полученному радиусу легко оценить размеры отверстий и выемок.

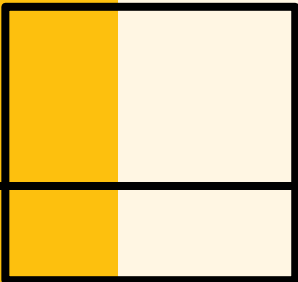
Идеи сечений встречаются и вне техники: в географии и астрономии рассматривают модели планеты и её сечений. Даже без углубления в физику видно, как геометрия поддерживает наблюдаемую картину.

В инженерных эскизах такая схема применяется для нахождения геометрии срезов куполов и сферических деталей. Переход от расстояния d к радиусу сечения r дает измеряемый результат без сложного перебора вариантов.

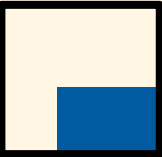
Для школьной математики эта тема тренирует пространственное мышление: нужно «перевести» условие в координаты, вычислить расстояние и затем вернуться к геометрическому смыслу пересечения.

Итоговая классификация взаимного расположения

Взаимное расположение сферы и плоскости задаётся одним параметром — расстоянием d от центра сферы до плоскости. Именно оно показывает, насколько плоскость далеко от центра в перпендикулярном направлении.



Если $d > R$, расстояние больше радиуса, поэтому сфера и плоскость не имеют общих точек. Плоскость проходит «слишком далеко» и пересечения не возникает.



Если $d = R$, плоскость касается сферы в одной точке; при $d < R$ образуется окружность сечения. Такая классификация полностью достаточна для решения типовых задач темы.

Ключевой вывод по теме: d управляет всем

Сравнение расстояния от центра сферы до плоскости с радиусом сферы полностью определяет характер пересечения. Формула $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ связывает исходные параметры и радиус сечения, объединяя аналитическую геометрию и теорему Пифагора.