

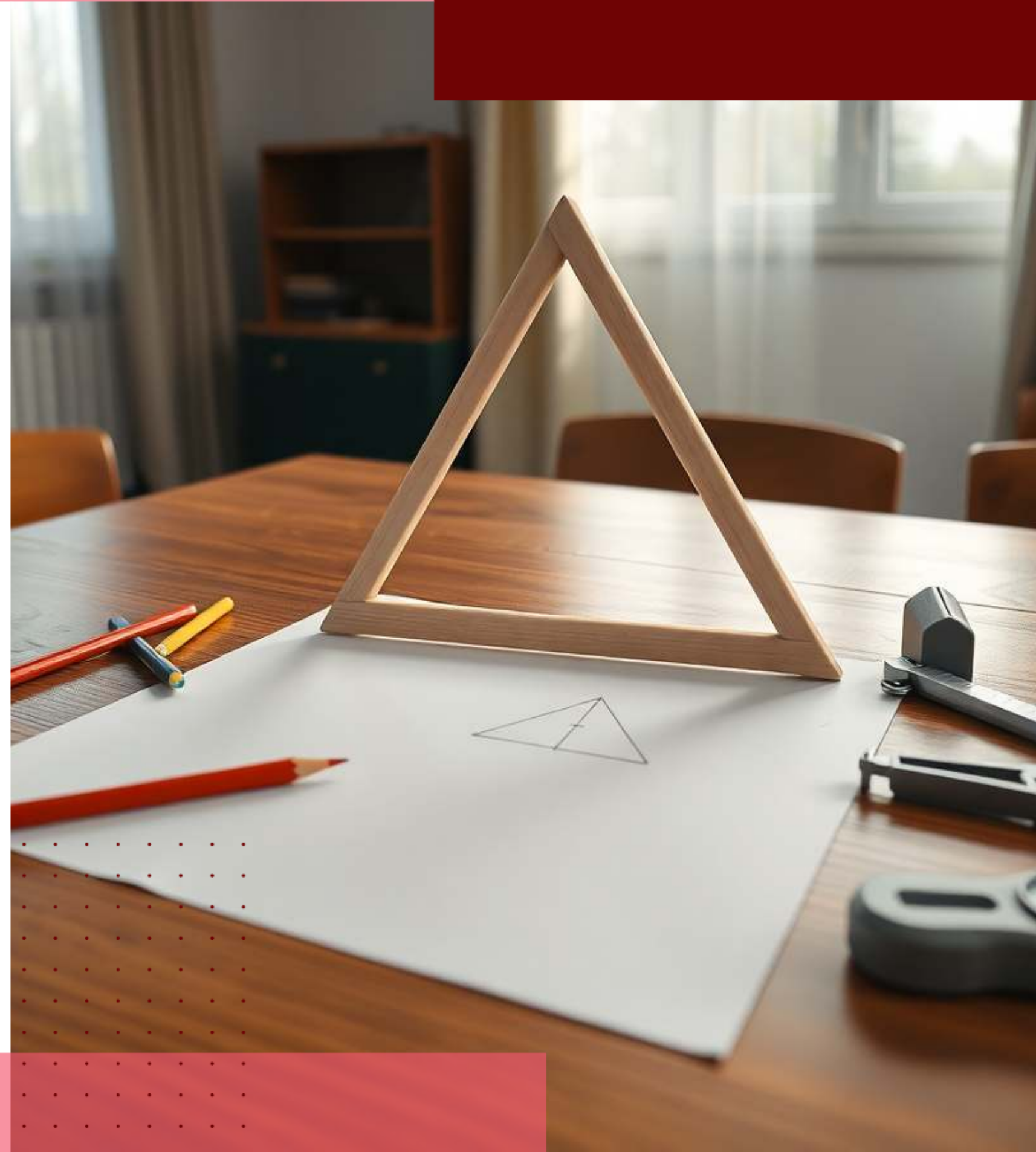
Решение треугольников: как находить неизвестные стороны и углы

Находим все неизвестные элементы треугольника по нескольким данным.



С чего начинается решение задачи

Обычно известны две стороны и угол, одна сторона и два угла или три стороны. Сначала важно внимательно прочитать условие, отметить данные на чертеже и понять, какой способ подходит.



Что значит полностью решить треугольник

1. Все элементы

Полное решение означает, что найдены все три стороны и все три угла. После этого можно вычислить периметр, площадь или высоту, если они нужны по условию.

2. Определить вид

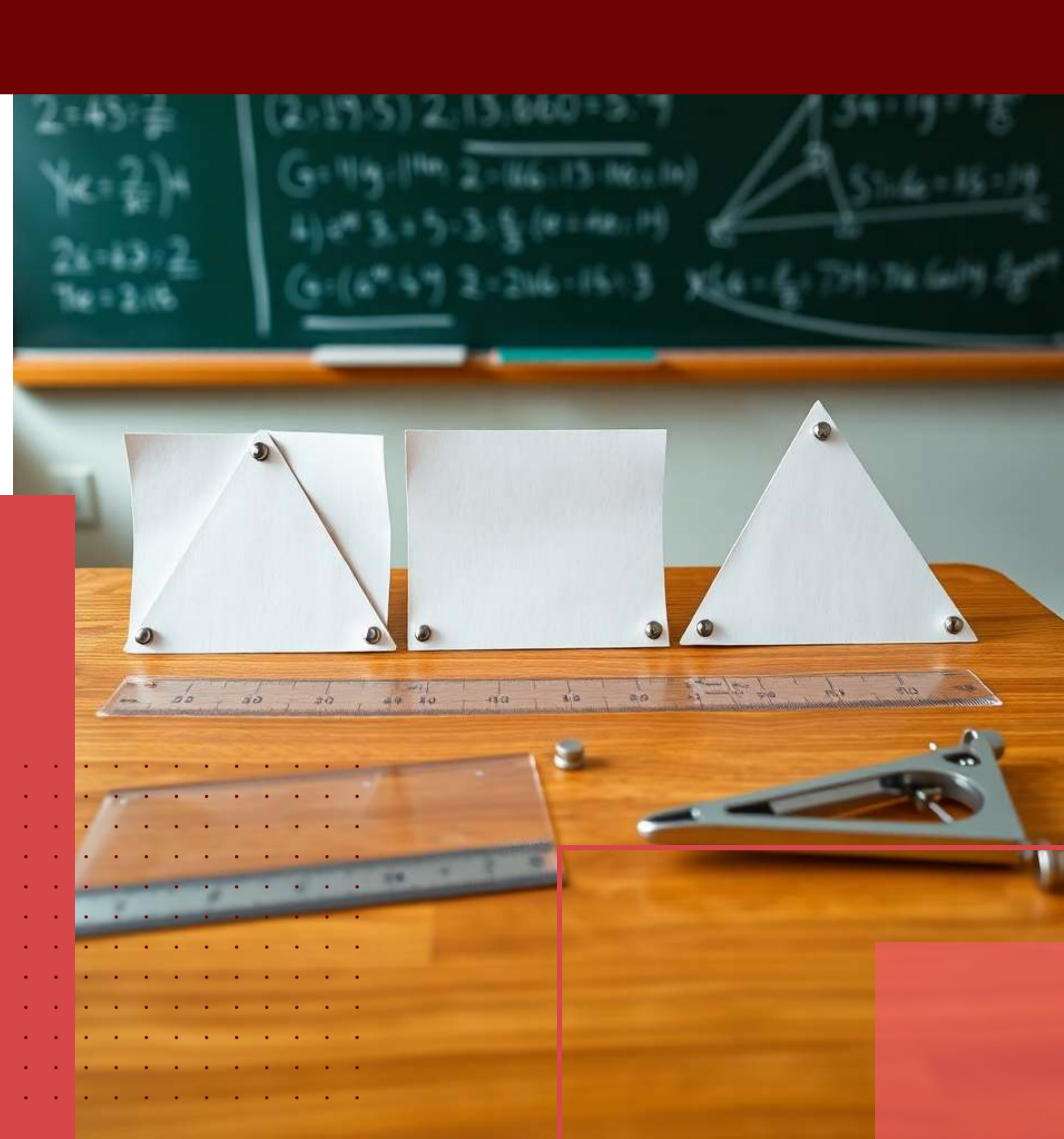
Сначала рассматривают, какой это треугольник: прямоугольный, равнобедренный, разносторонний или тупоугольный. От этого зависит, какие свойства и формулы окажутся самыми удобными.

3. Выбрать правило

Если известны данные, их сопоставляют с подходящей формулой. В одних задачах помогает сумма углов, в других — теорема Пифагора, синусов или косинусов.

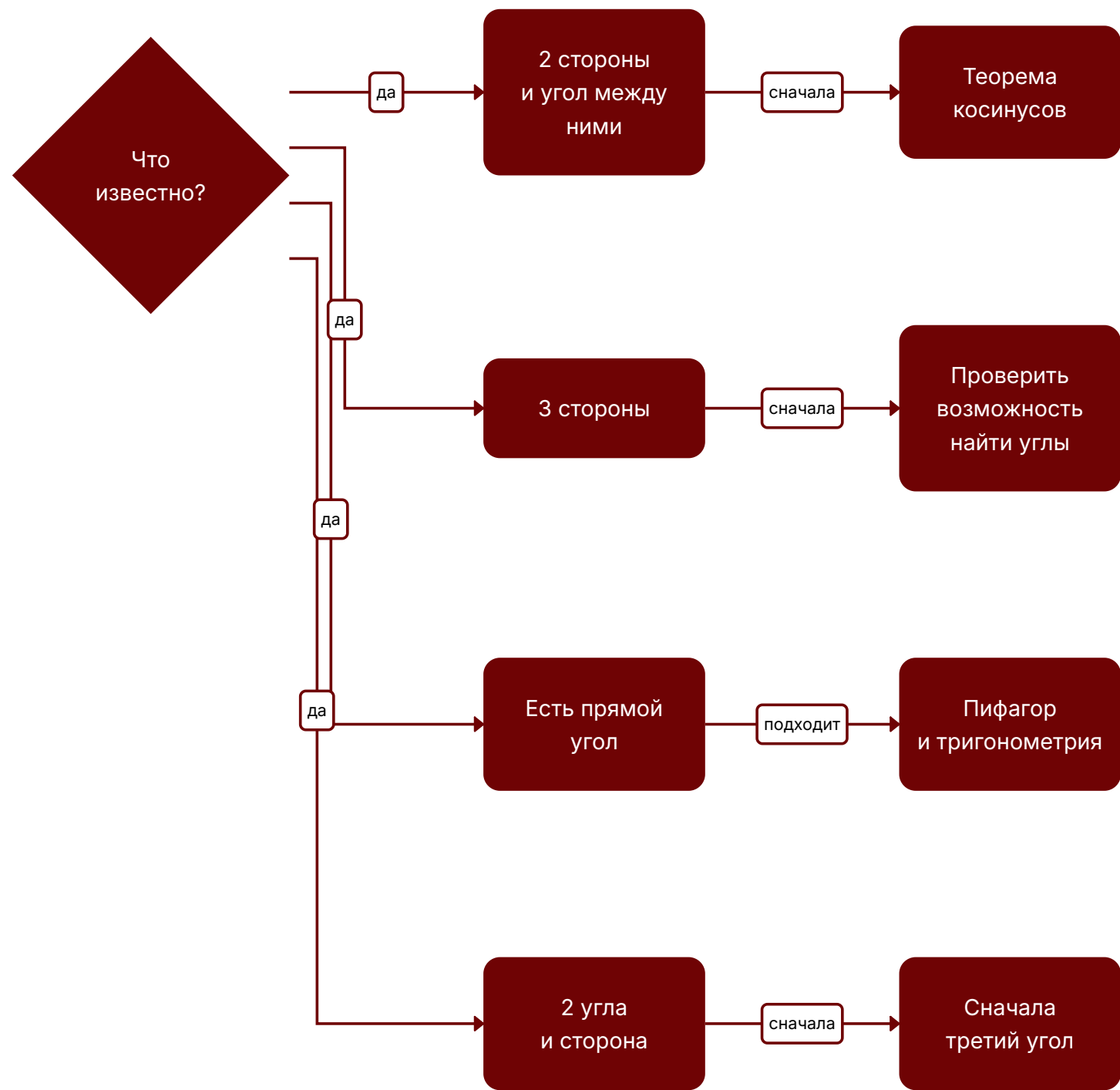
4. Дойти до ответа

После вычислений проверяют, не нарушаются ли свойства треугольника. Если все стороны и углы согласуются между собой, задача решена полностью и ответ можно записывать.



Как выбрать способ решения

Схема помогает определить формулу по известным элементам треугольника.



Сумма углов треугольника

Главное свойство

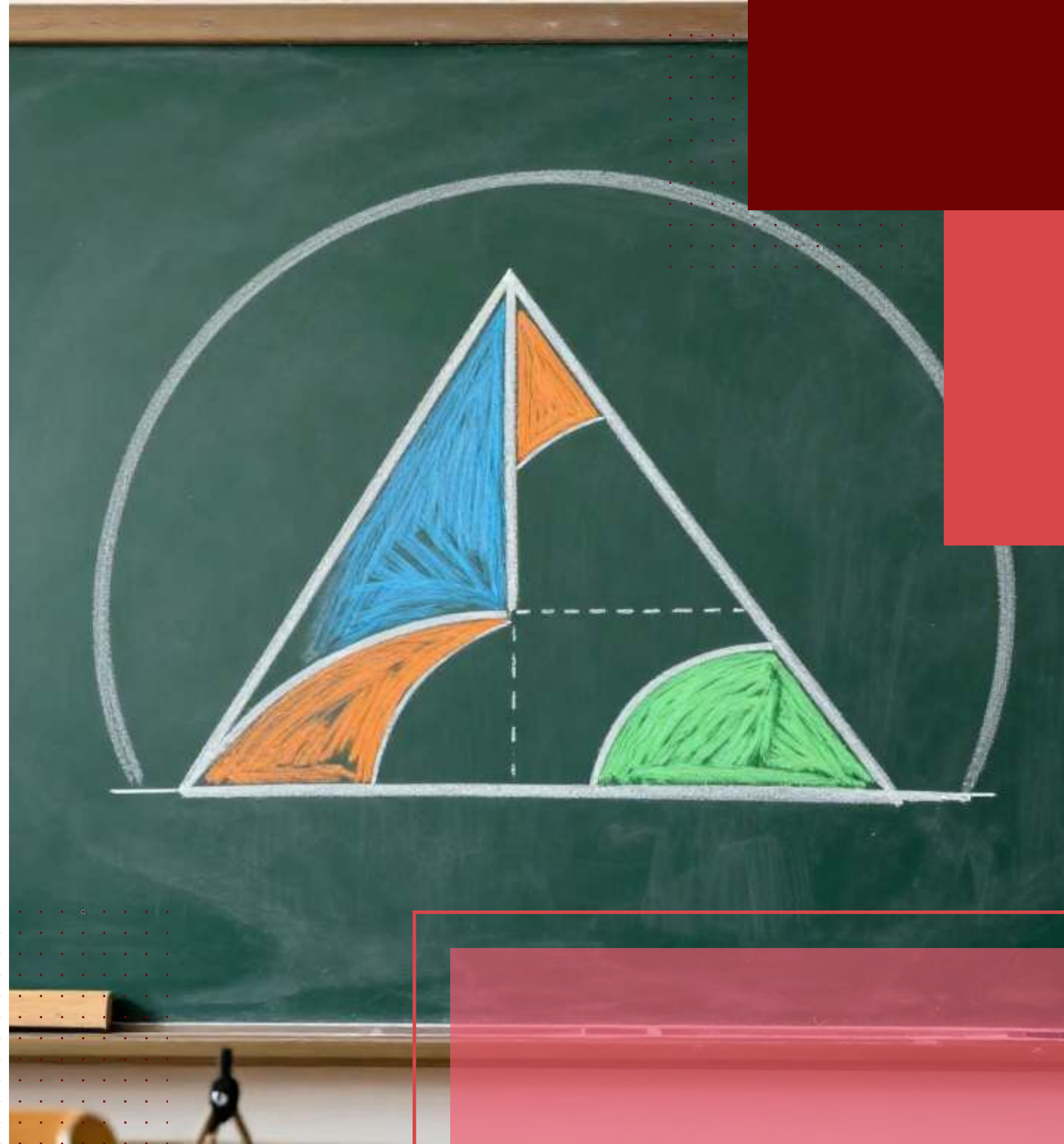
В любом треугольнике сумма внутренних углов всегда равна 180° . Это одно из самых важных правил геометрии, без которого нельзя правильно находить неизвестный угол.

Как найти угол

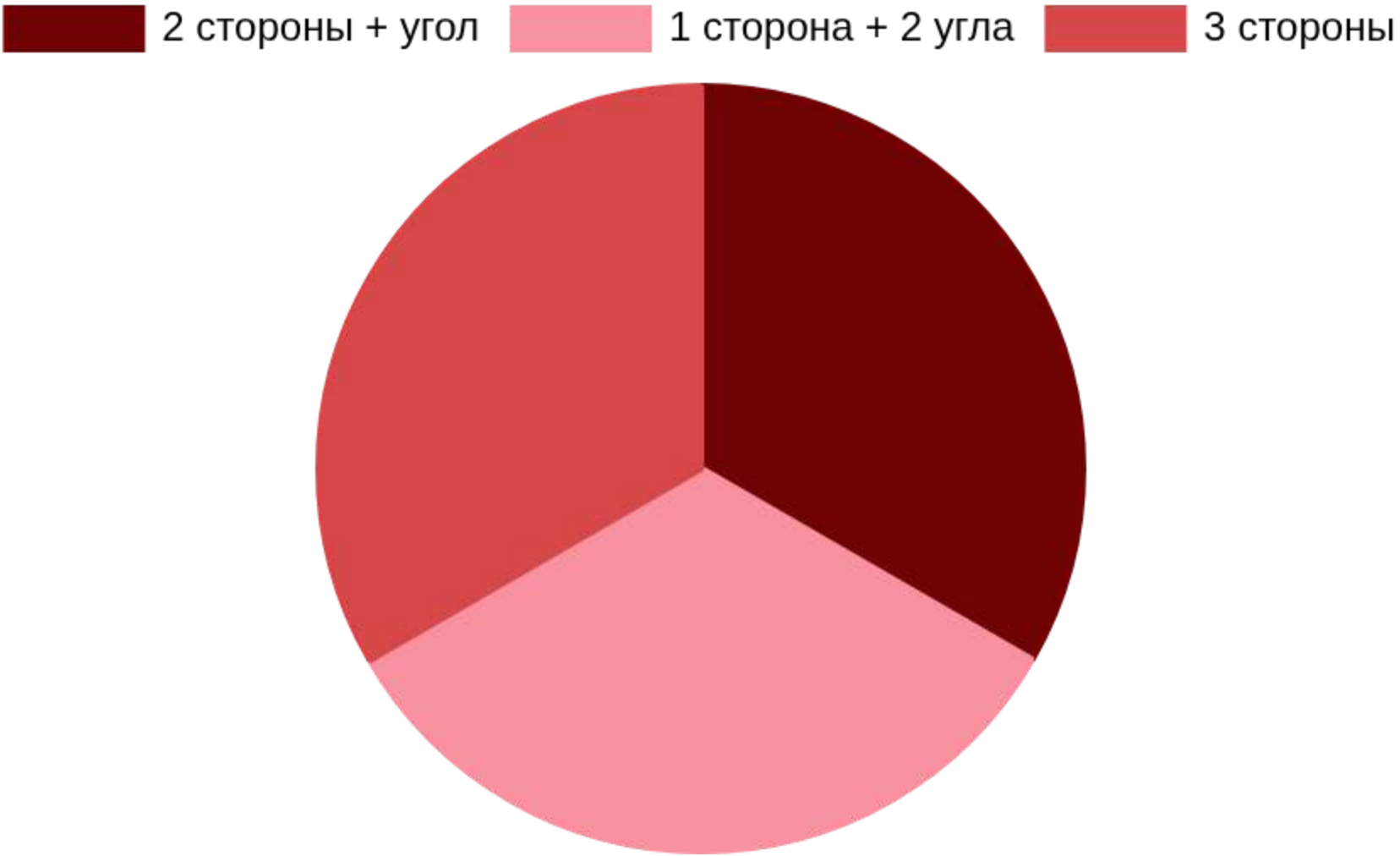
Если известны два угла, третий находят вычитанием их суммы из 180° . Например, при углах 50° и 60° остаётся 70° , потому что $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Как показать на рисунке

На чертеже удобно подписать все известные углы и отметить, что вместе они составляют 180° . Такой рисунок помогает не перепутать данные и быстрее увидеть недостающий угол.



Самые частые виды задач по теме



Каждый случай требует своей формулы и последовательности действий, поэтому важно сначала определить, какие элементы уже даны.

Диаграмма показывает три базовых типа задач без перевеса одного варианта. Для каждого нужен свой путь решения.

Учебная схема по теме «Решение треугольников», без статистических данных

Теорема синусов

1.

Основная запись

Стороны треугольника относятся как синусы противолежащих углов: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. Эта запись связывает длины сторон с величинами углов.

2.

Когда она полезна

Теорема особенно удобна, если известны одна сторона и два угла. Тогда сначала находят недостающий угол, а затем по пропорции вычисляют остальные стороны.

3.

Что важно помнить

В формуле каждая сторона должна стоять напротив своего угла. Если перепутать соответствие, ответ получится неверным, даже если сами вычисления выполнены без ошибок.

Когда удобно применять теорему синусов

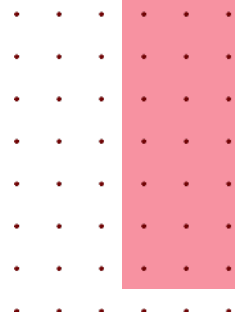
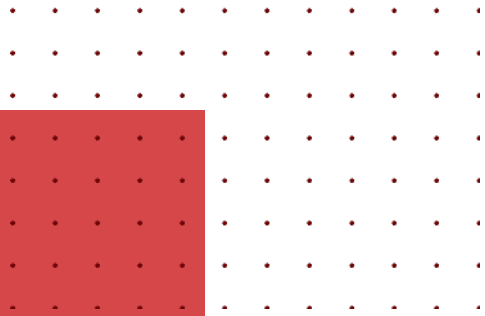


Схема помогает быстро понять, подходит ли теорема синусов для конкретной задачи.

Теорема синусов работает, когда есть пара «сторона и противолежащий угол». Это главный ориентир при выборе способа решения.

Случай	Подходит ли
1 сторона + 2 угла	Да
2 стороны + не между ними	Часто да
3 стороны	Нет сразу
Прямоугольный	Для острых углов



Теорема косинусов

Связь сторон

Теорема косинусов выражает третью сторону через две другие и угол между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Подобные формулы записывают и для остальных сторон.

Для чего нужна

Она помогает находить неизвестную сторону, если даны две стороны и угол между ними. Это один из самых удобных способов для неполных данных в треугольнике.

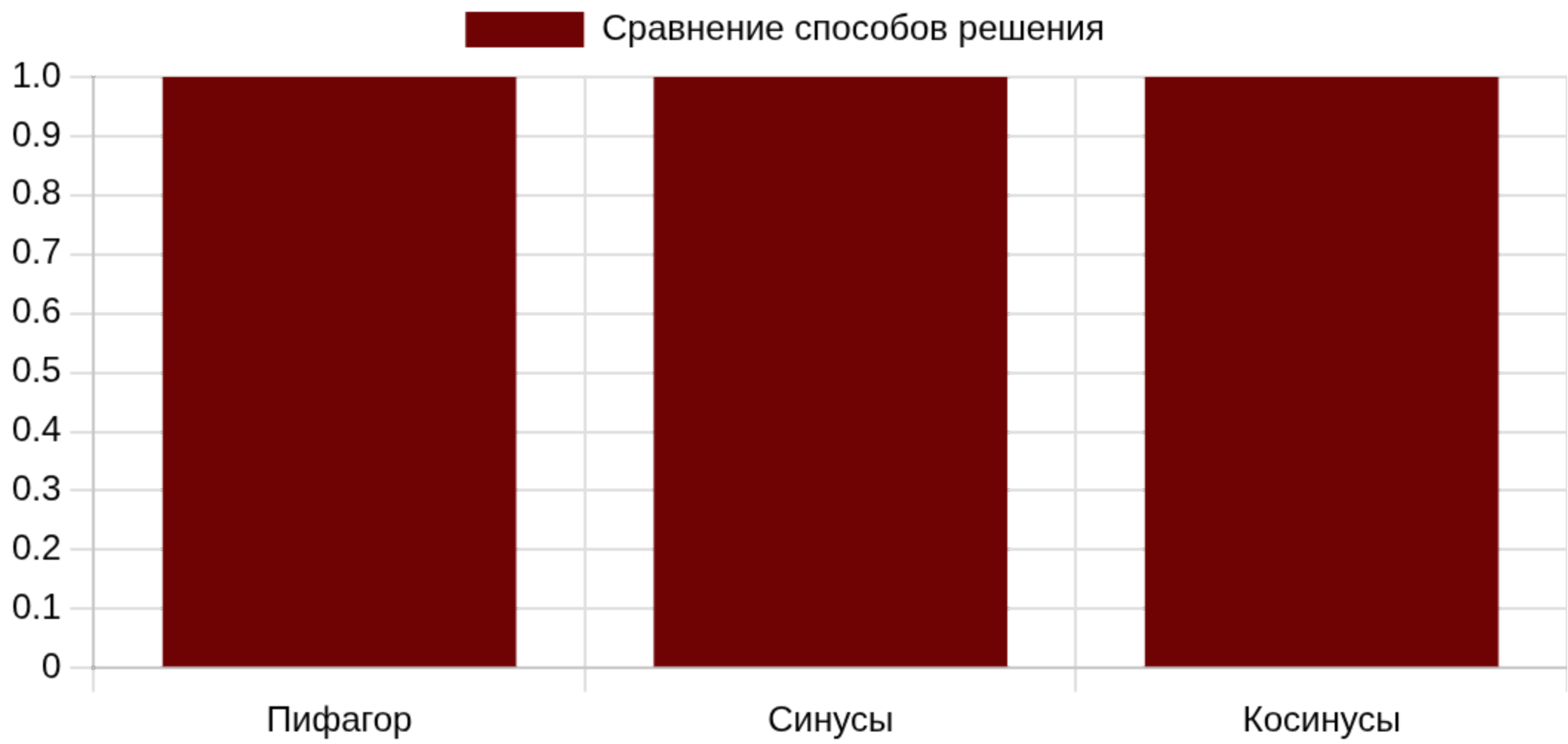
Как найти угол

Если известны все три стороны, теорема косинусов позволяет вычислить угол. Для этого формулу преобразуют так, чтобы выразить косинус нужного угла.

Связь с Пифагором

В прямоугольном треугольнике косинус прямого угла равен нулю, поэтому лишний член исчезает, и формула превращается в теорему Пифагора.

Пифагор, синусы и косинусы: что для чего подходит



Каждый способ опирается на свой набор известных данных, поэтому выбор формулы начинается не с вычислений, а с анализа условия.

Пифагор нужен только для прямоугольного треугольника, синусы связывают стороны с противолежащими углами, а косинусы подходят для любых треугольников.

Школьная схема сравнения формул по теме «Решение треугольников»

Случай: известны две стороны и угол между ними

1. Находим третью сторону

Сначала применяют теорему косинусов, потому что известны две стороны и угол между ними. По этой формуле сразу получают неизвестную сторону, не переходя к лишним построениям и дополнительным вычислениям.

2. Далее ищем остальные углы

Когда третья сторона уже найдена, остальные углы удобно вычислять по теореме синусов. Для этого используют пару «сторона и противолежащий ей угол», которая уже есть в условии или была найдена ранее.

3. Важно отметить нужный угол

На чертеже особенно важно выделить угол между известными сторонами, а не соседний. Именно он задаёт форму треугольника и делает выбор формулы однозначным и безошибочным.



Случай: известна одна сторона и два угла

1.

1. Сначала третий угол

Начинают с того, что находят третий угол: из 180° вычитают сумму двух известных углов. Это сразу завершает описание формы треугольника по углам.

2.

2. Потом применяют синусы

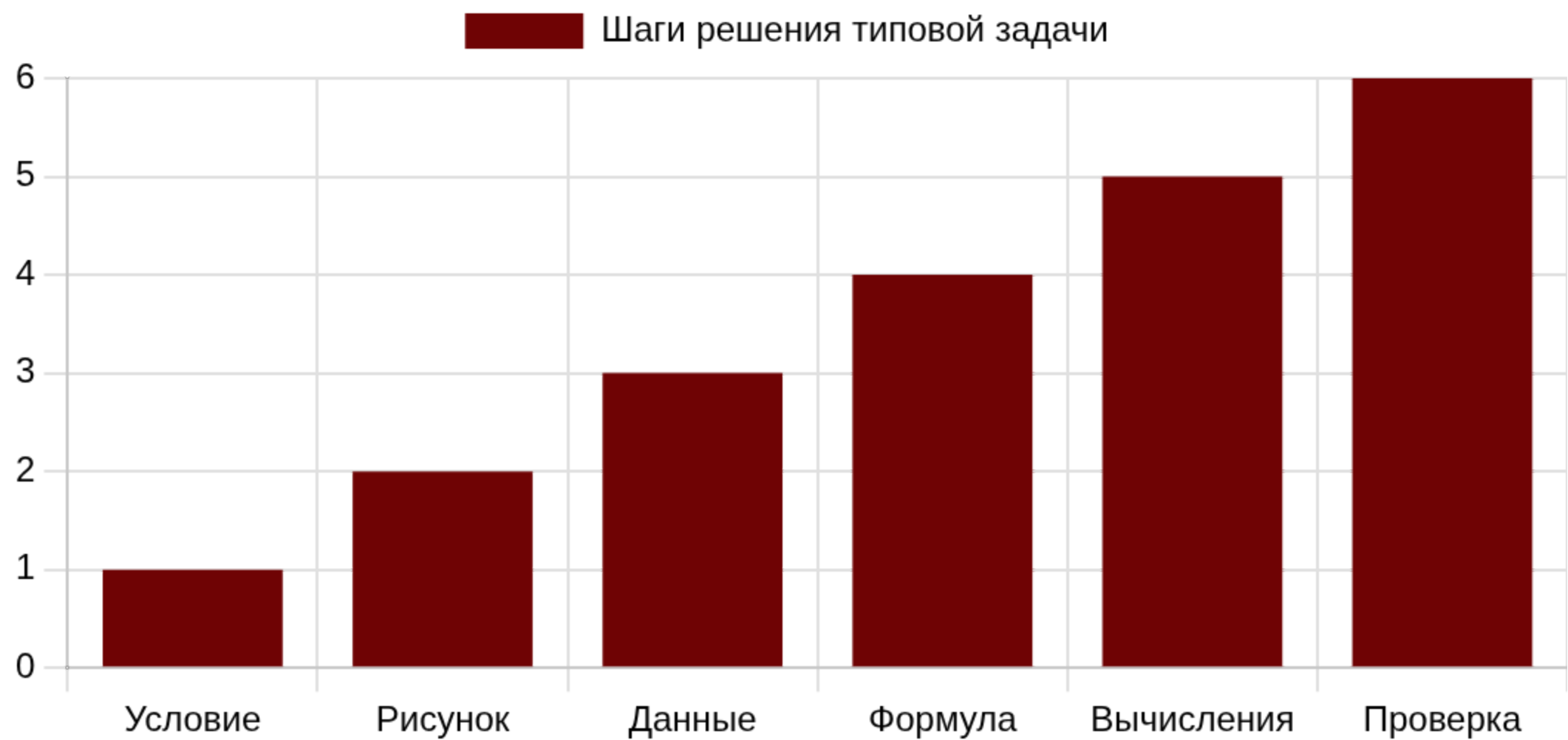
После этого по теореме синусов вычисляют неизвестные стороны. Когда известна одна сторона и все углы, каждая новая сторона находится через пропорцию с соответствующим противолежащим углом.

3.

3. Все элементы восстанавливаются

Такой случай удобен тем, что позволяет полностью восстановить треугольник. Обычно он встречается, когда дана сторона основания и два угла при вершинах.

Порядок решения типовой задачи



Последовательность помогает не смешивать данные и не терять важные связи между сторонами и углами.

Чем аккуратнее выполнены первые шаги, тем меньше риск ошибки в формуле и ответе.

Учебная схема по теме «Решение треугольников»

Точность вычислений и округление

Сначала считаем точно

Промежуточные значения лучше сохранять без раннего округления, чтобы не накапливать погрешность. Особенно это важно при работе с теоремой синусов и косинусов.

Затем округляем ответ

Углы обычно округляют до 1° , а стороны — до 0,1 или 0,01, если в задаче не указано иначе. Округление делают только в конце решения.

Проверяем правдоподобие

После вычислений сравнивают сумму углов с 180° и смотрят, соответствует ли большая сторона большему углу. Если связь нарушена, ответ нужно пересчитать.

Формулы для прямоугольного треугольника

Что известно	Формула	Что находят
Два катета	Пифагор	Гипотенузу
Катет и гипотенуза	Пифагор	Другой катет
Катет и угол	$\sin, \cos, \operatorname{tg}$	Сторону
Гипотенуза и угол	$\sin$ или $\cos$	Катет

Школьные формулы по геометрии

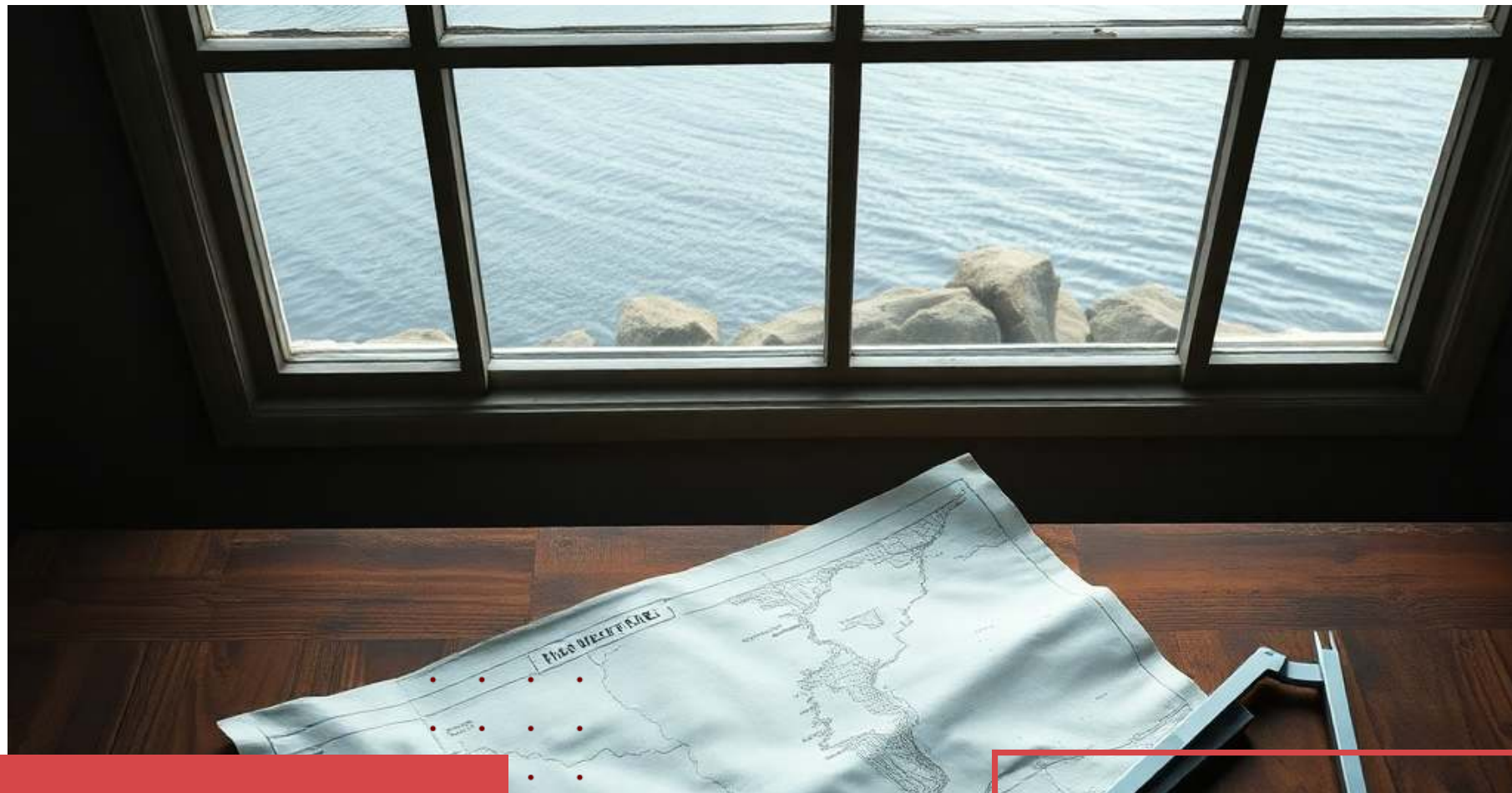
В прямоугольном треугольнике выбор формулы зависит от того, какие элементы уже известны.

Прямой угол упрощает задачу: часто достаточно одной теоремы или одной тригонометрической функции.

Где решение треугольников встречается в жизни

Карта, река и недоступная точка

Чтобы найти расстояние до места, куда нельзя подойти напрямую, используют схему с треугольником. Так можно оценить ширину реки, длину отрезка на карте или расстояние до далёкого объекта, опираясь на измеримые стороны и углы.



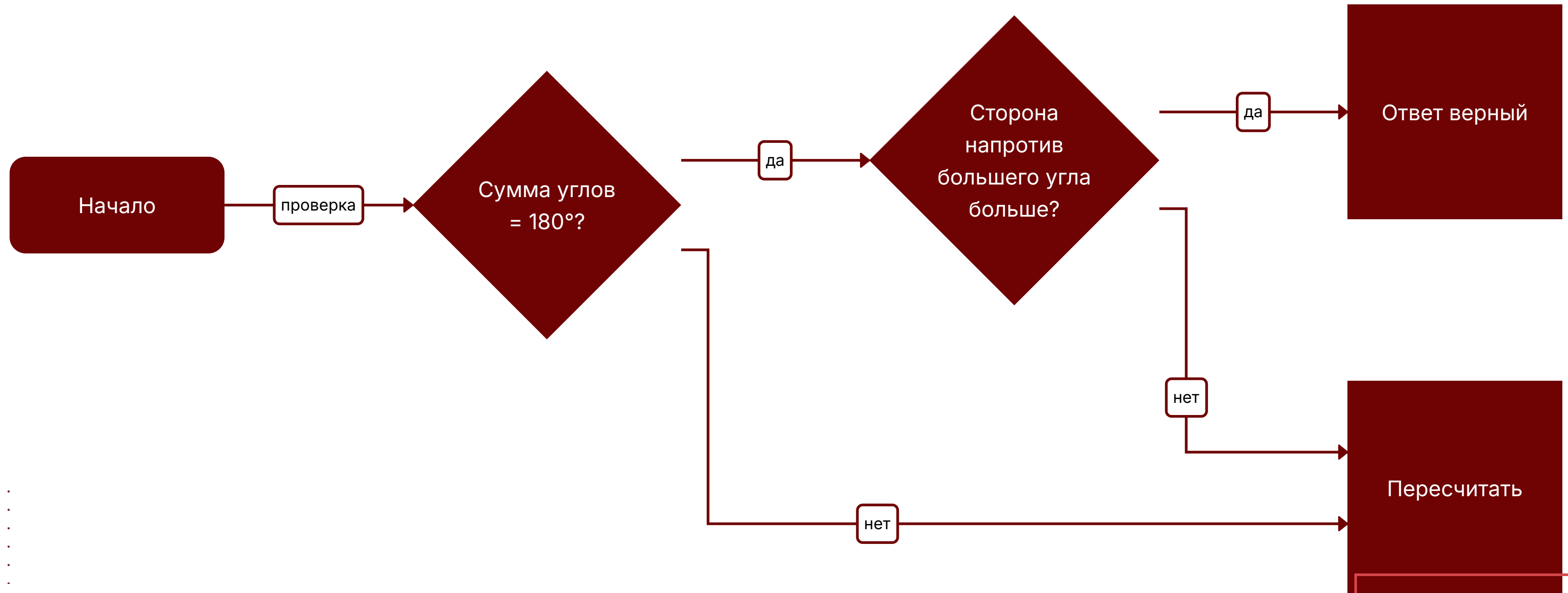
Крыша, участок и навигация

В строительстве треугольники помогают рассчитывать наклон крыши и длины деталей. При разметке участка они уточняют границы, а в навигации — направление движения. Везде важны точные углы и правильно измеренные стороны.

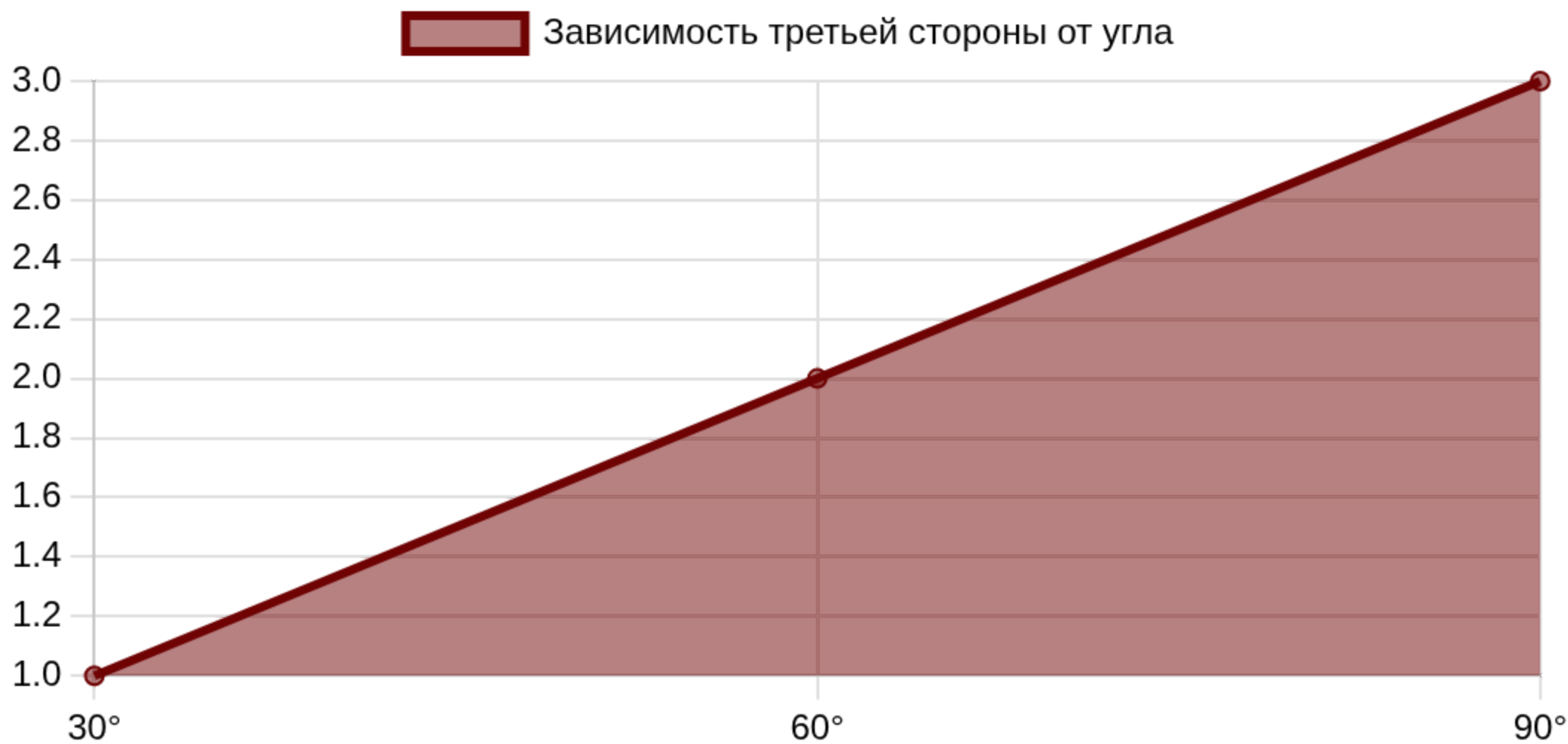


Проверка правильности ответа

Схема помогает быстро оценить, не допущена ли ошибка в вычислениях и выборе формулы.



Как меняется сторона при изменении угла



Иллюстративный расчёт по теореме косинусов

При тех же двух сторонах увеличение угла между ними делает третью сторону длиннее.

График показывает: чем больше угол, тем больше противоположная ему сторона, что соответствует теореме косинусов.

Типичные ошибки при решении треугольников

Путают сторону и угол

Часто берут не ту пару «сторона — противолежащий угол» и подставляют данные в неверное место формулы. Из-за этого ответ может выглядеть правдоподобно, но быть неправильным.

Забывают про 180°

Если известны два угла, третий обязательно находят из суммы 180° . Пропуск этого шага приводит к ошибке уже на самом начале решения и ломает все последующие вычисления.

Выбирают неподходящую формулу

Теорему Пифагора применяют только в прямоугольном треугольнике, а теорему синусов — там, где есть нужная пара сторон и углов. Важно сначала определить вид задачи.

Рано округляют числа

Если округлять промежуточные значения слишком рано, небольшая погрешность быстро растёт. Лучше сохранять вычисления точными и округлять только итоговый ответ по требованиям задачи.

Не проверяют чертёж

Когда рисунок не подписан, легко перепутать данные и забыть нужный угол. Аккуратная схема с отметками помогает увидеть связь между известными и искомыми элементами.





Решение треугольников: ключ к точным вычислениям

Чтобы решить треугольник, нужно понять, какие данные даны, а затем выбрать правильную опору: сумму углов, теорему синусов, теорему косинусов или теорему Пифагора.

