

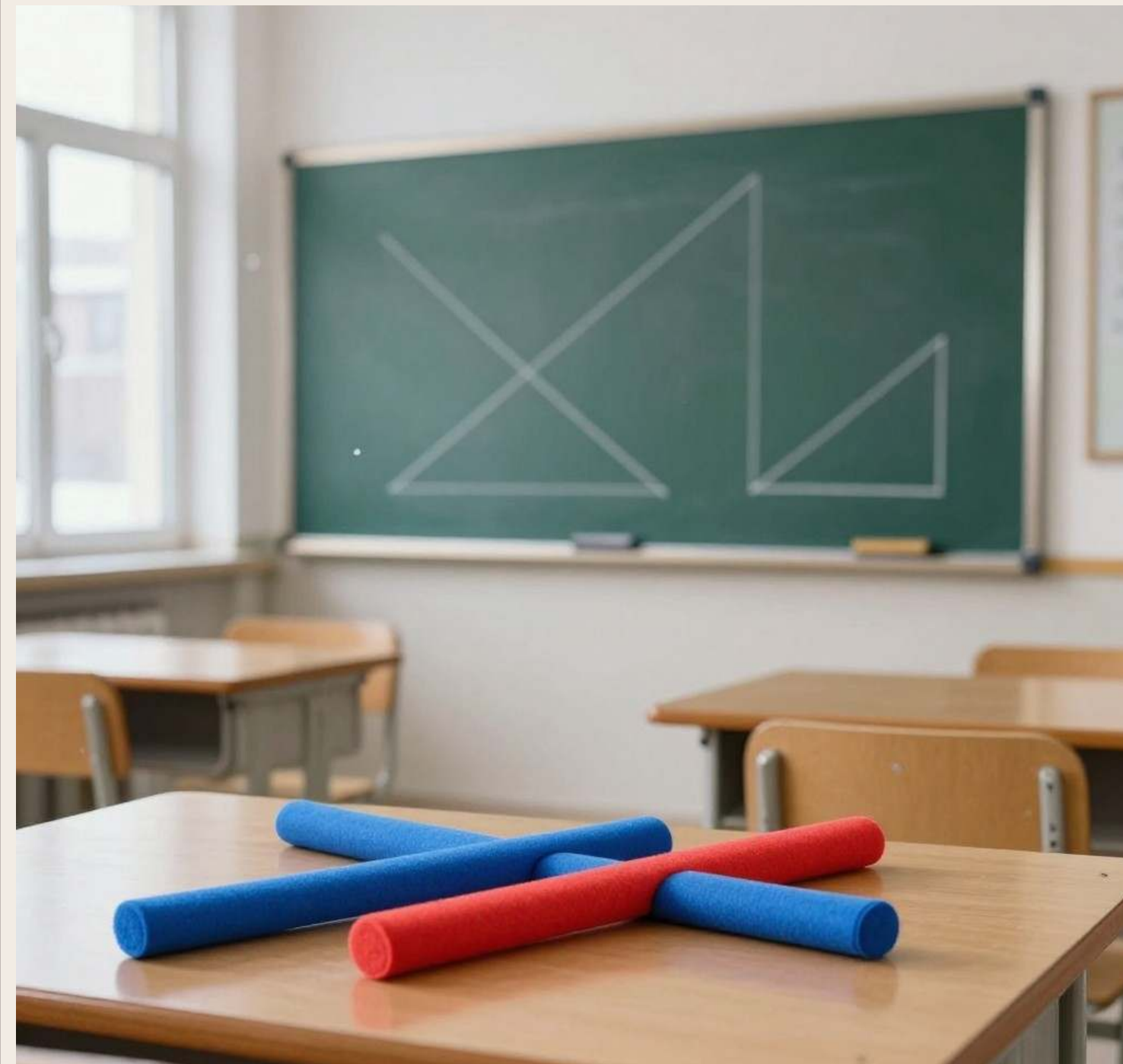


Скалярное произведение векторов: основная идея и зачем оно нужно

Одна формула связывает длину, направление и угол между векторами.

Где тема встречается в школьной геометрии

Скалярное произведение изучают после векторов, их длины и координат. Оно помогает находить углы, проверять прямой угол и решать задачи на плоскости и в пространстве без лишних построений.



Что такое вектор и какие у него характеристики



Длина и направление

Вектор — это направленный отрезок. У него есть длина, направление и две точки: начало и конец, поэтому один и тот же вектор можно задавать по-разному.



Как обозначают векторы

Чаще всего векторы записывают буквами a и b или через две точки, например AB . Такое обозначение удобно в геометрии, когда важно связать рисунок с формулой.



Направления векторов

Сонаправленные векторы образуют угол 0° , противоположно направленные — 180° , а перпендикулярные — 90° . Эти случаи особенно важны, потому что сразу показывают связь со скалярным произведением.



Почему это важно

Когда векторы сравнивают по направлению, можно заранее предположить знак результата. Это помогает быстрее понимать, будет ли скалярное произведение положительным, отрицательным или равным нулю.



90°

при таком угле косинус равен нулю, поэтому скалярное произведение тоже равно нулю.

Определение скалярного произведения векторов

Перпендикулярные векторы дают нулевой результат — это самый наглядный случай, который помогает проверить прямой угол.

Как угол между векторами влияет на результат

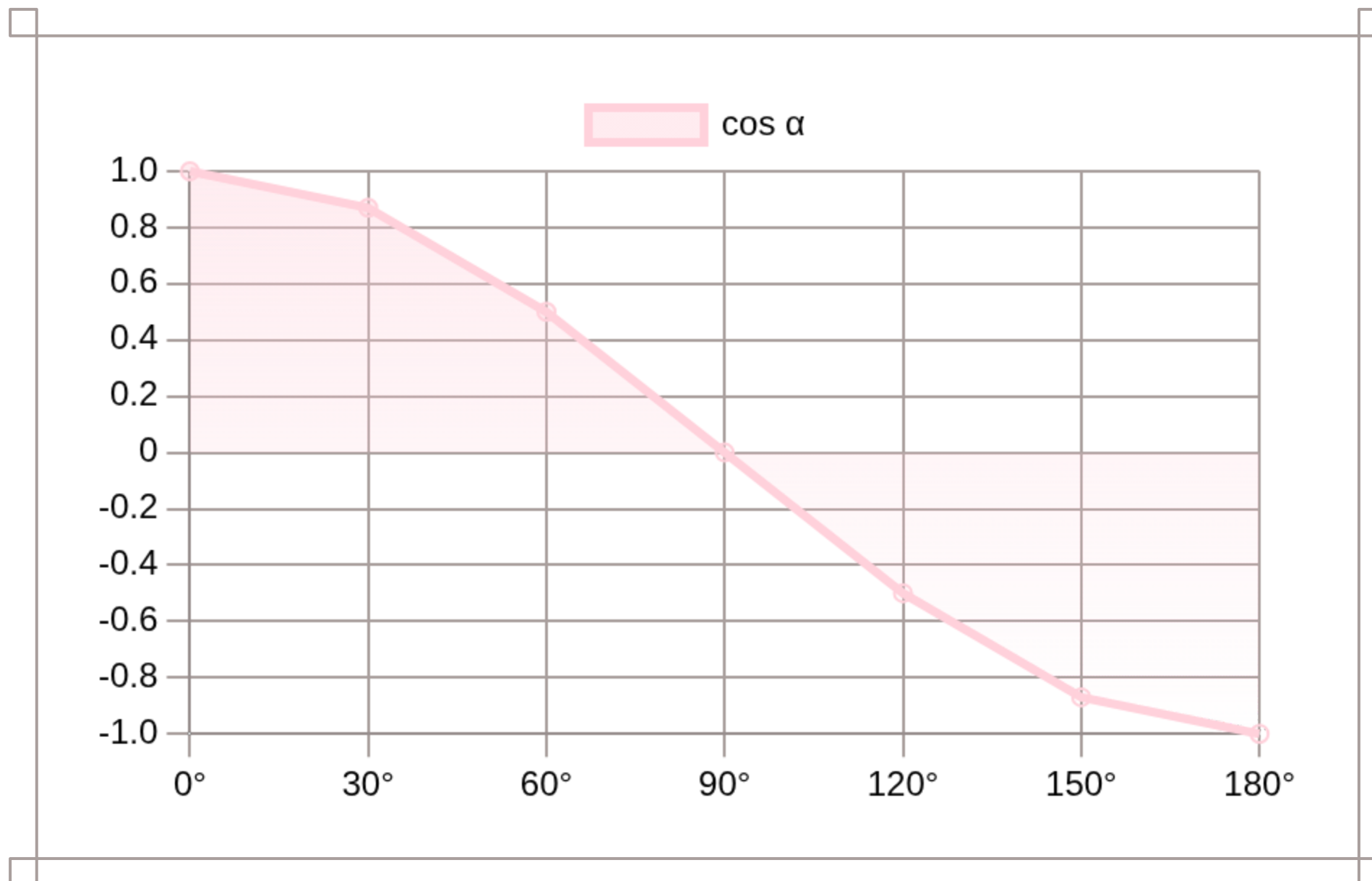
Угол	$\cos \alpha$	Результат
0°	1	макс. +
90°	0	0
180°	-1	макс. -

Таблица показывает, как меняются знак и величина скалярного произведения при разных углах между векторами.

Чем больше угол между векторами, тем меньше значение косинуса и тем сильнее меняется знак результата.

Таблица значений $\cos \alpha$ для характерных углов

Изменение $\cos \alpha$ при разных углах



На графике удобно увидеть плавный переход от положительных значений к отрицательным через ноль.

Косинус убывает при увеличении угла, поэтому скалярное произведение становится меньше и может менять знак.

Табличные значения $\cos \alpha$ для углов от 0° до 180°

Формула скалярного произведения в координатах

Плоский случай

Если векторы заданы на плоскости координатами, их скалярное произведение считают по формуле $x_1x_2 + y_1y_2$. Это удобно: угол искать не нужно, достаточно перемножить соответствующие числа.

1

Пространственный случай

В пространстве к формуле добавляется третья координата: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Так можно работать с векторами в трёхмерных задачах, не меняя сам принцип вычисления.

2

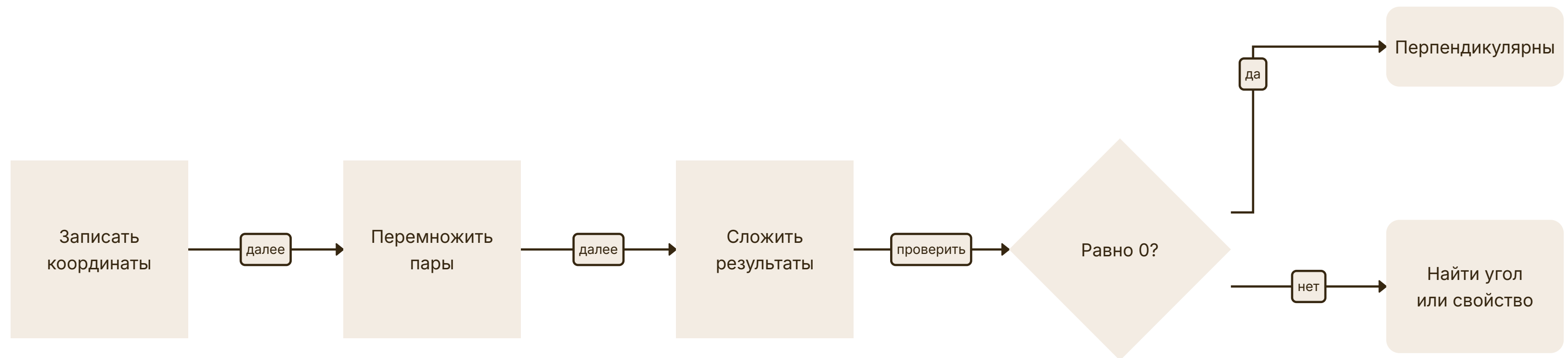
Почему это полезно

Координатная формула экономит время в задачах на плоскости и в пространстве. Она помогает быстро проверить перпендикулярность, найти угол и использовать векторные данные в вычислениях.

3

Как вычислить скалярное произведение

Последовательность действий для задач на координатной плоскости и в пространстве.

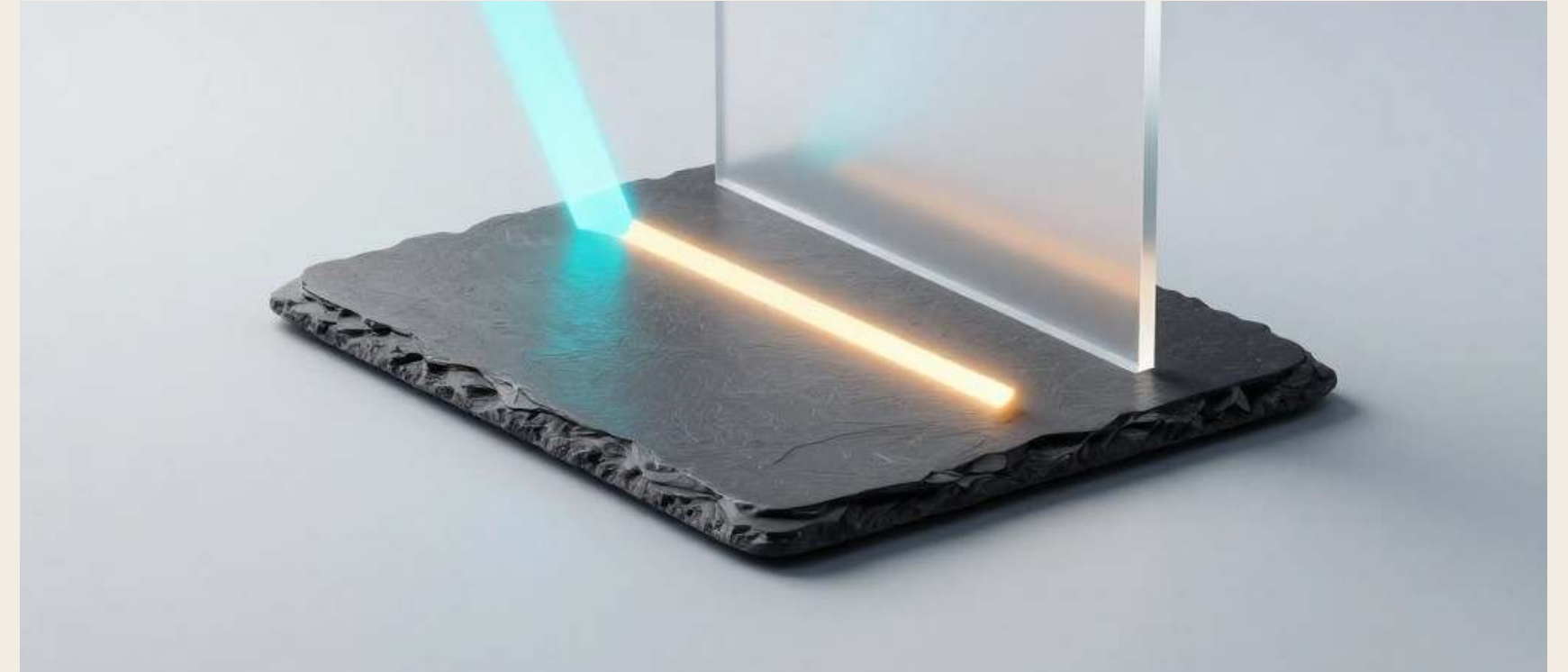


Геометрический смысл скалярного произведения



Два вектора и один угол

На рисунке удобно показать два вектора с общим началом: один может быть длиннее, другой — короче. Между ними отмечают угол α , чтобы было видно, что результат зависит не только от размеров, но и от направления.



Проекция как подсказка

Полезно добавить на рисунок проекцию одного вектора на другой. Тогда становится понятно: чем сильнее один вектор «смотрит» в сторону другого, тем больше вклад в скалярное произведение и тем понятнее его геометрический смысл.

Основные свойства скалярного произведения

1

Порядок не важен

Если поменять местами векторы, значение не изменится: $a \cdot b = b \cdot a$. Это свойство удобно в вычислениях, потому что можно выбирать более удобный порядок записи.

3

Сумма векторов

Скалярное произведение распределяется по сложению: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Это помогает разбивать сложные выражения на более простые части и считать их по отдельности.

2

Можно выносить число

Если один из векторов умножить на число, это число можно вынести за скобки: $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$. Так легко понимать, как меняется результат при растяжении или сжатии вектора.

4

Вектор сам с собой

Произведение вектора на самого себя равно квадрату его длины: $a \cdot a = |a|^2$. Поэтому через скалярное произведение можно связать координаты, длину и геометрический смысл в одной записи.

Типичные случаи и их результат

Случай	Угол	Результат
Сонаправлены	0°	положит.
Перпендикулярны	90°	0
Противоположны	180°	отрицат.
Один нулевой	—	0

Таблица показывает, как знак и величина скалярного произведения меняются в зависимости от взаимного направления векторов.

Если направление совпадает, произведение становится наибольшим по модулю и положительным; при прямом угле оно равно нулю; при противоположных направлениях — отрицательное.

Определение скалярного произведения: $|a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$; школьный курс геометрии 9 класса.



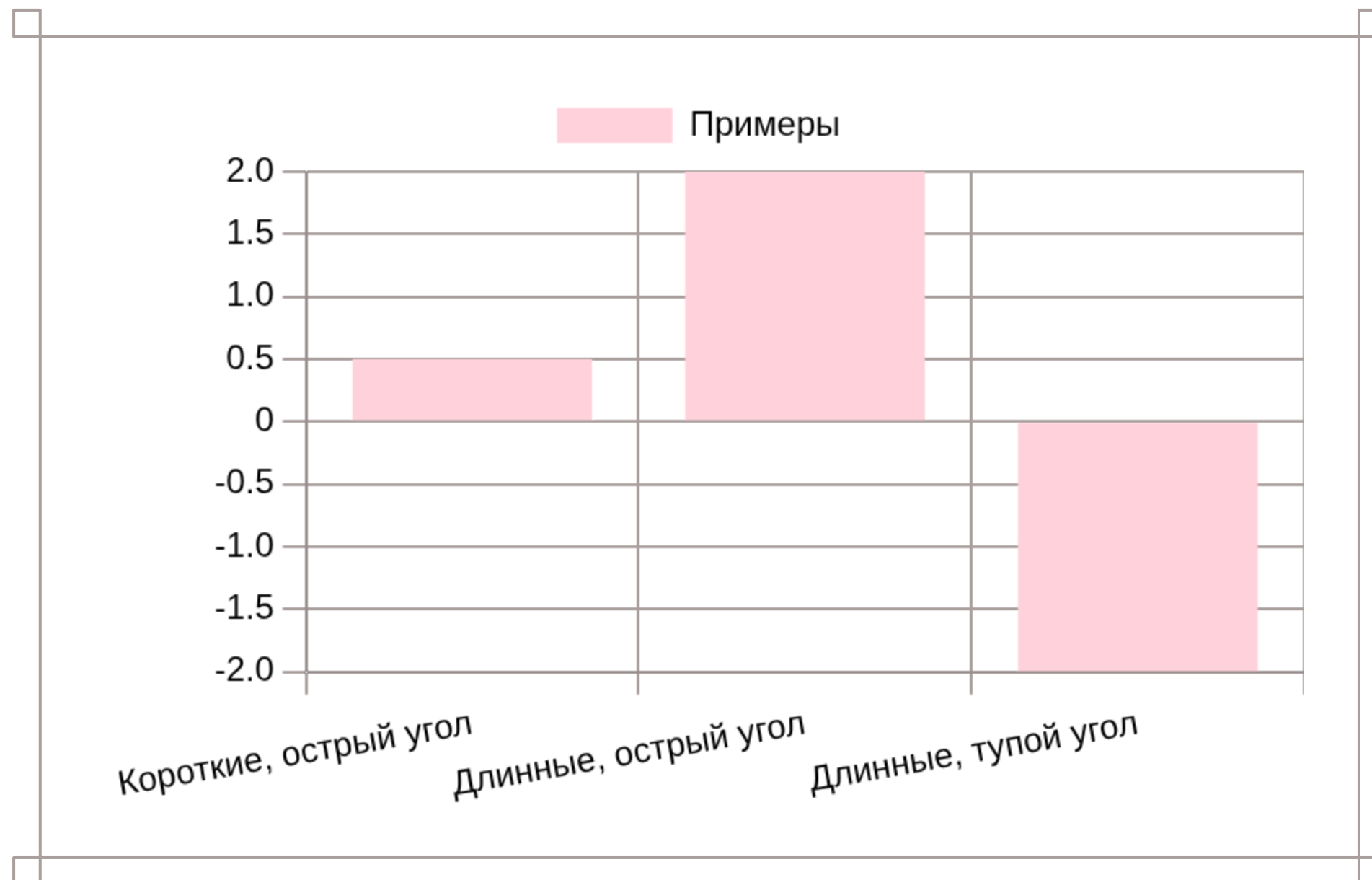
0

— столько даёт скалярное произведение двух ненулевых перпендикулярных векторов.

Свойство скалярного произведения из школьного курса геометрии: $a \cdot b = 0$ для ненулевых перпендикулярных векторов.

Это удобный признак:
если результат равен нулю,
векторы образуют прямой угол.
В координатах проверка сводится
к простому вычислению.

Как длины и угол влияют на значение произведения



Здесь использованы наглядные примеры с одинаковыми углами или длинами, чтобы отдельно увидеть вклад масштаба и направления в ответ.

При увеличении длин модуль результата растёт, а переход от острого к тупому углу меняет знак скалярного произведения.

Иллюстративный пример, построенный по формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$.

Пример вычисления по координатам

Запишем векторы

Даны векторы $a = (2, -1)$ и $b = (3, 4)$.
Для вычисления не нужно искать угол:
достаточно использовать координатную
формулу.

1

Вычислим произведение

Перемножаем соответствующие координаты
и складываем результаты: $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$.
Это и есть скалярное произведение.

2

Сделаем вывод

Так как ответ положительный, угол между
векторами острый. Пример показывает, что
координатная запись позволяет быстро
получить результат и сразу понять его смысл.

3

Связь со скалярным произведением в физике

Работа силы

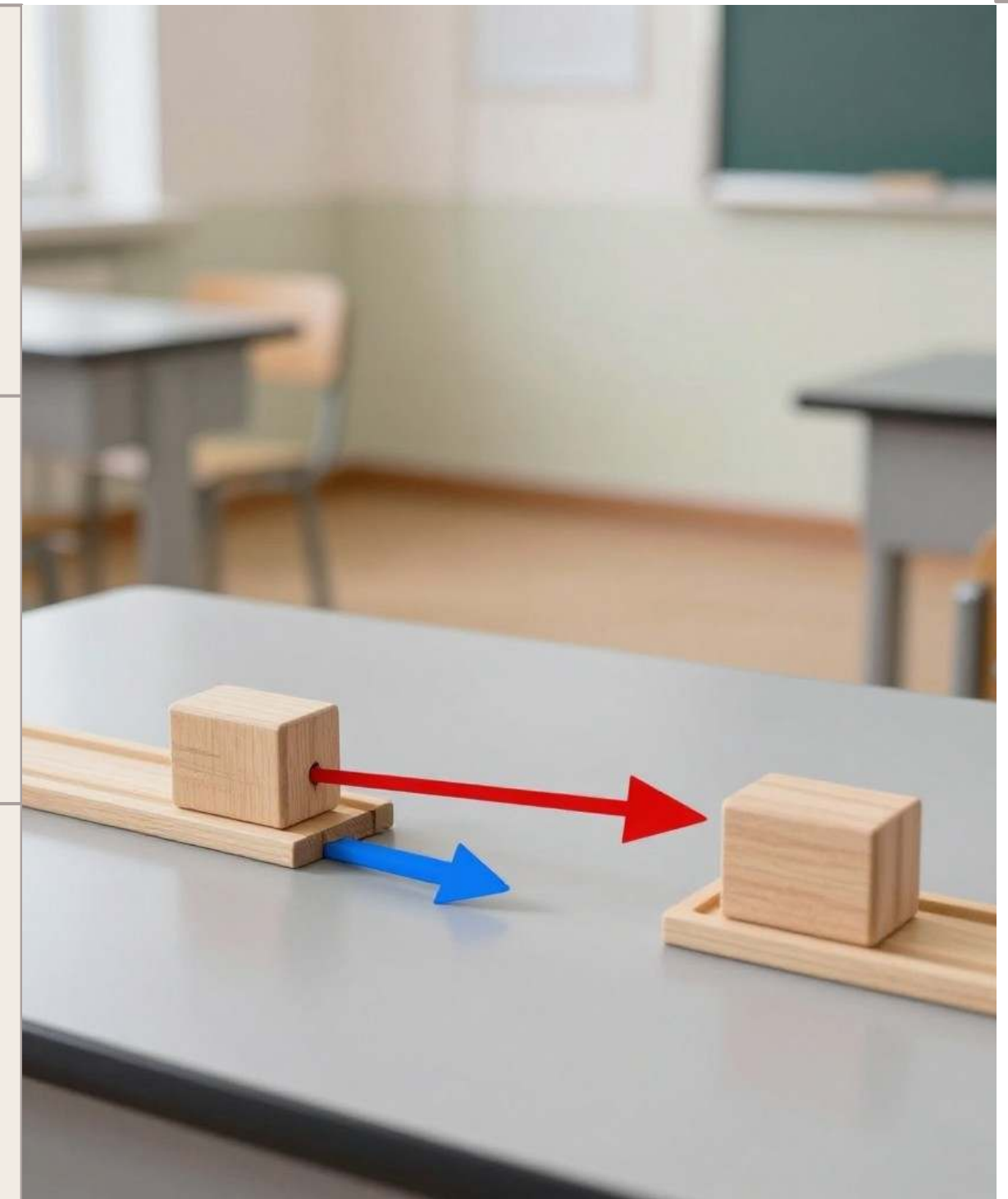
В физике работа силы зависит не только от её величины, но и от направления движения. Формула $A = F \cdot s \cdot \cos \alpha$ по сути повторяет идею скалярного произведения.

Максимум и ноль

Если сила направлена вдоль перемещения, $\cos \alpha = 1$, и работа наибольшая. Когда сила перпендикулярна движению, $\cos \alpha = 0$, поэтому работа равна нулю.

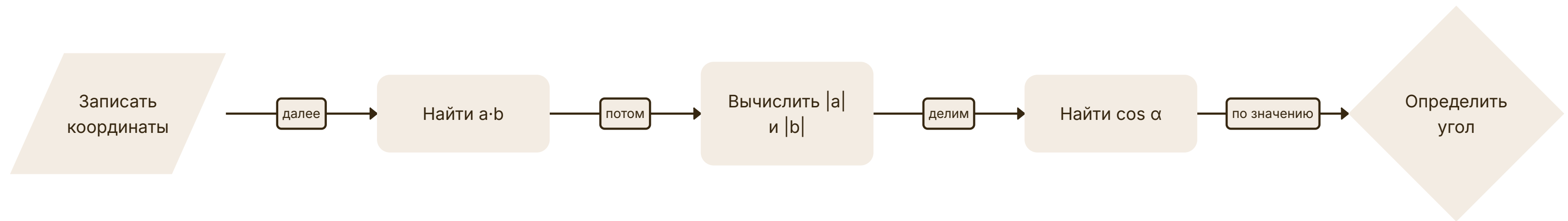
Почему это важно

Такая связь помогает понимать, почему одинаковая по величине сила может давать разный эффект. Для объяснения удобно показать два вектора и угол между ними.



Как найти угол между векторами

Последовательность основана на координатной формуле скалярного произведения и связи с косинусом угла.



Распространённые ошибки при решении задач



Путают формулы

Скалярное произведение иногда ошибочно смешивают с векторным. Нужно помнить: здесь получается одно число, а не новый вектор.



Складывают вместо умножения

Частая ошибка — сложить координаты по привычке. В этой теме требуется попарно перемножить соответствующие координаты и только потом сложить результаты.



Забывают знаки

Минус в координате легко пропустить, особенно если вектор записан со скобками. Из-за этого ответ меняется, поэтому запись нужно проверять внимательно.



Не учитывают единицы

В задачах по физике важно не только вычислить число, но и сохранить единицы измерения. Иначе ответ будет неполным или некорректным.

Где используется скалярное произведение



Диаграмма условно показывает равномерное распределение сфер применения: тема встречается не только в школе, но и в вычислениях, связанных с направлением и углом.

Скалярное произведение полезно там, где нужно сравнить направления, найти угол или оценить вклад одного вектора в действие другого.

Иллюстративная схема на основе типичных областей применения скалярного произведения.

Краткая памятка формул по теме

Формула	Смысл
$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha$	угол и длины
$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$	координаты
$a \cdot a = a ^2$	длина вектора
$a \cdot b = 0$	перпендикулярность

Сводка помогает быстро выбрать нужную формулу и вспомнить главный признак перпендикулярности.

Одна тема связывает геометрию и координаты: формулы позволяют находить углы, длины и проверять прямой угол без лишних построений.



Скалярное произведение: один приём, много задач

Скалярное произведение удобно потому, что соединяет длину и направление в одном числе. Оно помогает решать геометрические задачи, проверять перпендикулярность и применять математику в физике.