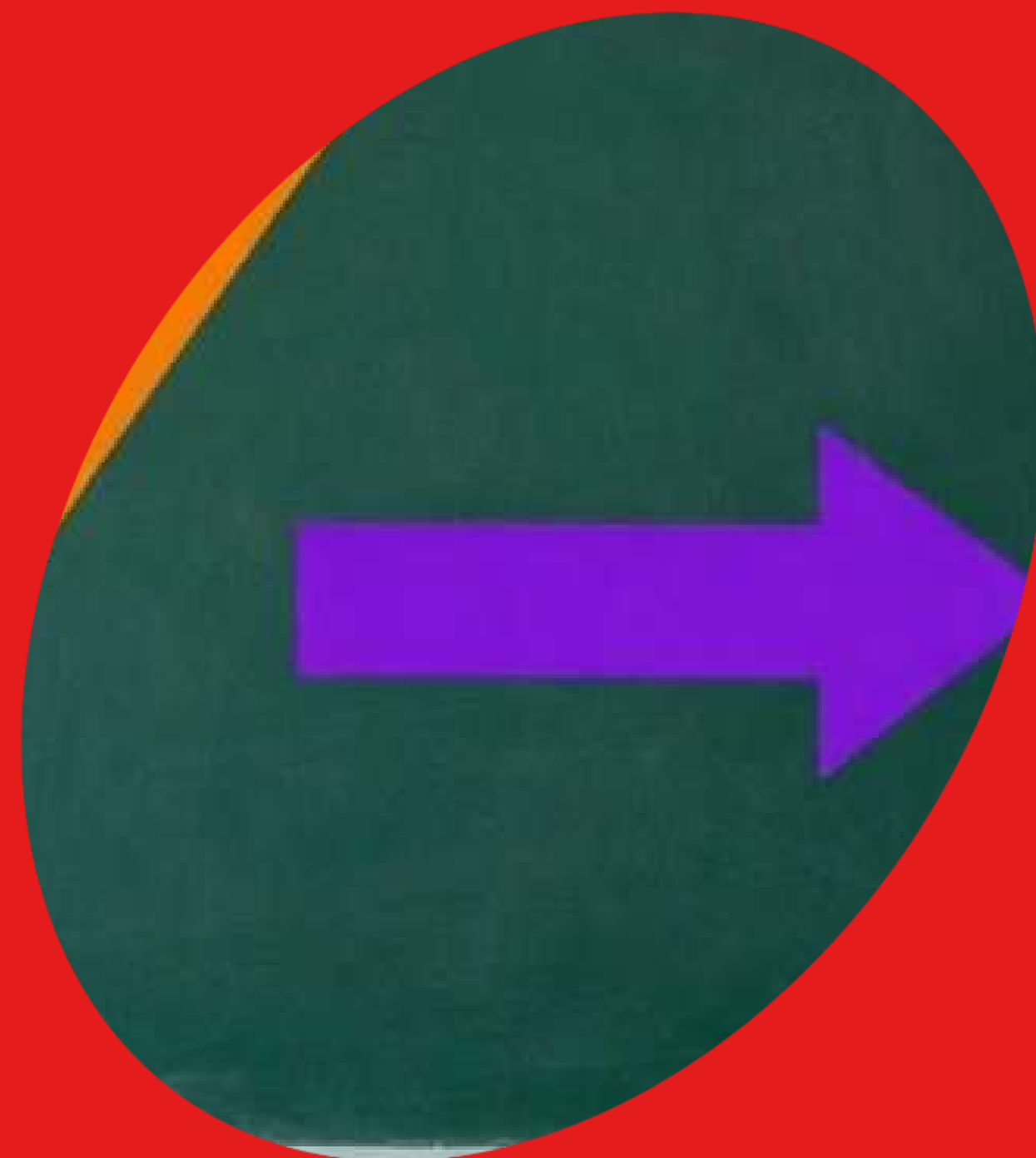


Сложение и вычитание векторов в геометрии: основные идеи и задачи

Векторы помогают описывать движение и находить итоговые смещения на плоскости.



Вектор: направление, длина и базовые свойства

Вектор изображают направленным отрезком: у него есть начало, конец, длина и направление. Длина называется модулем. Нулевой вектор имеет длину 0 и не имеет направления. Равные векторы совпадают по модулю и направлению, даже если стоят в разных местах.



Смысл сложения векторов

1

Сложение векторов соответствует последовательному действию: сначала выполняется одно перемещение, затем другое. Именно поэтому сумма показывает общее смещение точки после двух шагов.

2

Итоговый вектор можно рассматривать как результат «склейки» перемещений: он соединяет начальную точку первого вектора с конечной точкой второго. Так на чертеже появляется новый вектор.

3

В геометрии сложение строят как построение нового отрезка-вектора, а в координатах выполняют покоординатное сложение чисел. Оба подхода дают один и тот же итог, если всё выполнено верно.

Сложение по правилу треугольника

Последовательные шаги на плоскости: отложить первый вектор, затем продолжить вторым.



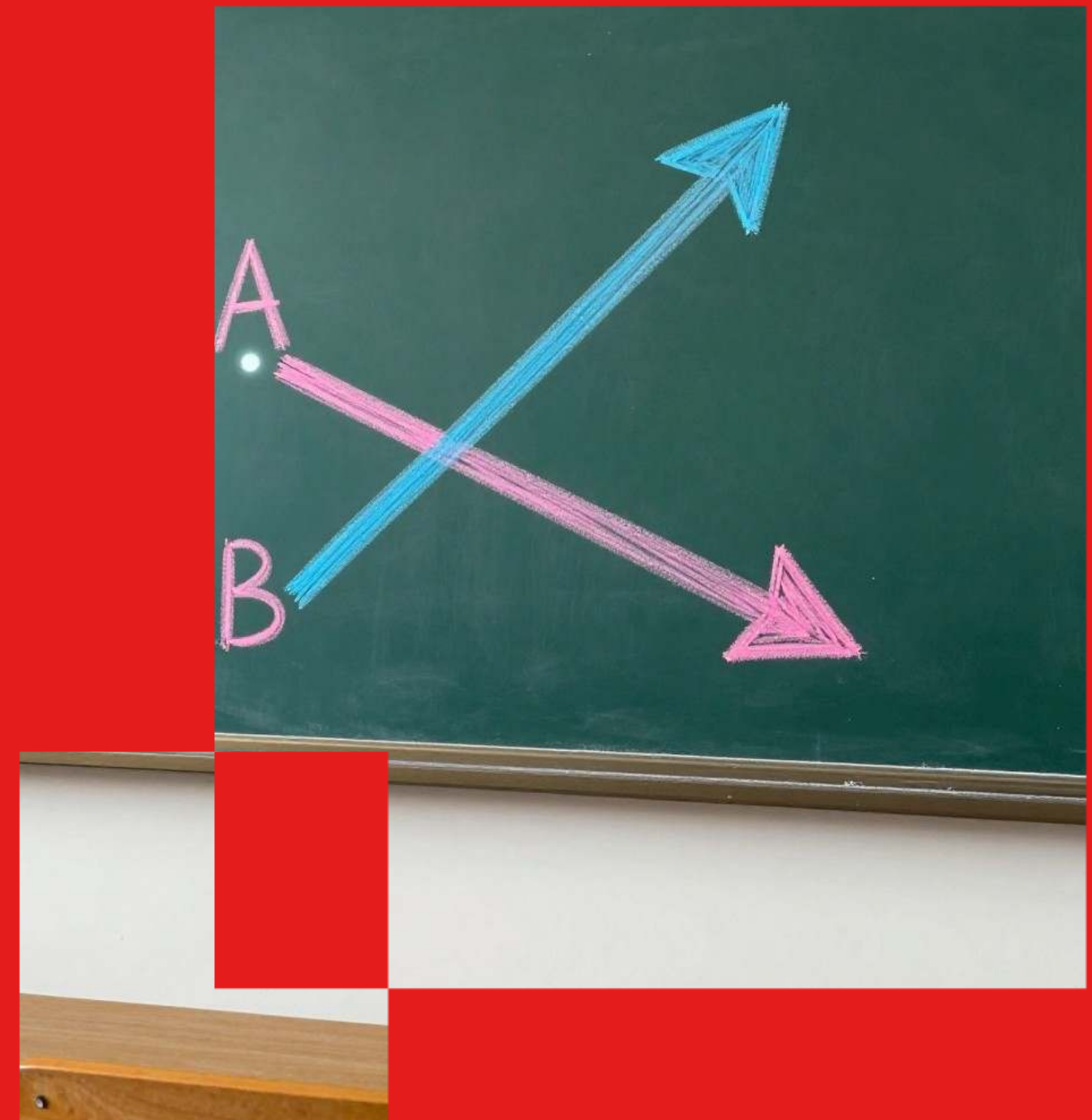
Сложение по правилу параллелограмма

Собираем векторы как стороны

Два вектора откладывают из одной точки: они становятся соседними сторонами воображаемого параллелограмма. Вы сразу видите, какие перемещения происходят одновременно «от одной точки в разные стороны».

Получаем сумму как диагональ

Диагональ, которая выходит из общей точки, и есть их сумма. Такой способ особенно нагляден, когда векторы можно понимать как силы, скорости или два независимых перемещения из одного начала.



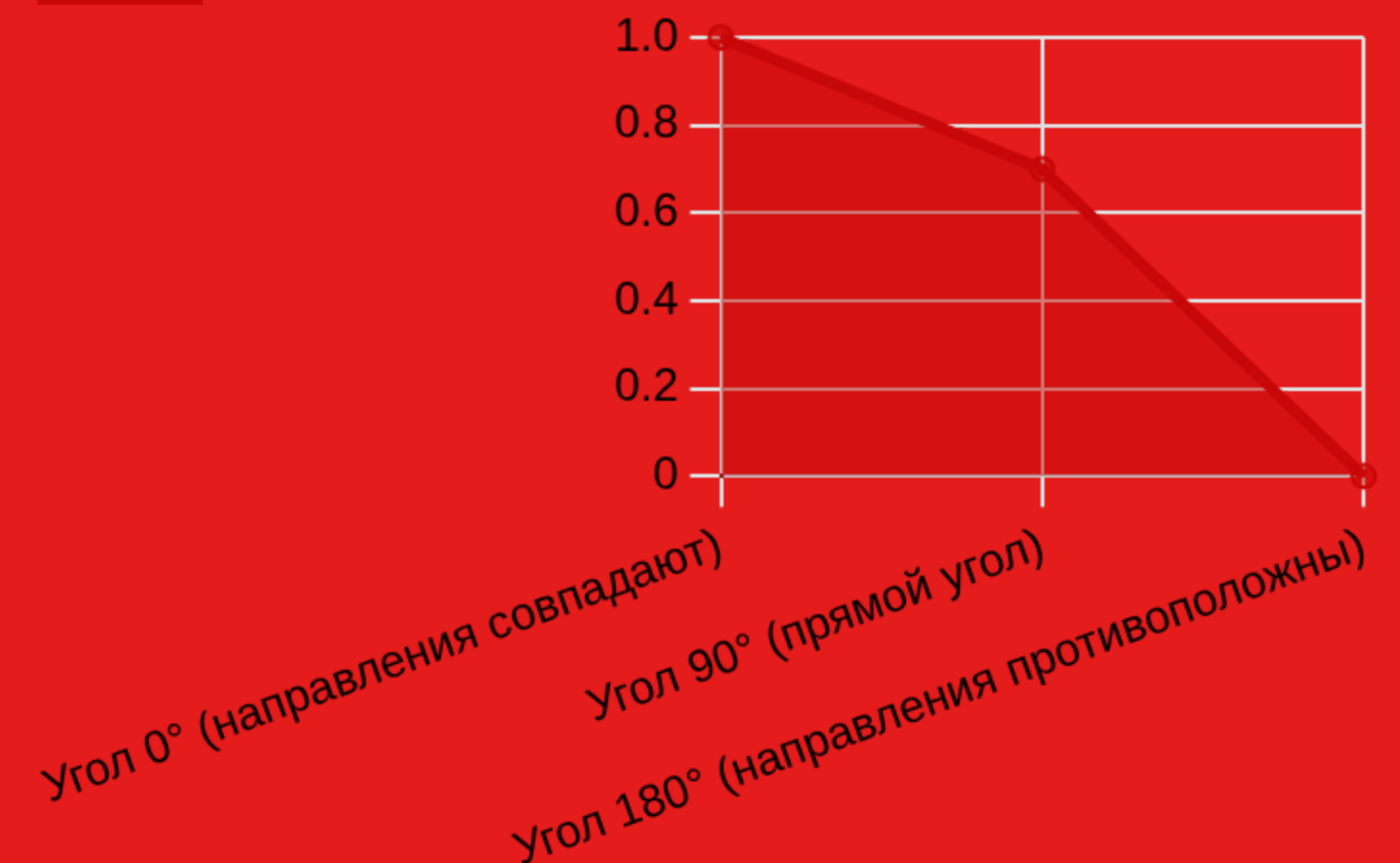
Как угол между векторами влияет на длину суммы

Чем меньше угол, тем меньше «потери» направления и тем сильнее растёт модуль суммы. При 180° возникает максимальная компенсация, вплоть до нуля.

Линия показывает общую закономерность: длина суммы максимальна при совпадении направлений и минимальна при противоположных. Прямой угол даёт промежуточный результат, зависящий от длин.

Схематическая зависимость для трёх характерных случаев (0° , 90° , 180°).

Длина суммы в зависимости от угла между векторами



Свойства сложения векторов

Таблица фиксирует ключевые свойства: можно менять порядок, переставлять скобки и добавлять нулевой вектор без изменения результата. Противоположные векторы дают ноль.

Главный вывод: сумма не зависит от порядка сложения и от расстановки скобок, а вычисления можно выполнять удобно для задачи.

Свойство	Формулировка
Переместительное	$a+b=b+a$
Сочетательное	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Нулевой вектор	$a+0=a$
Противоположные	$a+(-a)=0$

Учебные правила сложения векторов (математика, 9 класс).

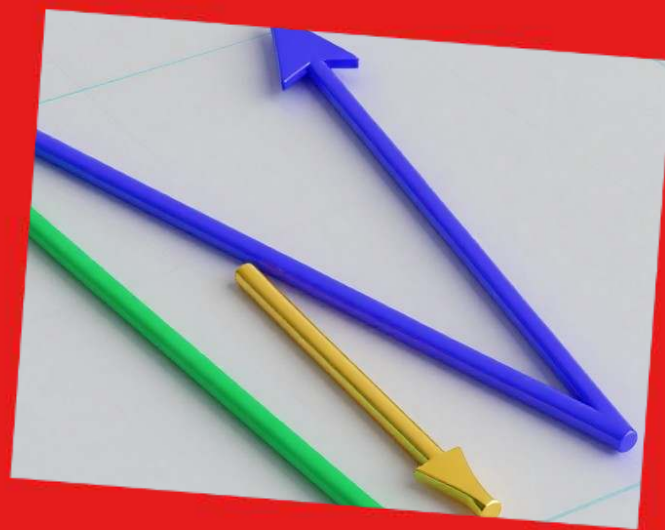
Сложение векторов в координатах

Если вектор a имеет координаты (x_1, y_1) , а вектор $b = (x_2, y_2)$, то их сумма находится по формуле $a+b=(x_1+x_2, y_1+y_2)$.

Складывают отдельно абсциссы и отдельно ординаты: в итоге получаются новые координаты вектора-суммы. Такой подход помогает не теряться на чертеже.

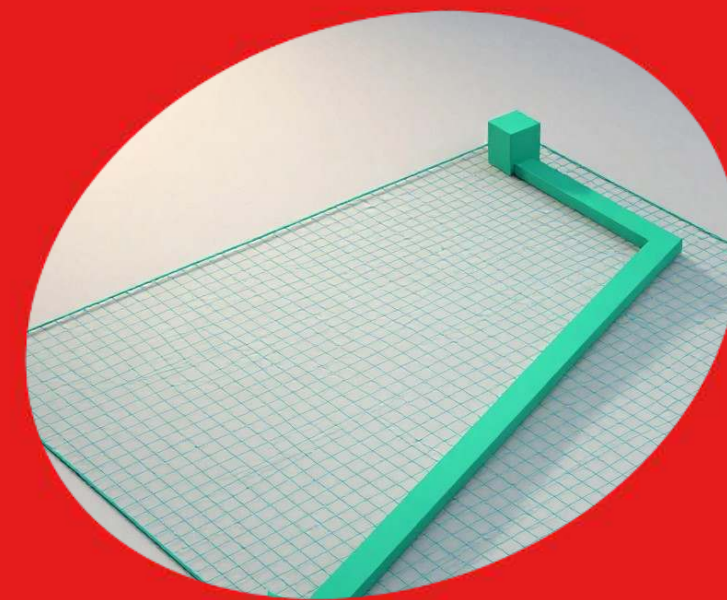
Метод удобен для точных вычислений: не нужно строить дополнительные линии и можно сразу получить численный ответ. Далее легко сопоставить результат с графическим построением.

Пример сложения на координатной плоскости



Два шага в числах

Возьмём векторы $(2, 3)$ и $(-1, 4)$. Складываем по координатам: получаем $(2+(-1), 3+4)=(1, 7)$. На сетке это означает: на 1 клетку вправо и на 7 клеток вверх.



Проверка смыслом построения

Постройте первый вектор $(2, 3)$ от начала координат, затем продолжите чертёж вторым вектором $(-1, 4)$. Итоговый вектор в геометрическом построении должен совпасть с координатным результатом — $(1, 7)$.

Что означает вычитание векторов

Вычитание связывают с поиском неизвестного слагаемого: если $a+b=c$, то $b=c-a$. То есть разность показывает, какой вектор нужно «добавить» к a , чтобы получить c .

Разность можно переписать как сумму с противоположным вектором: $a-b=a+(-b)$. Противоположный вектор имеет такую же длину, но направлен ровно в противоположную сторону.

На практике сначала находят противоположный к вычитаемому вектору, а затем выполняют построение суммы по треугольнику или параллелограмму. В координатах просто вычитают соответствующие координаты.

Как выполнить вычитание векторов

От идеи «найти неизвестное слагаемое» — к построению и/или вычислению координат



Вектор и противоположный вектор

Противоположные векторы направлены в разные стороны: их модули равны, а результирующий вектор равен нулевому.

Диаграмма показывает, что смена направления при сохранении длины приводит к полной компенсации: сумма становится нулевой.

Собственные расчёты по определению противоположных векторов (пример: $a=(3,2)$, $-a=(-3,-2)$, $a+(-a)=0$)



Примеры сложения и вычитания в координатах

Каждый пример можно проверить обратным действием: если к разности прибавить вычитаемый вектор, снова получится исходный.

Координатный способ обеспечивает короткие вычисления и наглядную проверку: обратное действие возвращает исходные данные.

Выражение	Ответ	Проверка
$(1,2)+(4,-1)$	$(5,1)$	$(5,1)-(4,-1)=(1,2)$
$(6,3)-(2,5)$	$(4,-2)$	$(4,-2)+(2,5)=(6,3)$
$(-3,4)+(1,-6)$	$(-2,-2)$	$(-2,-2)-(1,-6)=(-3,4)$

Метод координатного сложения и вычитания $(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

Типичные ошибки при работе с векторами

1

Путают длину и направление: например, подставляют модуль вместо координат. В итоге вектор «получается» короче или длиннее, хотя на самом деле изменилось бы только направление.

2

Игнорируют знаки координат. Если не учитывать «минус» у абсциссы или ординаты, результат смещается в другую сторону, и ошибка часто становится заметна только на рисунке.

3

Строят противоположный вектор неверно: меняют только длину или только одну координату. Правильно — противоположный вектор имеет ту же длину, но противоположное направление, то есть меняются знаки обеих координат.

4

Складывают (или вычитают) числа без учёта смысла координат как направленных величин. Проверка: пересчитать координатами и сопоставить с построением на чертеже по стрелкам.

Где векторы встречаются в реальной жизни

Векторы помогают описывать движение: например, самолёт летит по маршруту, но ветер добавляет «смещение» — результирующий путь находится как сумма векторов. Аналогично записывают и маршрут робота на плоскости.

В физике один и тот же по смыслу вектор может обозначать силу, скорость или перемещение. На рисунках обычно изображают исходные векторы и их результирующий вектор, показывающий итог.



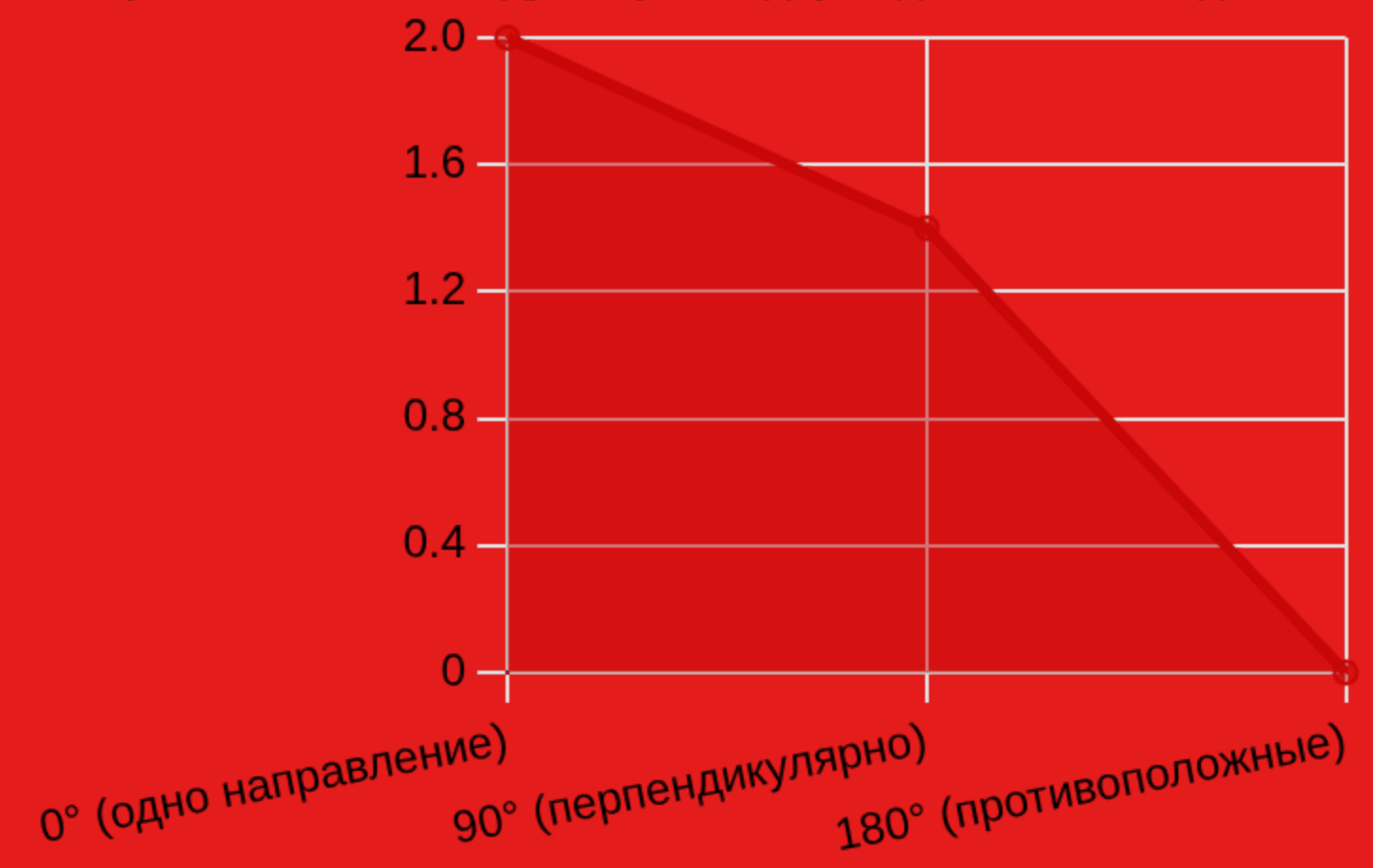
Когда результат сложения становится больше или меньше

Для двух одинаковых по длине векторов при угле 0° сумма максимальна, при 180° — равна нулю. При 90° получается промежуточное значение.

Меньший угол между направлениями ведёт к большему модулю суммы, а при противоположных направлениях происходит компенсация и модуль уменьшается.

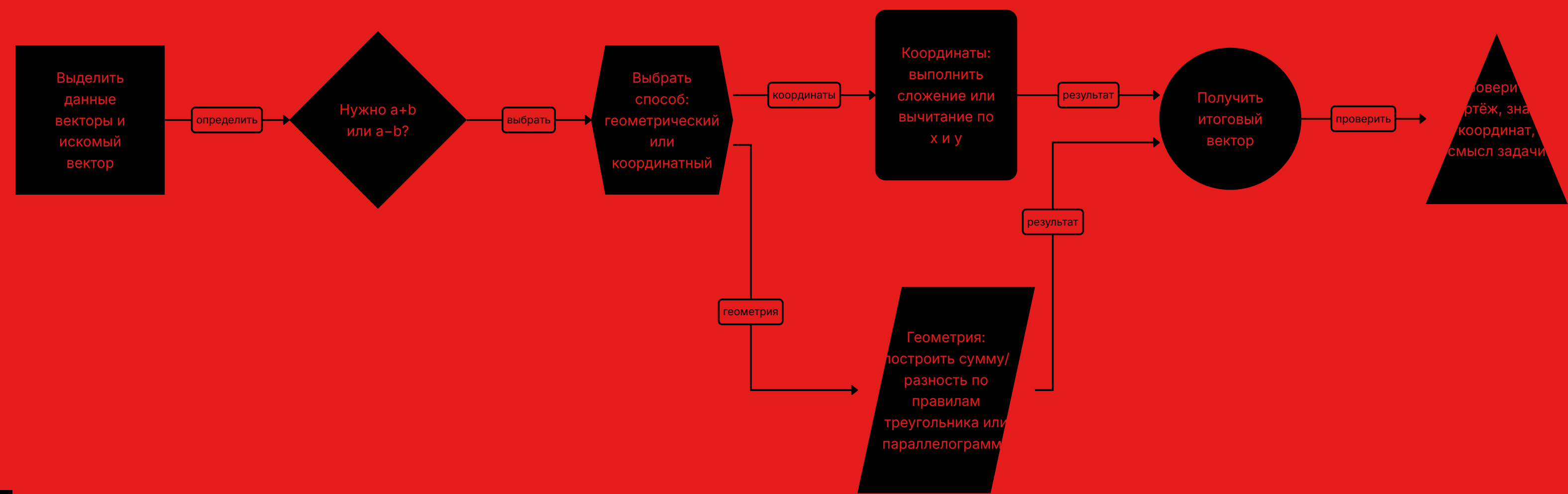
Качественная зависимость модуля суммы от угла; значения приведены для наглядности при равных длинах (масштаб условный).

Как угол влияет на модуль суммы двух одинаковых по длине векторов



Алгоритм решения задач на сложение и вычитание векторов

От постановки задачи к проверке: геометрия и координаты

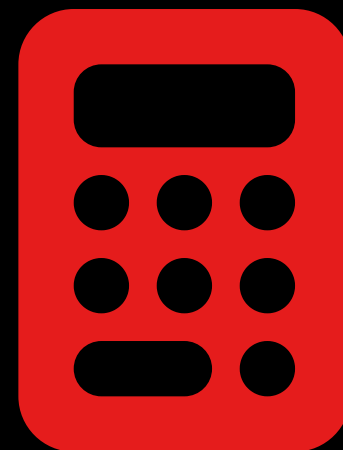


Связь темы с геометрией, алгеброй и физикой



Геометрия на плоскости

Понимание сложения и вычитания через построения по правилу треугольника и параллелограмма связывает векторы с чертежами, углами и направленными отрезками в школьной геометрии.



Алгебра в координатах

Когда векторы записаны числами, операции сводятся к действиям с x и y . Это делает вычисления быстрыми и помогает контролировать результат по обратным действиям.



Физический смысл

Векторами описывают силы, скорости и перемещения. Итоговый вектор на рисунке отражает результат нескольких воздействий или движения с учётом «вклада» ветра или другого направления.



Задачи на движение

Маршрут можно рассматривать как последовательность перемещений: итоговое смещение получается из суммы векторов. Поэтому те же правила применимы к задачам с маршрутами и изменением направления.

Короткая памятка формул и правил

Запомните стандартные записи: треугольник, параллелограмм, а также переход от вычитания к сумме с противоположным вектором. Знаки координат сохраняются по правилам действий.

Все операции сводятся к двум координатам: знак каждой координаты определяет направление, поэтому контроль знаков — ключевой способ избежать ошибок.

Запись	Что означает
$a+b$ (треугольник)	Сумма как диагональ
$a+b$ (параллелограмм)	Сумма как диагональ
$a-b$	$a+(-b)$
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$	$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$	$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Школьный курс геометрии и координатной алгебры (определения и правила сложения/вычитания)

Сумма — это итог перемещений, разность — поиск неизвестного вектора

Сложение векторов показывает общий результат нескольких перемещений, а вычитание помогает находить неизвестный вектор. Геометрический и координатный способы дают одинаковый ответ при правильном построении и учёте знаков.