

# Предел последовательности

Как последовательности приближаются к числу  $A$

# Последовательности и пределы в курсе 10 класса



Последовательности помогают увидеть, как числовые закономерности меняются при росте номера. Предел делает это описание точным и открывает путь к прогрессиям, дробям, рекуррентным формулам и первым идеям математического анализа.



# Что такое последовательность и как она задаётся

## Упорядоченный набор

Последовательность — это числа, расположенные по порядку:  $a_1, a_2, a_3, \dots$   
Каждый член имеет свой номер, а не просто значение, поэтому порядок здесь так же важен, как и сами числа.

## Общий член

Запись  $a_n$  обозначает  $n$ -й член последовательности. Она позволяет описывать всю последовательность одной формулой и удобно отслеживать, как меняются значения при увеличении номера.

## Формульное задание

Часто последовательность задают явной формулой, например  $a_n = 1/n$ . Тогда любой член можно вычислить сразу, без поиска предыдущих значений или дополнительных таблиц.

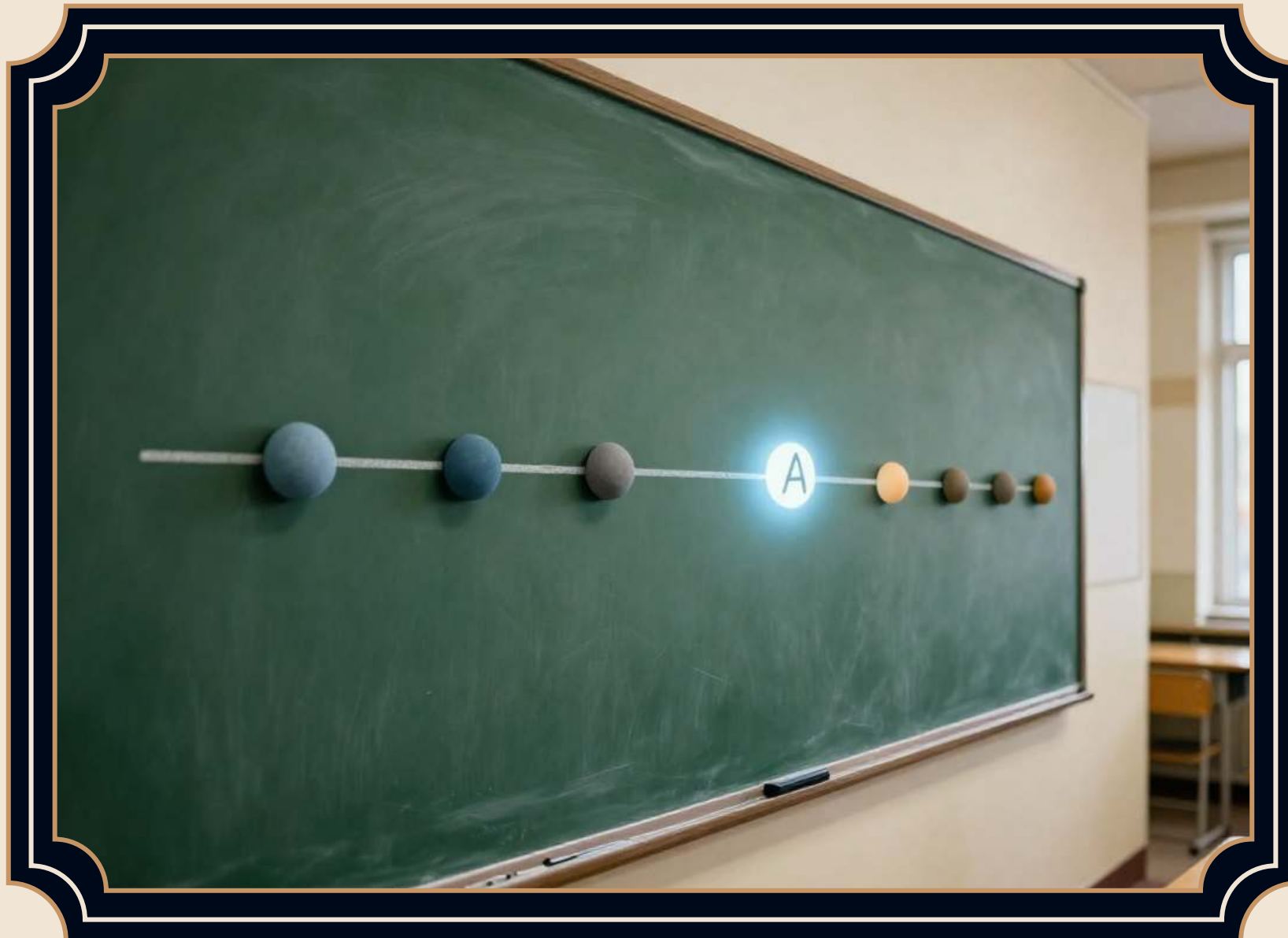
## Рекуррентное задание

Иногда следующий член выражают через предыдущий, например  $a_{n+1} = a_n/2$ . Такой способ показывает правило изменения последовательности и особенно важен для повторяющихся процессов.

## Другие способы

Последовательность можно задать таблицей, графиком или словесным правилом. Во всех случаях важно понять общий закон, начальные значения и характер изменения при росте  $n$ .

# Геометрический смысл предела на числовой прямой



## Приближение к точке

Если последовательность сходится к числу  $A$ , её члены на числовой прямой располагаются всё ближе к этой точке. Расстояние между  $a_n$  и  $A$  постепенно уменьшается.

## Рост номера

Чем больше номер  $n$ , тем точнее положение члена последовательности относительно предела. Это отражает идею, что бесконечное приближение можно описать через конечную точность.

## Подход с разных сторон

Члены последовательности могут приближаться к пределу как сверху, так и снизу. Главное не направление движения, а то, что отклонение от  $A$  становится сколь угодно малым.

## Наглядная модель

Для понимания удобно представить числовую прямую с отмеченной точкой  $A$  и несколькими членами последовательности вокруг неё. Такая схема показывает сам смысл сходимости без громоздких вычислений.

# Строгое определение предела последовательности

## 1. Выбираем точность

Сначала задают любое  $\varepsilon > 0$  — это заранее выбранная малая граница ошибки. Она показывает, насколько близко члены последовательности должны оказаться к числу  $A$ .

## 2. Находим момент $N$

Затем нужно указать такой номер  $N$ , начиная с которого поведение последовательности становится устойчивым. Это означает, что дальнейшие члены уже не выходят за заданную точность.

## 3. Проверяем условие

Для всех  $n > N$  должно выполняться неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$ . Иными словами, каждый последующий член лежит внутри маленького промежутка вокруг предполагаемого предела.

## 4. Делаем вывод

Если такое  $N$  можно найти для любого  $\varepsilon$ , то число  $A$  является пределом последовательности. В записи это обозначают  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

# Как исследовать сходимости последовательности

Алгоритм выбора метода и проверки предела



# Примеры последовательностей и их пределов



Четыре типичных случая помогают увидеть, как вид последовательности связан с её поведением при больших  $n$ .



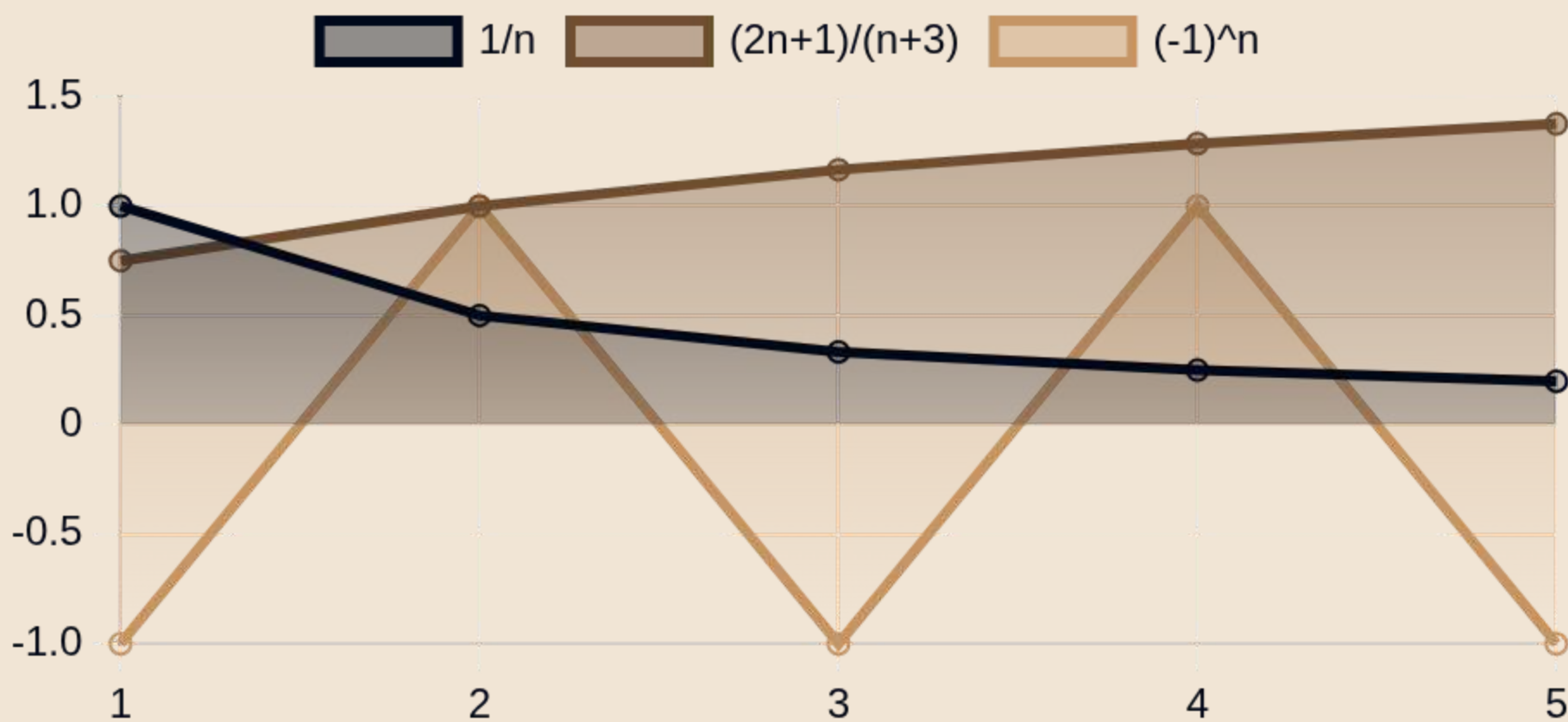
Сходимость зависит не только от формулы, но и от ограниченности, убывания и отсутствия колебаний.



| Последовательность | Предел        | Поведение     |
|--------------------|---------------|---------------|
| $1/n$              | 0             | убывает       |
| $(2n+1)/(n+3)$     | 2             | стремится к 2 |
| $(-1)^n$           | не существует | чередуется    |
| $n$                | не существует | неограниченна |

Типовые примеры из темы «Предел последовательности»

# Поведение последовательностей при росте $n$



На графике видно, что разные формулы могут вести себя совершенно по-разному уже на первых шагах. Это помогает сравнить приближение, колебания и отсутствие устойчивой тенденции.

$1/n$  и  $(2n+1)/(n+3)$  сходятся, а  $(-1)^n$  не имеет предела из-за бесконечного чередования значений.

Иллюстративные значения для учебного сравнения, 2025

# Основные свойства предела последовательности

## $\infty$ Ограниченность

Любая сходящаяся последовательность обязательно ограничена. Значит, её члены не могут уходить сколь угодно далеко, если они действительно приближаются к конечному числу.

## $\times$ Произведение

Предел произведения равен произведению пределов, если оба предела существуют. Это свойство особенно удобно при работе с дробями, степенями и выражениями, составленными из нескольких множителей.

## 1 Единственность

Если последовательность имеет предел, то он может быть только один. Это важно: нельзя одновременно сходить к двум разным числам, даже если первые члены выглядят неоднозначно.

## $\pm$ Сумма и разность

Предел суммы равен сумме пределов, а предел разности — разности пределов. Эти правила позволяют разбивать сложное выражение на более простые части и вычислять пределы поэтапно.

## $\div$ Частное

Предел частного существует, если предел знаменателя не равен нулю. Поэтому при вычислениях всегда нужно отдельно проверять, не приводит ли знаменатель к недопустимому делению на ноль.

# Признаки сходимости, которые часто применяются в школе

01

## Монотонность

Если последовательность всё время возрастает или всё время убывает, её поведение легче анализировать. Постоянное направление изменения часто подсказывает, что можно искать предел через дополнительные свойства.

02

## Ограниченность

Монотонная последовательность имеет предел, если она ещё и ограничена: возрастающая — сверху, убывающая — снизу. Без границы значения могут уходить бесконечно далеко.

03

## Колебания

Если члены последовательности регулярно чередуются между несколькими значениями, это обычно мешает сходимости. Такие колебания часто означают, что конечного предела не существует.

04

## Практический смысл

Эти признаки особенно полезны, когда напрямую вычислить предел трудно. Вместо подстановки каждого члена можно рассуждать о характере изменения последовательности и делать строгий вывод.

# Примеры приближения к пределу и частые вычислительные ошибки



Последовательность, которая убывает к нулю

У последовательности  $3/n$  первые члены заметно различаются: 3, 1,5, 1, 0,75. Но с ростом номера каждое значение становится всё ближе к нулю, и именно это приближение важно для понимания предела, а не отдельный первый член.

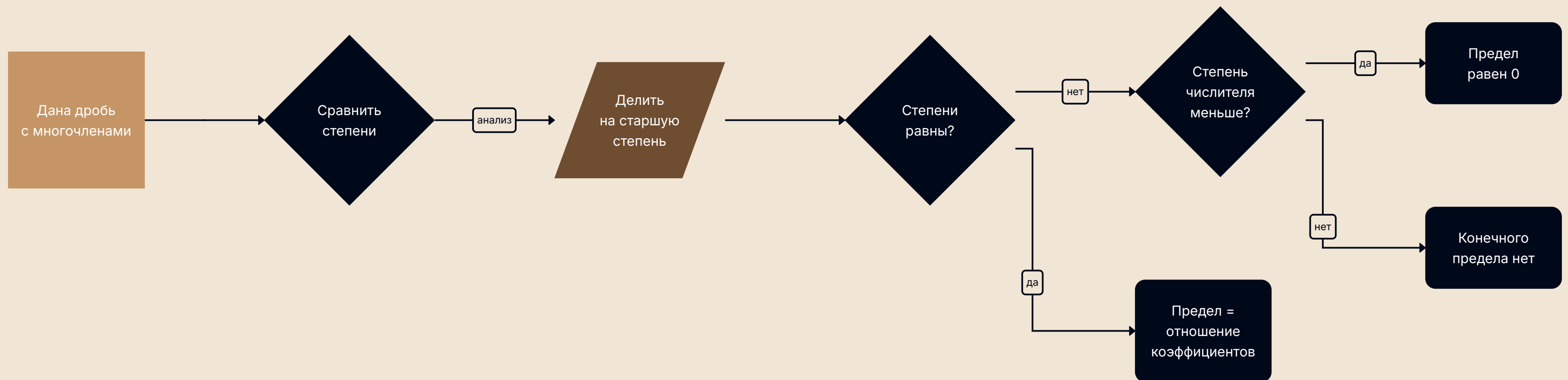


Когда число не совпадает с первым значением

Для последовательности  $1 + 1/n$  первые члены равны 2, 1,5, 1,33... 1,25. Здесь легко увидеть, что начальное значение не определяет предел: последовательность постепенно стремится к 1, хотя стартует с 2.

# Нахождение предела рациональных последовательностей

Алгоритм для последовательностей, заданных отношением многочленов от  $n$



# Рекуррентные последовательности и их предельное значение

## 1. Шаг 1: фиксируем правило

Рекуррентная последовательность задаётся через предыдущий член, поэтому сначала нужно внимательно выписать формулу вида  $a_{n+1} = f(a_n)$  и понять, какое преобразование выполняется на каждом шаге.

## 2. Шаг 2: предполагаем предел

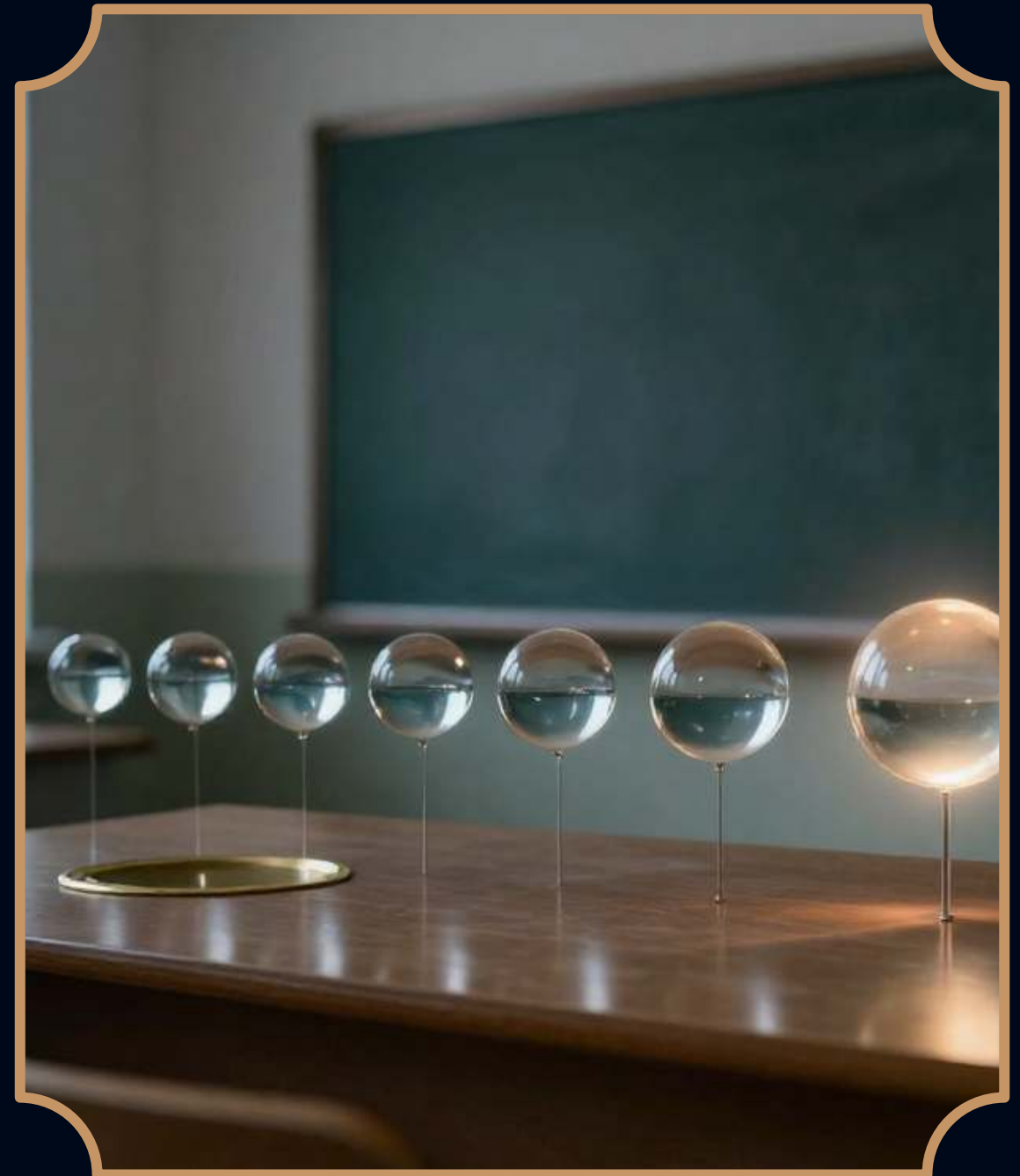
Если последовательность сходится к числу  $A$ , то в формуле можно перейти к пределу и получить уравнение  $A = f(A)$ . Так находится кандидат на предельное значение, но его ещё нужно проверить.

## 3. Шаг 3: оцениваем поведение

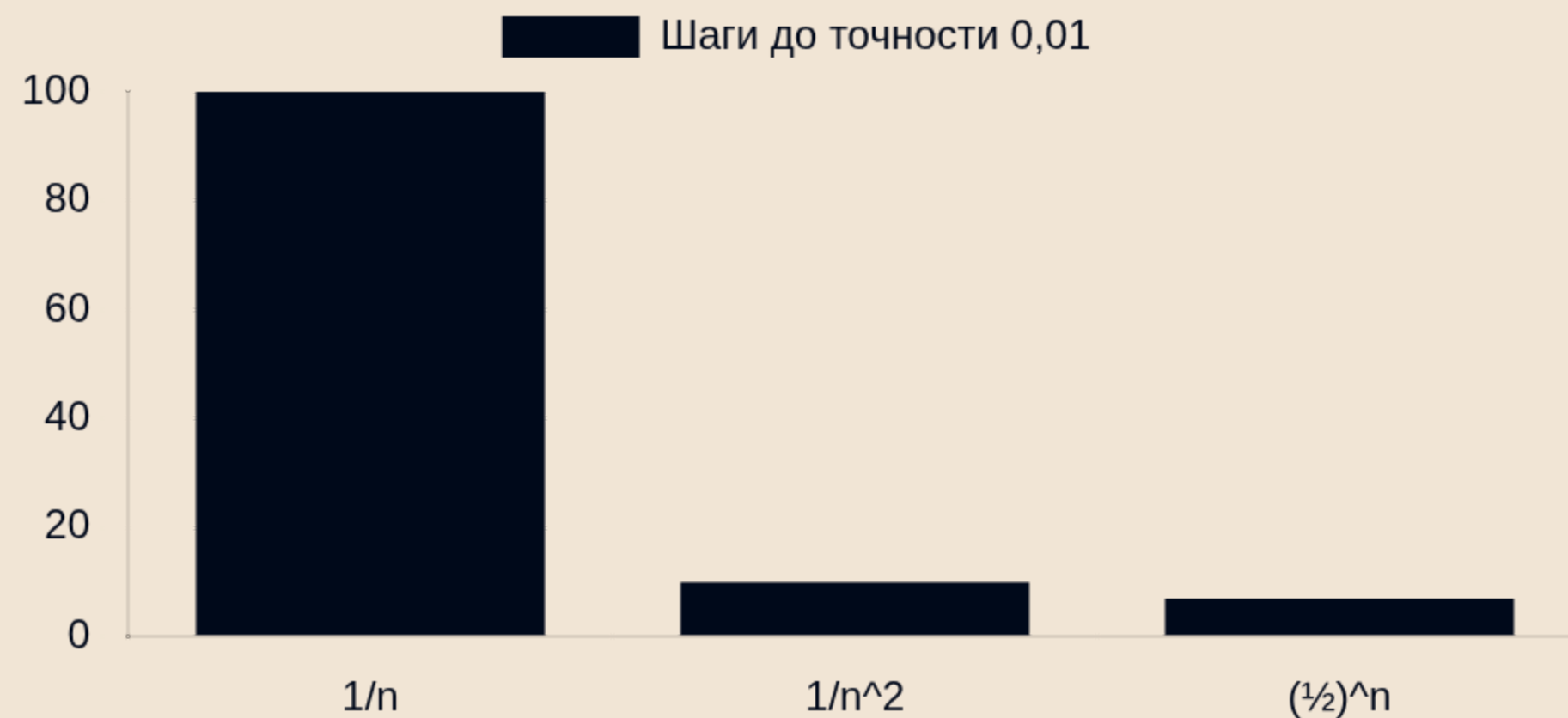
После нахождения возможного предела важно исследовать, ограничена ли последовательность и не уходит ли она в бесконечность. Без этого равенство  $A = f(A)$  может оказаться лишь формальным.

## 4. Шаг 4: применяем в задачах

Такие последовательности встречаются в моделях роста, итерационных процессах и численных алгоритмах. Они показывают, как из простого правила может возникать устойчивая числовая закономерность.



# Скорость сходимости: сравнение нескольких последовательностей



Чем меньше число шагов, тем быстрее последовательность становится практически неотличимой от предела при заданной точности.

Геометрическая прогрессия приближается к пределу заметно быстрее, чем обратные степени  $n$ , хотя конечная цель у всех примеров одна.



Сравнение по условию  $|a_n - A| < 0,01$ ; учебные расчёты

# Распространённые ошибки при работе с пределами

## Путают первый член и предел

Начальное значение последовательности не обязано ничего говорить о её пределе. Даже если первый член большой или необычный, последующее поведение может привести к совсем другому числу.



## Судят по слишком малому числу членов

Первые несколько значений могут выглядеть обманчиво. Чтобы делать вывод о сходимости, нужно смотреть на общий вид формулы, а не только на короткий фрагмент последовательности.



## Принимают колебания за сходимость

Если значения чередуются вокруг некоторого числа, это ещё не означает существование предела. Для сходимости требуется, чтобы члены последовательности становились сколь угодно близкими к одному числу.



## Ошибаются при сокращении дробей

Нельзя механически сокращать выражение, не проверив, что допустимы все преобразования. Особенно важно следить за знаменателем: деление на ноль или потеря условий может исказить ответ.

## Забывают про неограниченность

Если последовательность растёт без границ, конечного предела у неё нет. В таких задачах важно отличать стремление к числу от бесконечного возрастания или убывания.

# Основные теоремы о пределах в краткой форме

| Теорема        | Смысл                             |
|----------------|-----------------------------------|
| Единственность | Предел один                       |
| Ограниченность | Сходится $\Rightarrow$ ограничена |
| Арифметика     | Сумма, разность, произведение     |
| Зажатие        | Между двумя пределами             |

Короткая таблица помогает быстро вспомнить ключевые свойства сходящихся последовательностей и использовать их в решении задач.

Эти теоремы позволяют не вычислять предел каждого члена по отдельности, а делать вывод на основе структуры последовательности и её свойств.

Школьный курс алгебры и начал анализа

# Связь предела последовательности с другими темами математики



## От последовательности к функции

Понятие предела последовательности подготавливает к изучению предела функции и непрерывности. В обоих случаях речь идёт о том, как выражение ведёт себя при приближении аргумента к заданной границе.



## Частичные суммы как новая последовательность

В теме рядов рассматривают не сами слагаемые, а частичные суммы  $S_n$ . Эти суммы образуют последовательность, и её предел определяет поведение бесконечного ряда, связывая разные разделы математики.

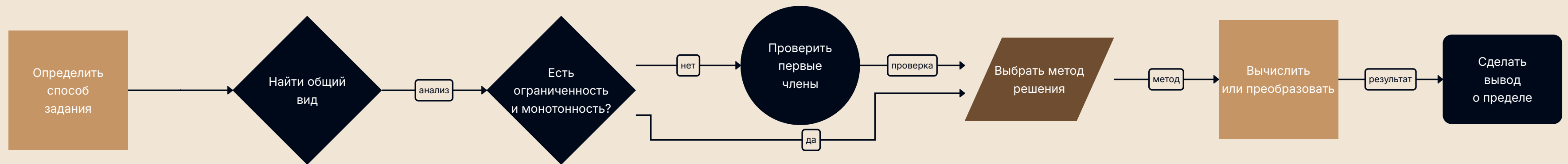


## Мост к анализу и приложениям

Через предел последовательности школьная алгебра переходит к более общим идеям анализа. Так появляются методы исследования непрерывности, приближённых вычислений и числовых моделей, где важно понимать предельное поведение величин.

# План исследования последовательности на практических задачах

Последовательный алгоритм проверки и нахождения предела в типовых заданиях



# Практическое значение предела последовательности



## Анализ алгоритмов

При исследовании алгоритмов важно знать, стабилизируется ли результат при увеличении числа шагов. Предел показывает устойчивость и предсказуемость вычислительной схемы.



## Контроль точности

Знание предела даёт критерий, насколько близко последовательность подошла к нужному числу. Это особенно важно, когда вычисления выполняются не до бесконечности, а до заданной точности.



## Численные методы

Предел помогает понимать, когда приближённый вычислительный процесс уже достаточно близок к искомому значению и можно остановить расчёт без заметной потери точности.



## Моделирование процессов

В задачах о росте, накоплении и итерациях предельное поведение позволяет описывать длительное развитие системы без подробного рассмотрения каждого промежуточного шага.



# Главное о пределе последовательности

Предел последовательности показывает, к какому устойчивому значению стремится её поведение при больших  $n$ . Он опирается на точное  $\varepsilon$ -определение, свойства и признаки сходимости и связывает школьную алгебру с анализом.