

Возведение двучлена в степень

Квадрат и куб двучлена: закономерности, знаки, коэффициенты.



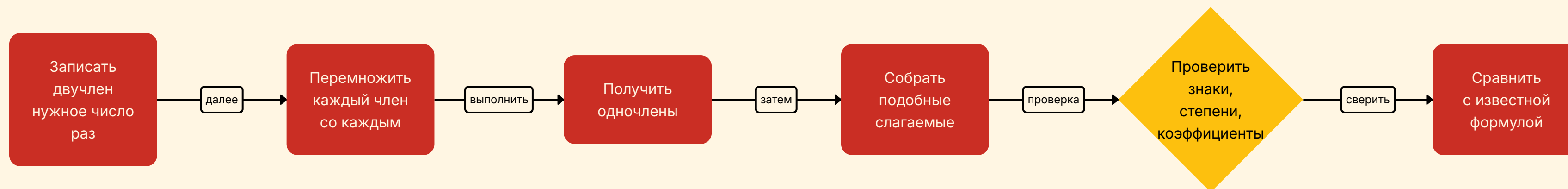
Почему это важно в 7 классе

Эта тема учит быстро раскрывать скобки, упрощать выражения и проверять вычисления в примерах вроде $(x+2)^2$ и $(m-3)^3$.



Как раскрывают степень двучлена

Последовательность действий при раскрытии скобок и проверке ответа



Квадрат суммы и квадрат разности

1 Формулы

При возведении двучлена в квадрат используют две основные формулы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Они помогают раскрывать скобки без длинного перемножения.

2 Крайние члены

Первый и последний члены всегда получаются как квадраты исходных слагаемых. Поэтому в ответе сразу видны a^2 и b^2 , а между ними находится средний член.

3 Роль знака

Знак между слагаемыми влияет только на средний член. При сложении он положительный, а при вычитании становится отрицательным, поэтому важно внимательно смотреть на исходную скобку.

4 Откуда берётся 2

Коэффициент 2 появляется потому, что одинаковое произведение ab получается дважды: из первой скобки на вторую и из второй на первую. Именно поэтому средний член удваивается.

Первые формулы для степеней двучлена

Сравним разложения для разных степеней и заметим общий закон.

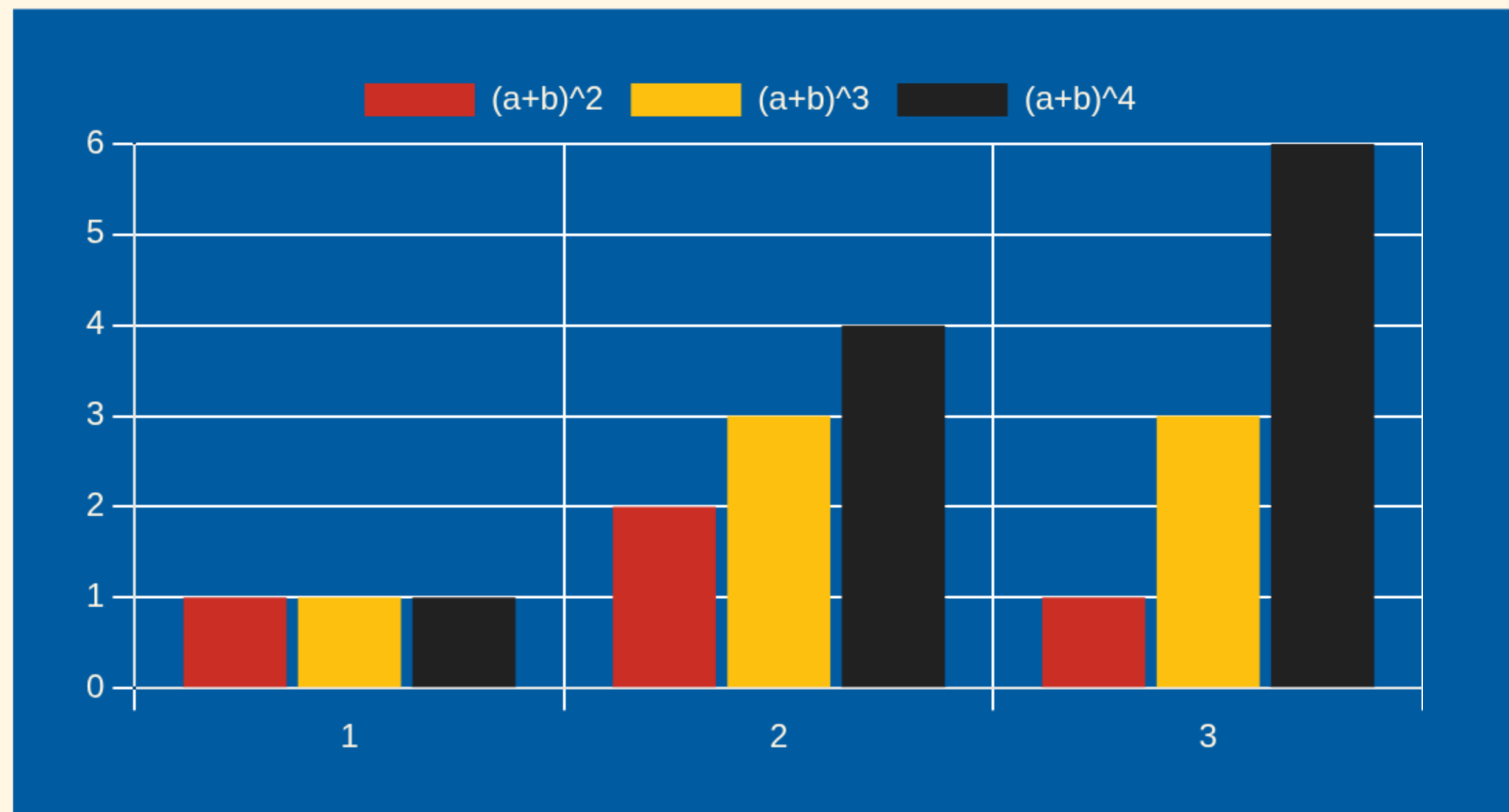
Число членов на один больше степени, а структура разложения остаётся упорядоченной.

Степень	Формула	Члены
2	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	3
3	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	4
4	$(a+b)^4$	5

Как меняются коэффициенты

С увеличением степени появляются более крупные средние коэффициенты, а крайние остаются равными единице.

Коэффициенты растут к середине и затем уменьшаются, сохраняя симметрию слева направо.



Коэффициенты разложения $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ и $(a+b)^4$

Треугольник Паскаля и коэффициенты

Строки треугольника

Коэффициенты разложений удобно читать по строкам треугольника Паскаля: 1; 1 1; 1 2 1; 1 3 3 1; 1 4 6 4 1. Они совпадают с формулами для степеней двучлена.

Правило сложения

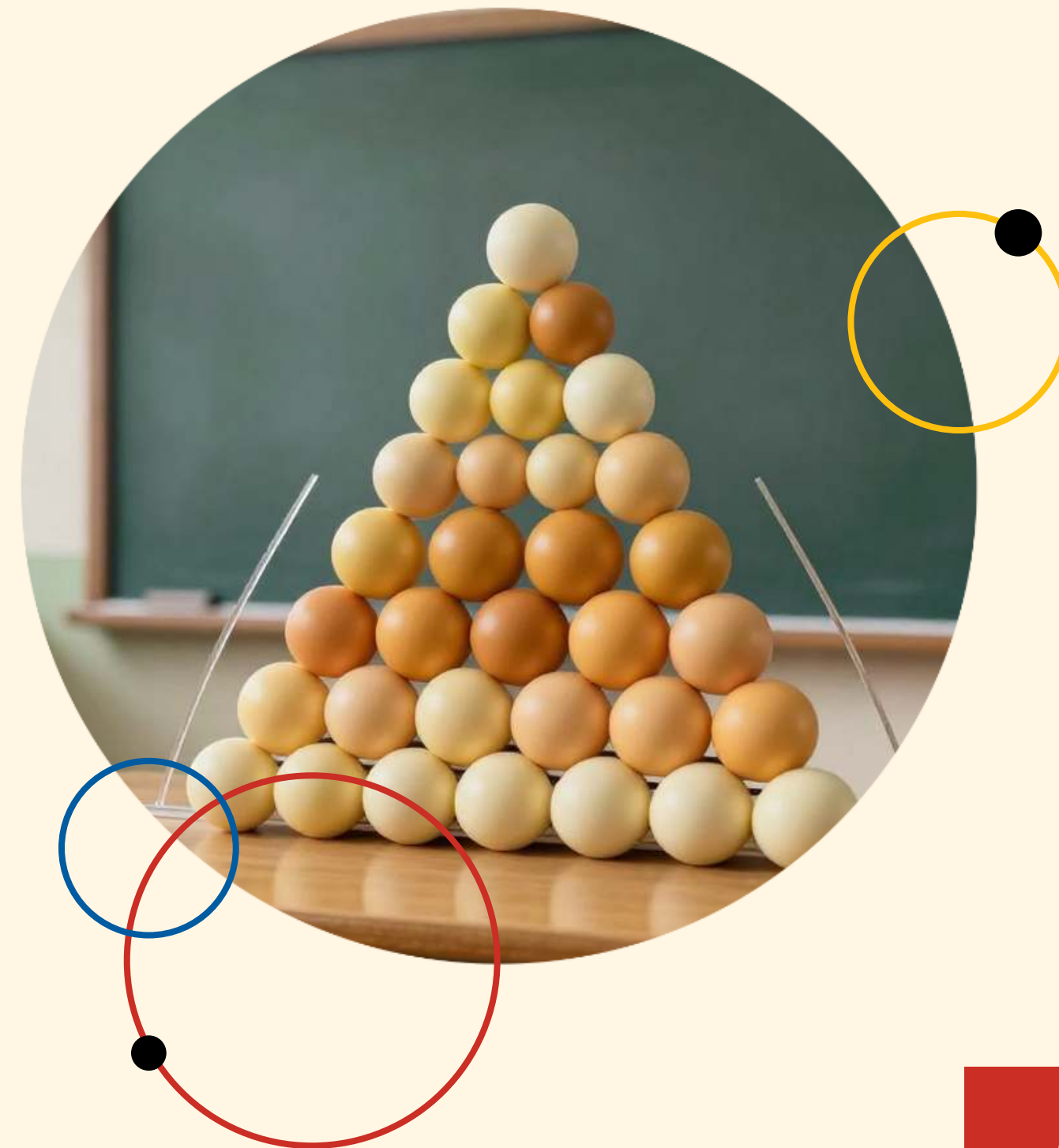
Каждый внутренний элемент получается как сумма двух чисел над ним. Благодаря этому треугольник строится постепенно, а нужные коэффициенты можно находить без запоминания длинных списков.

Симметрия строк

Строки читаются одинаково слева направо и справа налево. Такая симметрия помогает быстро замечать ошибки в записи коэффициентов и проверять правильность разложения.

Связь с формулами

Чем выше степень, тем длиннее строка треугольника и тем больше членов в разложении. Поэтому треугольник Паскаля показывает общий порядок построения формул.



Куб суммы

1 Основная формула

Для куба суммы используют формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. В ней четыре члена, и каждый из них появляется по строгому правилу.

2 Изменение степеней

Степень первой буквы уменьшается от 3 до 0, а второй увеличивается от 0 до 3. Из-за этого разложение выглядит упорядоченно и легко проверяется по схеме.

3 Коэффициенты 1, 3, 3, 1

Числа перед членами образуют симметричный ряд 1, 3, 3, 1. Он показывает, что середина разложения «шире» края и что одинаковые сочетания встречаются несколько раз.

4 Удобный пример

Куб суммы хорошо подходит для первого знакомства с общим законом. На нём видно, как работают степени, коэффициенты и симметрия, не перегружая вычисления.

Куб разности

Формула разности

- Для куба разности используют формулу $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Она похожа на куб суммы, но знаки внутри разложения меняются по особому правилу.

Чередование знаков

- Знаки идут по схеме плюс, минус, плюс, минус. Если потерять хотя бы один знак, весь ответ станет неверным, поэтому каждую часть записи нужно проверять отдельно.

Крайние члены

- Первый член остаётся положительным, а последний становится отрицательным, потому что степень нечётная. Это помогает быстро вспомнить общий вид формулы даже без полного вывода.

Особая внимательность

- В заданиях с вычитанием чаще всего ошибаются именно в знаках средних членов. Поэтому полезно сначала выписывать формулу целиком, а потом переходить к вычислениям.



В школьной теме важнее увидеть закономерность, чем заучить длинную запись целиком.

4

**члена видно уже в кубе
двучлена, поэтому общий
закон удобно замечать
на простом примере.**

Формула бинома Ньютона и разложение $(a+b)^3$

Проверка на конкретных примерах

Сравнение разложения и подстановки помогает быстро убедиться, что формула применена верно.

Подстановка числа в исходное выражение и в разложение даёт одинаковый результат, значит формула записана правильно.

Выражение	Разложение	Проверка
$(x+2)^2$	x^2+4x+4	$x=1 \rightarrow 9$
$(y-3)^2$	y^2-6y+9	$y=4 \rightarrow 1$
$(m+1)^3$	m^3+3m^2+3m+1	$m=2 \rightarrow 27$

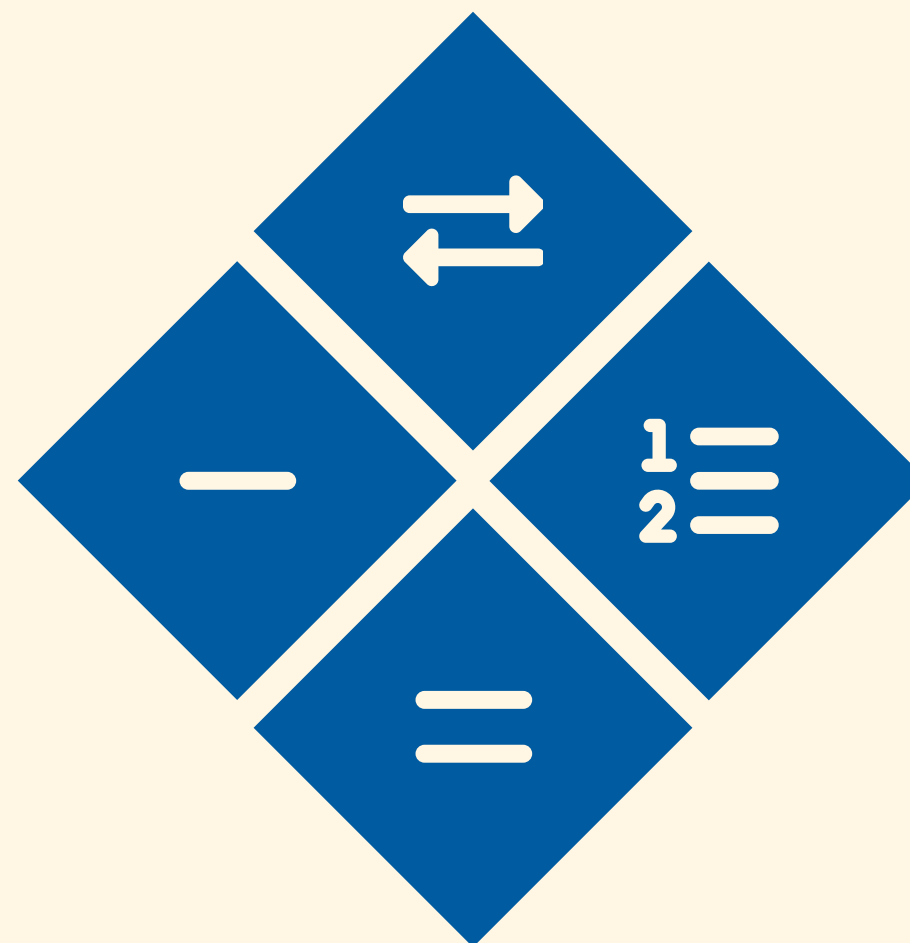
Типичные ошибки при раскрытии скобок

Степень первого буквенного множителя должна уменьшаться, а второго — увеличиваться. Если эта закономерность нарушена, разложение становится неверным, даже если знаки и коэффициенты выглядят правильно.

Путаются степени

Теряется минус

При разности легко забыть, что знак «минус» влияет на все члены внутри скобок. Из-за этого ответ меняется целиком, а не только в одной части выражения.



Пропускается член

Иногда ученик записывает не все слагаемые и получает неполное разложение. Важно помнить, что у квадрата и куба двучлена число членов всегда строго определено.

Сбивается коэффициент

В середине разложения одинаковые произведения появляются дважды, поэтому там возникает нужный коэффициент. Если не заметить повтор, вместо правильного числа получится ошибка в ответе.

Какие ошибки встречаются чаще всего

Диаграмма показывает, что труднее всего даются знаки и середина разложения, поэтому здесь полезно делать отдельную проверку каждого члена.

Если внимательно контролировать знаки и коэффициенты, число ошибок заметно уменьшается, а крайние члены обычно запоминаются без труда.

Ошибки в знаках Ошибки в коэффициентах
Ошибки в степенях Правильные ответы

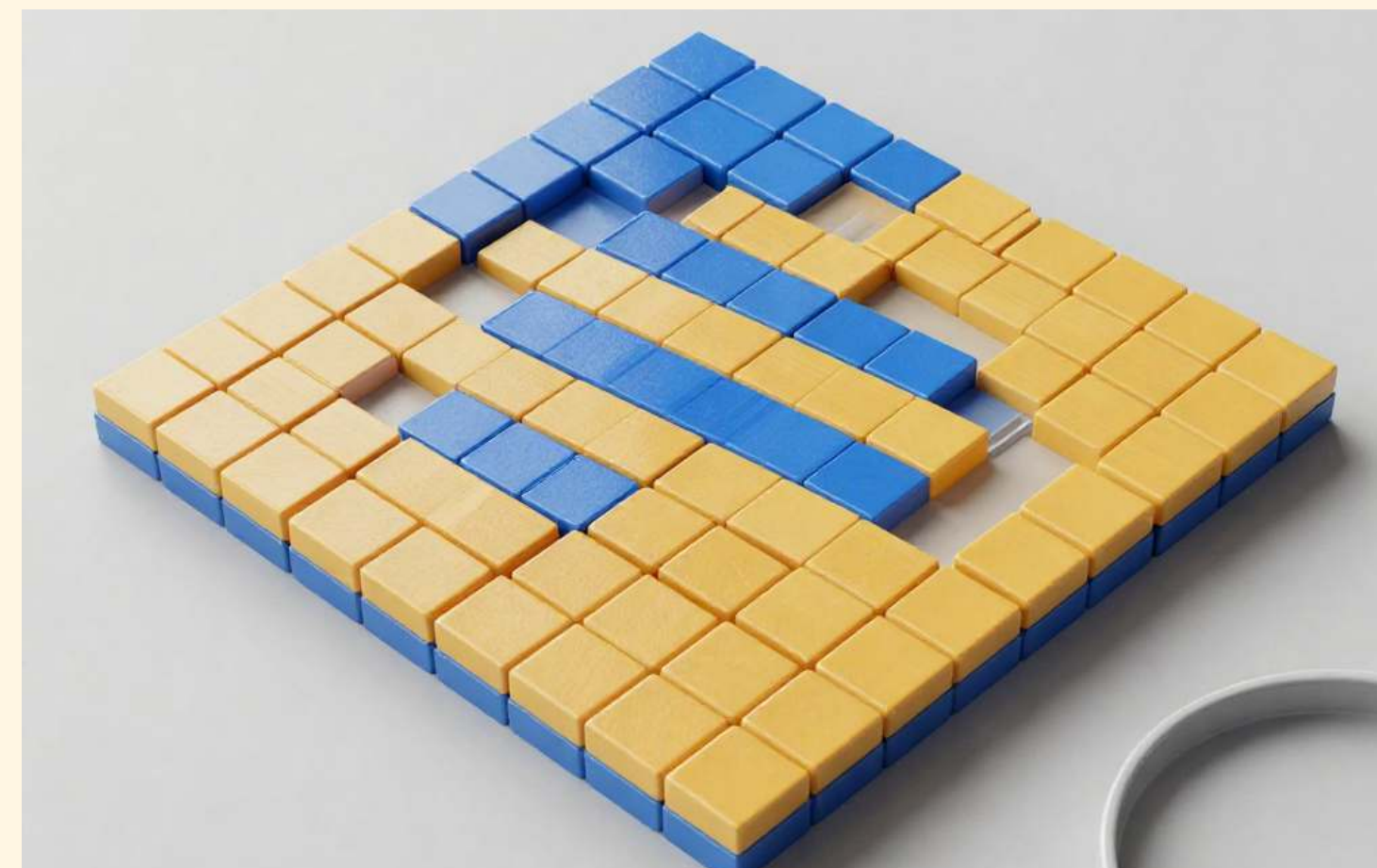


Геометрический смысл формулы квадрата суммы



Один квадрат — четыре части

Если сторона квадрата равна $a+b$, его площадь можно разложить на несколько фигур. Сначала получается квадрат со стороной a , затем два одинаковых прямоугольника и ещё один маленький квадрат со стороной b . Так формула становится наглядной.

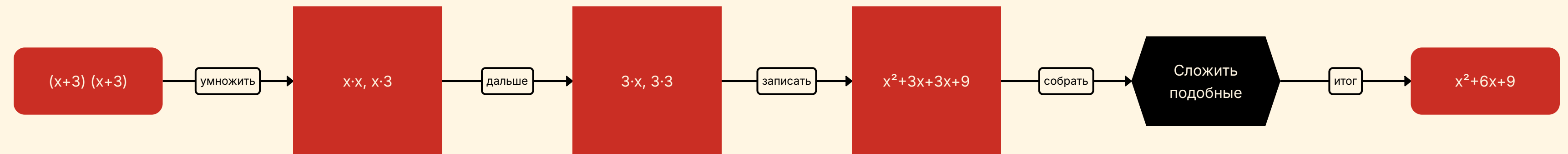


Почему появляются два ab

Два прямоугольника имеют одинаковую площадь ab , поэтому в записи возникает слагаемое $2ab$. Геометрический рисунок показывает, что это не отдельное правило, а результат разбиения одной фигуры на равные части.

Пошаговое раскрытие примера $(x+3)^2$

Алгоритм раскрытия скобок на примере повторного умножения двучлена на самого себя

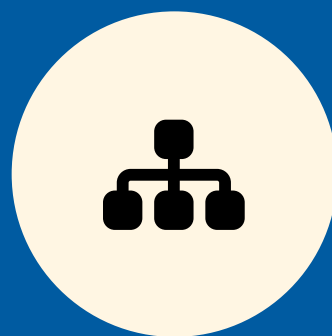


Короткие правила для запоминания



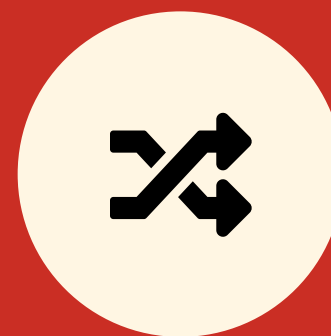
Крайние члены

В квадрате суммы и разности первый и последний члены всегда являются квадратами слагаемых. Это помогает быстро проверить, не пропущена ли важная часть разложения.



Куб суммы

У куба суммы всегда четыре члена, а коэффициенты образуют последовательность 1, 3, 3, 1. Она сразу подсказывает структуру разложения и облегчает проверку ответа.



Знаки при разности

Если внутри скобок стоит минус, знаки в разложении чередуются. Особенно важно следить за средними членами, потому что именно там чаще всего появляется ошибка.



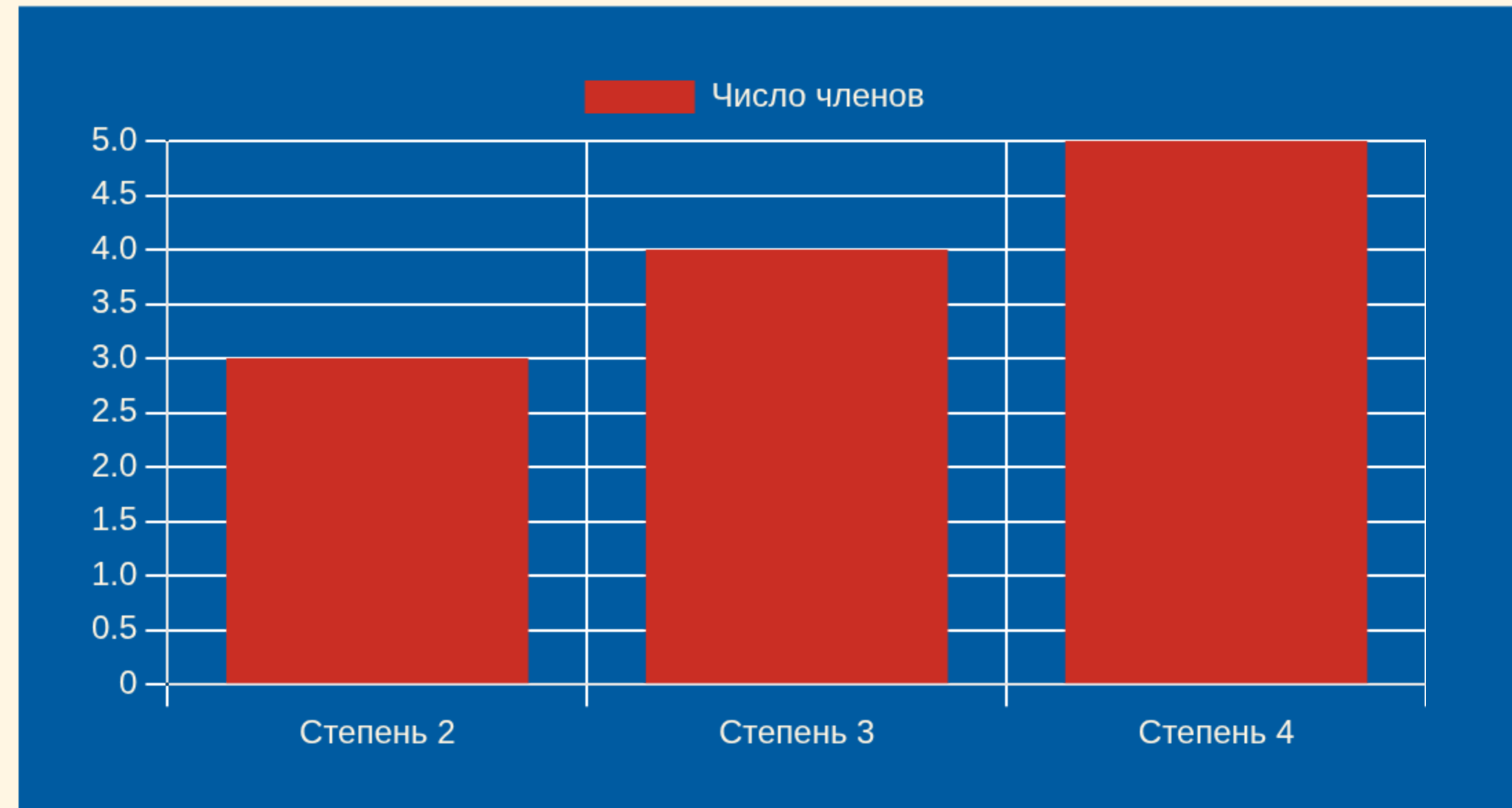
Проверка симметрией

Коэффициенты в разложении симметричны слева направо. Если последовательность нарушилась, значит где-то допущена ошибка в вычислении, знаке или степени.

Сколько членов получается в разных степенях

С ростом степени разложение удлиняется, поэтому при проверке полезно заранее знать, сколько членов должно получиться.

Каждая следующая степень добавляет один новый член, а середина разложения становится всё более насыщенной и требует внимательности.



Где используется возведение двучлена в степень

Если ответ получен несколькими способами, разложение двучлена помогает сверить результат. Это полезно в примерах на числовые закономерности и при преобразовании формул.

Проверка вычислений

Упрощение выражений

Разложение помогает раскрывать скобки и приводить выражение к более удобному виду. Это ускоряет вычисления и делает работу с алгебраическими выражениями понятнее.



Задачи на площадь

В геометрических задачах разложение двучлена объясняет, как меняется площадь фигуры при изменении сторон. Так алгебра связывается с привычными чертежами и измерениями.

Решение уравнений

При преобразовании уравнений часто нужно заменить сложное выражение более простым. Формулы для квадрата и куба двучлена помогают выполнить это без лишних действий.

Тренировочные примеры для закрепления

1 Простой квадрат

Начните с выражения $(a+1)^2$. Здесь удобно проверить, как работает квадрат суммы, и не забыть, что средний член появляется дважды.

2 Разность в квадрате

В примере $(x-2)^2$ нужно особенно внимательно следить за знаком минус. Он меняет середину разложения, но крайние члены остаются квадратами.

3 Куб суммы

Выражение $(m+4)^3$ показывает сразу четыре члена разложения. В нём важно увидеть последовательность коэффициентов 1, 3, 3, 1 и правильно записать степени.

4 Смешанные числа

В примере $(2y-1)^2$ нужно аккуратно раскрыть скобки, сохранить знаки и объединить подобные слагаемые. Такой пример хорошо проверяет внимательность и аккуратность вычислений.

Главное, что нужно запомнить

Возведение двучлена в степень строится на повторном умножении, симметрии коэффициентов и внимании к знакам. Если помнить формулы и проверять себя подстановкой, ошибок станет гораздо меньше.