



Геометрическая прогрессия и формула общего члена

Последовательности, формула и примеры — разберём
геометрическую прогрессию шаг за шагом.

Где встречается геометрическая прогрессия

/2



Эта тема помогает понимать проценты, вклады, изменение цен и рост или уменьшение величин. Здесь важно запомнить обозначения: a_1 , q , n и a_n , а также постоянное отношение соседних членов.

Определение геометрической прогрессии ^{/3}



Главное правило

Геометрическая прогрессия — это последовательность, в которой каждый следующий член получают умножением предыдущего на одно и то же число q , называемое знаменателем.

Постоянное отношение

Для любых соседних членов отношение остаётся одинаковым: $a_{n+1} / a_n = q$. Именно это свойство позволяет быстро узнавать, является ли последовательность геометрической.

Примеры последовательностей

Последовательности 2, 6, 18, 54; 81, 27, 9, 3; 5, -10, 20, -40 показывают одно и то же правило: каждый новый член связан с предыдущим одинаковым множителем.

Знак и рост

Знаменатель может быть больше 1, дробным или отрицательным. Тогда последовательность может расти, убывать или чередовать знаки, но правило умножения сохраняется.

Арифметическая и геометрическая прогрессии: сравнение

Признак	Арифметическая	Геометрическая
Правило	прибавляют число	умножают на q
Соседние члены	разность d	отношение q
Характер	изменение на шаг	изменение по множителю
Пример	2, 5, 8	2, 6, 18

Определения арифметической и геометрической прогрессий из школьного курса алгебры

Сравнение показывает, что обе последовательности подчиняются постоянному правилу, но изменяются по-разному.

В арифметической прогрессии важна разность, а в геометрической — множитель; поэтому способы нахождения членов у них разные.

Формула общего члена и смысл её частей

/5

Запись формулы

Общий член геометрической прогрессии записывают так: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Она позволяет найти любой член последовательности, если известны первый член, знаменатель и номер.

Роль q

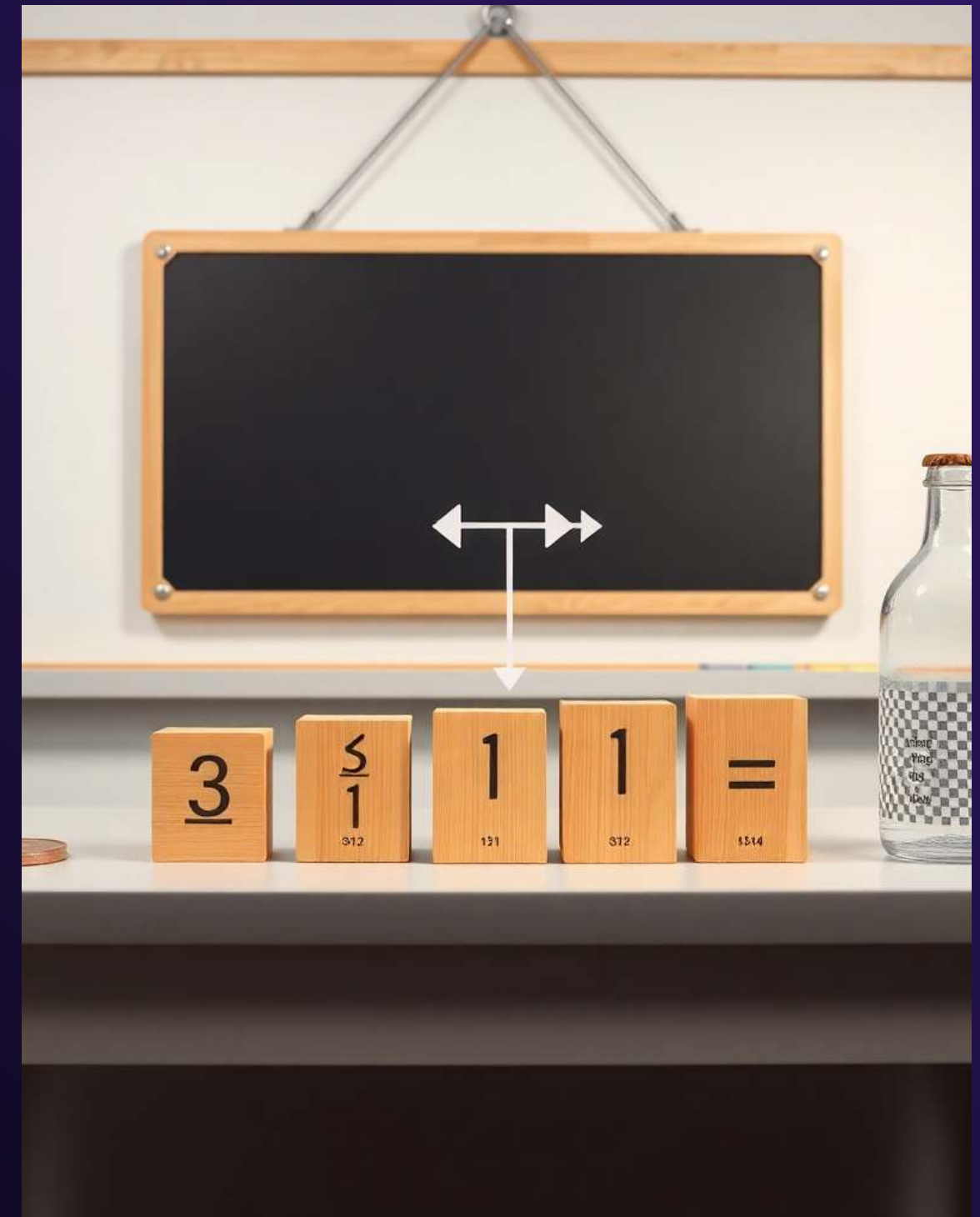
Знаменатель q показывает, во сколько раз каждый новый член отличается от предыдущего. Он одинаков для всех соседних пар и задаёт направление изменения последовательности.

Что означает a_1

Символ a_1 обозначает первый член прогрессии. Именно от него начинается вычисление всех следующих значений, поэтому его нужно определить в условии задачи особенно внимательно.

Почему $n-1$

Показатель $n-1$ показывает число умножений на q от первого члена до нужного. Для второго члена степень равна 1, для третьего — 2, для десятого — 9.



Как вывести формулу общего члена

/6

Переход от первых членов последовательности к записи через степень



Почему в формуле появляется степень

/7



Переход к следующему члену

Если $a_2 = a_1 \cdot q$, то для a_3 нужно ещё раз умножить на q , а для a_4 — уже дважды повторить это действие. Количество умножений постепенно увеличивается.

Цепочка множителей

Запись $a_1 \cdot q \cdot q \cdot q$ помогает увидеть, что один и тот же множитель повторяется снова и снова. Это удобно для понимания, почему в формуле появляется степень.

Связь со степенью

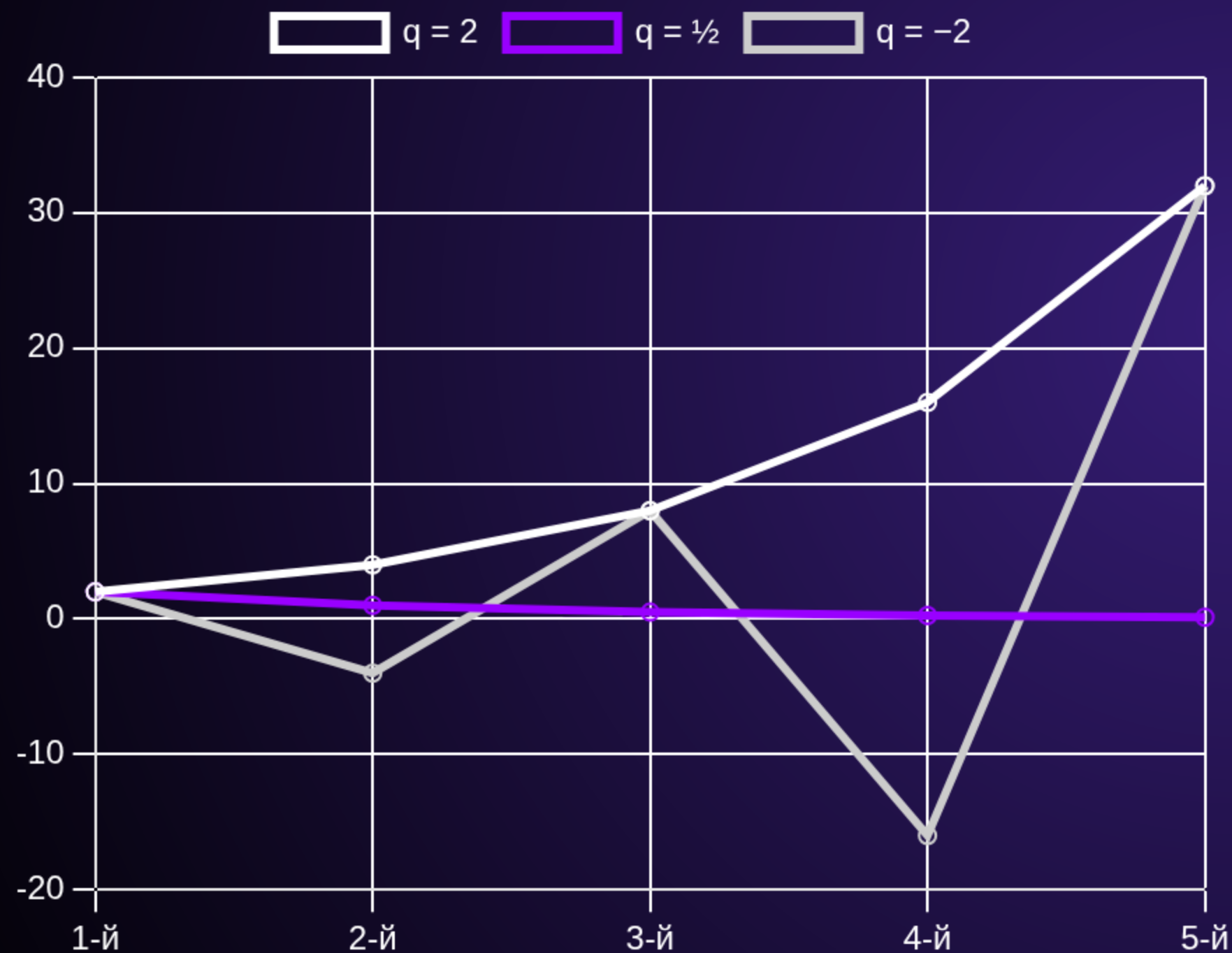
Когда одинаковый множитель повторяется несколько раз, его записывают короче: $q \cdot q \cdot q = q^3$. Так обычное умножение превращается в степень и делает формулу компактной.

Смысл $n-1$

В показателе $n-1$ отражено число переходов от первого члена к нужному. Поэтому чем дальше расположен член прогрессии, тем больше раз используется умножение на q .

Как ведут себя последовательности при разных значениях q

/8



На графике видно, что один и тот же первый член может вести себя совсем по-разному в зависимости от знаменателя.

Значение q определяет не только скорость изменения, но и общий вид последовательности: рост, убывание или чередование знаков.

Учебный пример для сравнения поведения геометрических прогрессий

Подстановка в формулу показывает, что нужный член можно найти быстро, если известны первый член, знаменатель и номер.

/9

2560

— это значение десятого члена при $a_1 = 5$ и $q = 2$.

Пример вычисления по формуле $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

Примеры вычисления общего члена

a1	q	n	Вычисление и ответ
4	3	5	$4 \cdot 3^4 = 324$
100	$\frac{1}{2}$	6	$100 \cdot (\frac{1}{2})^5 = 3,125$
7	-2	4	$7 \cdot (-2)^3 = -56$

В таблице показано, как формула работает в разных ситуациях: при обычном росте, дробном знаменателе и отрицательном знаменателе.

Дробный знаменатель уменьшает члены, а отрицательный делает знаки чередующимися; степень определяет, сколько раз умножается первый член.

Примеры, составленные по формуле общего члена геометрической прогрессии

Проверка формулы на первых членах

/11

01 Проверка первого члена

Подставьте $n = 1$ и убедитесь, что получается a_1 . В формуле $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ степень равна нулю, поэтому $a_1 \cdot q^0 = a_1$, и первый член сохраняется без изменений.

Сверка второго члена

Для $n = 2$ формула должна дать $a_2 = a_1 \cdot q$. Это совпадает с определением прогрессии и показывает, что множитель q действительно применяется один раз.

03 Поиск ошибки в ответе

Если результат не совпадает с первыми членами, проверьте знак, скобки и степень $n-1$. Часто ошибка возникает из-за неправильного значения q или пропущенных скобок.

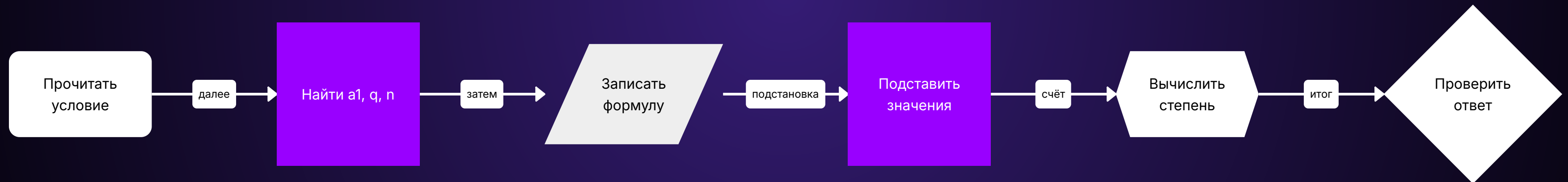
Быстрая самопроверка

Такая проверка помогает сразу заметить вычислительную неточность и не тратить время на пересчёт всей задачи. Особенно полезно делать её после работы с отрицательными числами и дробями.

Алгоритм решения задач на формулу an

/12

Последовательность действий при нахождении члена геометрической прогрессии в школьных задачах.



Геометрическая прогрессия в жизни и процентах

/13



Вклад, который растёт шаг за шагом

Когда банк начисляет проценты, сумма на счёте увеличивается не на случайную величину, а на один и тот же процент каждый период. Именно поэтому последовательность вкладов можно описать геометрической прогрессией и удобно проследить по шагам.



Цена после скидки или наценки

Если товар дешевеет на 20% или дорожает на 10%, новое значение каждый раз получается умножением на постоянный коэффициент. Так можно быстро узнать итоговую цену после нескольких изменений, не считая каждое отдельно.

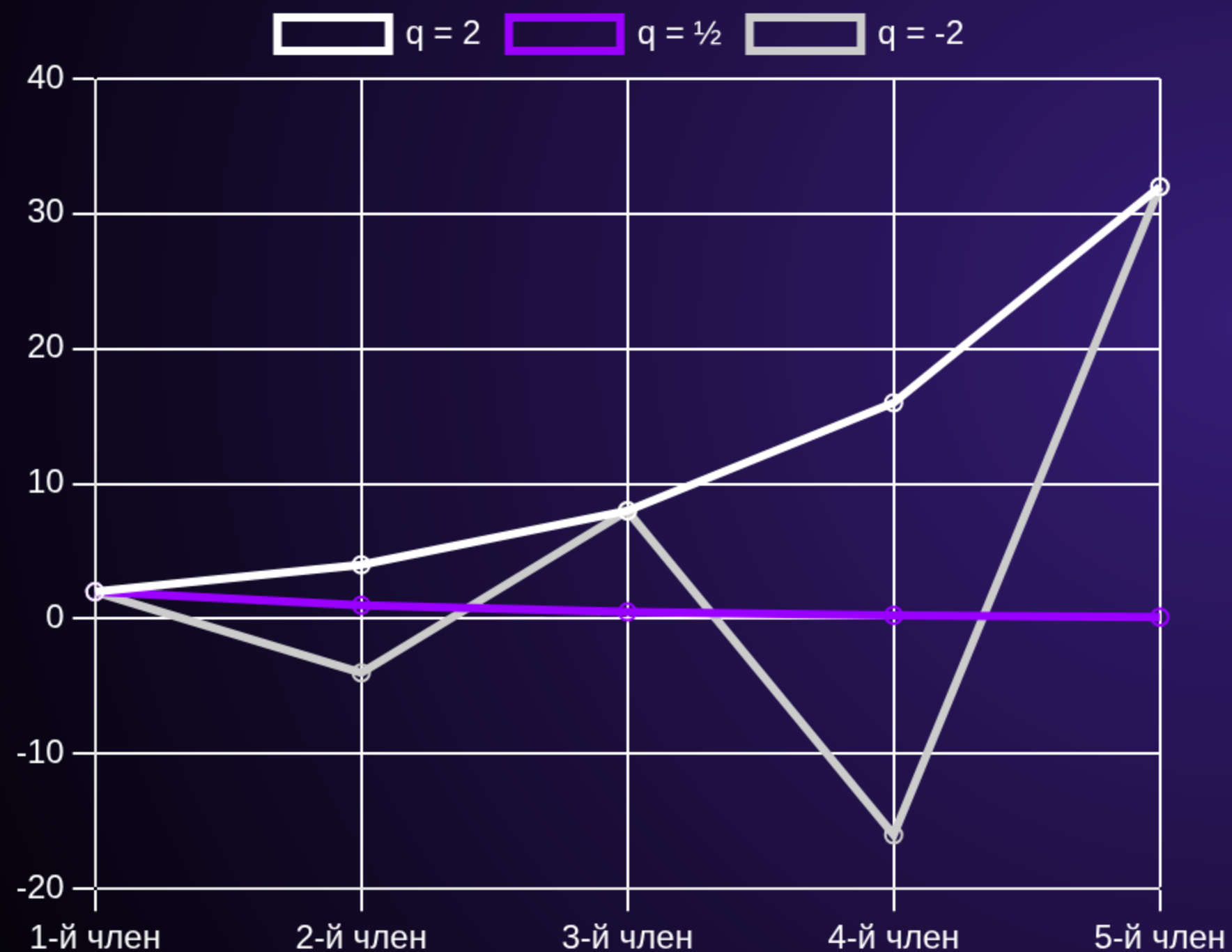


Рост и спад в реальных процессах

Похожий принцип встречается в задачах о численности, распространении информации и повторяющемся уменьшении величины. На графике такие изменения выглядят как плавный рост или спад, а формула помогает описать их точно.

Сравнение первых членов при разных знаменателях

/14



Одинаковый первый член помогает увидеть, как именно меняется последовательность из-за q .

Знаменатель определяет не только скорость изменения, но и направление, а при отрицательном q ещё и чередование знаков.

Составлено по правилам геометрической прогрессии и школьным примерам

Особые случаи знаменателя q

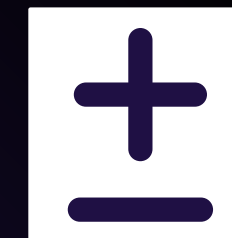
/15

$$q = 1$$



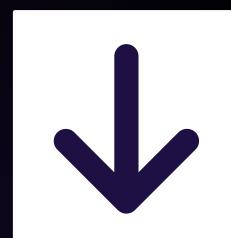
Все члены остаются одинаковыми, потому что каждое следующее число получается умножением на 1. Такая прогрессия не меняется и удобна для проверки понимания формулы.

$$q = -1$$



Знаки чередуются через один член: положительное число становится отрицательным, затем снова положительным. Значения по модулю остаются прежними, меняется только знак.

$$0 < q < 1$$



Каждый следующий член меньше предыдущего, поэтому последовательность убывает. Чем ближе q к нулю, тем быстрее уменьшаются значения и сильнее заметно спадание.

$$q > 1$$



Последовательность возрастает, причём с каждым шагом значения увеличиваются всё быстрее. Чем больше q , тем заметнее разница между соседними членами.

Типичные ошибки при использовании формулы

Ошибка	Пример	Правильно
Нет степени n-1	$a_5 = 4 \cdot 3^5$	$a_5 = 4 \cdot 3^4$
Путают a1 и q	$a_1 = 3, q = 4$	$a_1 = 4, q = 3$
Нет скобок при q	$7 \cdot -2^3$	$7 \cdot (-2)^3$
Дробь возводят неверно	$(\frac{1}{2})^5 = 1/16$	$(\frac{1}{2})^5 = 1/32$

Правила работы с формулой общего члена геометрической прогрессии

Сравните частые ошибки, чтобы быстрее находить неточности при вычислении членов геометрической прогрессии.

Чаще всего ошибка связана со степенью или скобками, поэтому перед ответом нужно отдельно проверять знак, основание степени и порядок действий.

Связь формулы с задачами на проценты

/17

Процент превращается в q



Если величина увеличивается на 5%, знаменатель равен 1,05. При уменьшении на 10% он равен 0,9. Так процентное изменение сразу записывается как множитель в формуле.

Несколько шагов без лишних вычислений



Формула общего члена позволяет не считать каждый новый этап отдельно. Достаточно знать первый член, коэффициент изменения и номер шага, чтобы сразу получить нужное значение.

Удобно для цен и скидок



В задачах о стоимости товара можно быстро определить цену после нескольких повышений или скидок. Это особенно полезно, когда изменения повторяются много раз подряд.

Подходит для накоплений

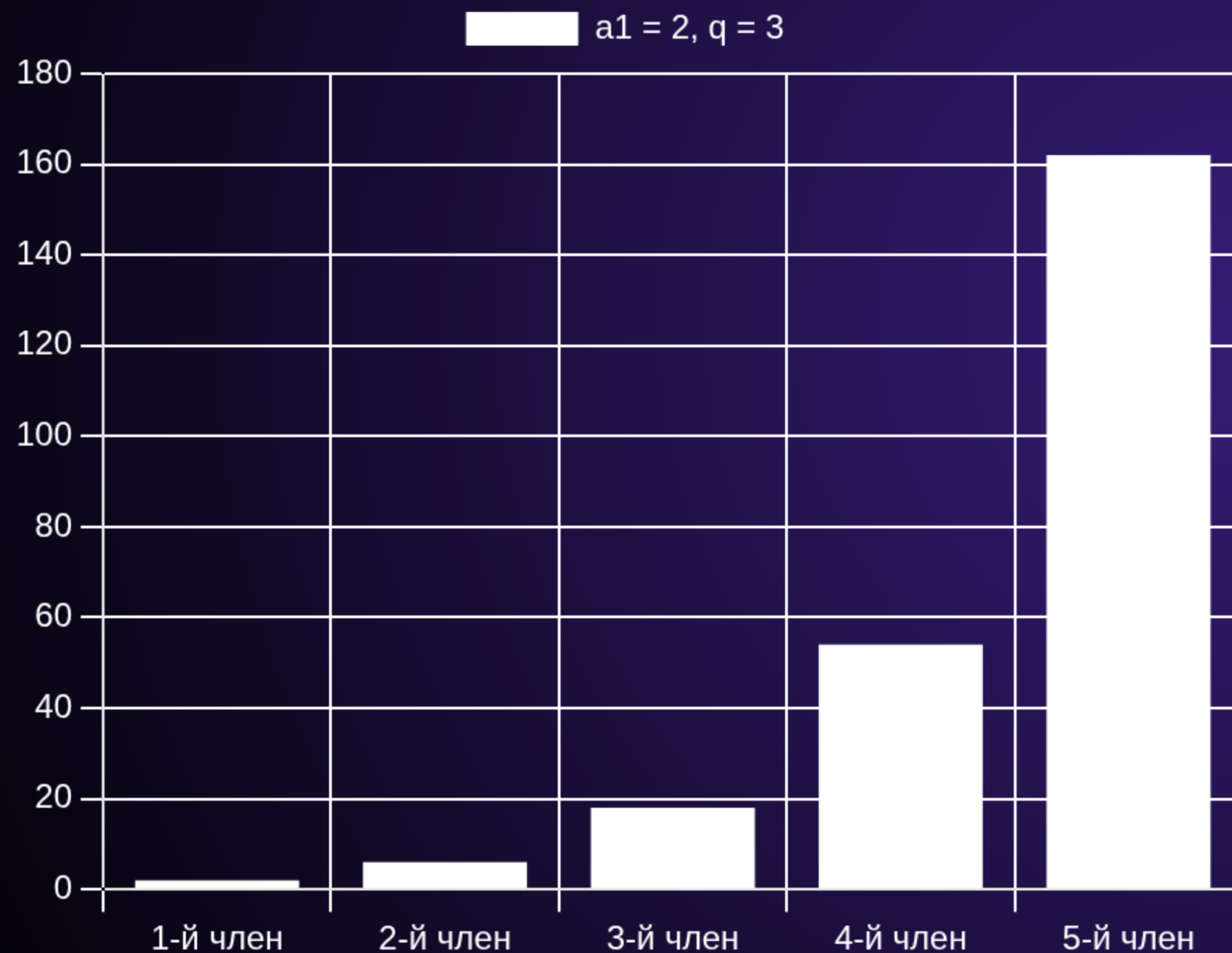


Если сумма растёт регулярно на одинаковый процент, её удобно описывать геометрической прогрессией. Тогда можно заранее предсказать итог через несколько периодов.



Наглядный пример прогрессии с постоянным множителем

/18



Здесь каждый столбец выше предыдущего в три раза, поэтому рост становится всё заметнее с каждым шагом.

Постоянное умножение на 3 быстро увеличивает значения и показывает, как q влияет на темп роста последовательности.

Последовательность: 2, 6, 18, 54, 162; школьный пример

Короткие примеры для закрепления темы

/19

Рост в четыре раза

Последовательность 1, 4, 16, 64 получается умножением на 4. Здесь первый член равен 1, а знаменатель $q = 4$, поэтому формула работает без дополнительных преобразований.

Плавное уменьшение

В ряду 243, 81, 27, 9 каждый следующий член в три раза меньше предыдущего. Это пример с $q = 1/3$, где значения уменьшаются, но правило остаётся постоянным.

Чередование знаков

Последовательность 5, -10, 20, -40 показывает случай с отрицательным знаменателем $q = -2$. Знак меняется через один член, но общий закон умножения сохраняется.

**Формула, которая
связывает все
члены прогрессии**

Геометрическая прогрессия становится понятной, когда известны первый член, знаменатель и степень $n-1$. Формула $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ помогает быстро находить любой член и проверять ответ.