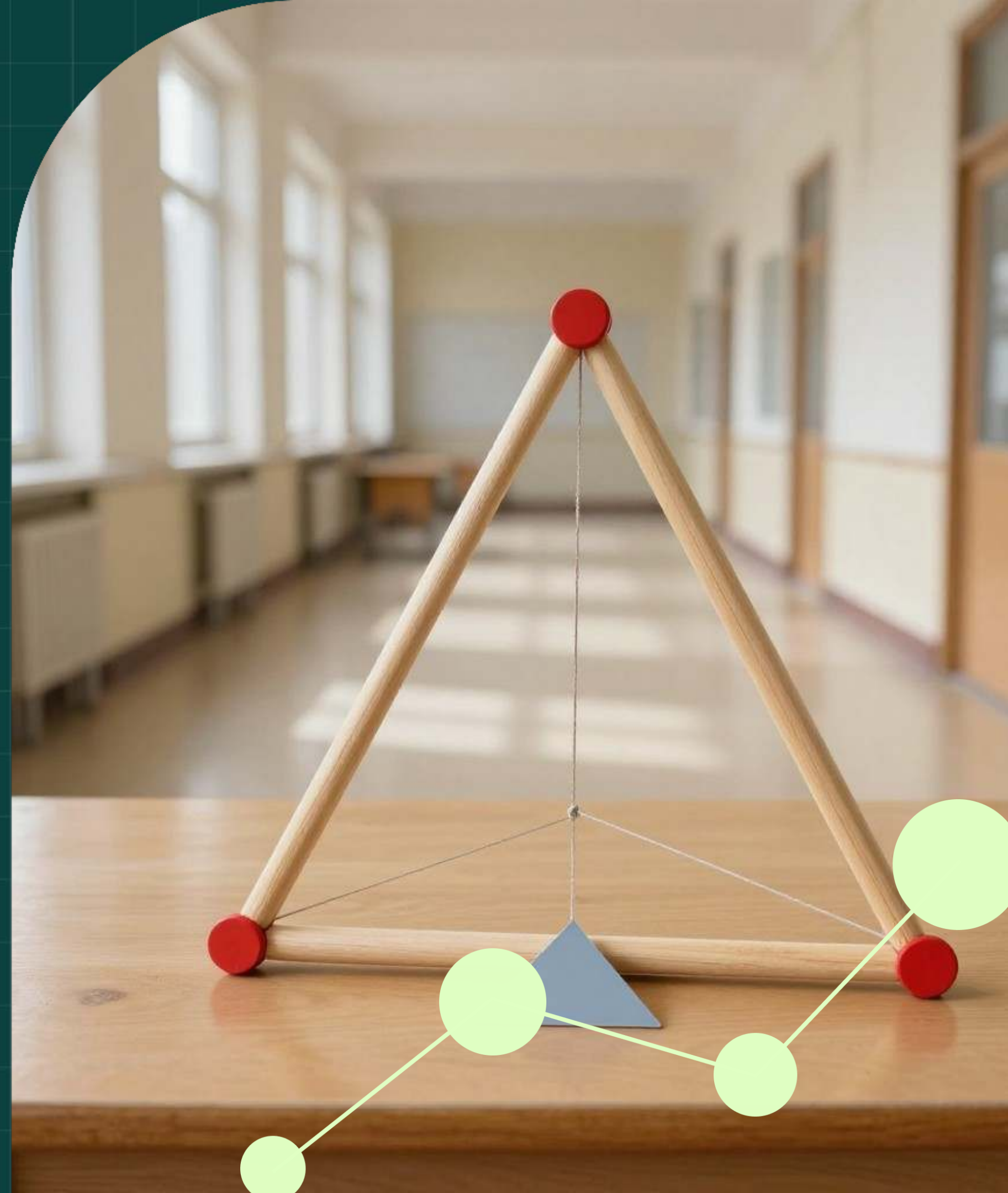




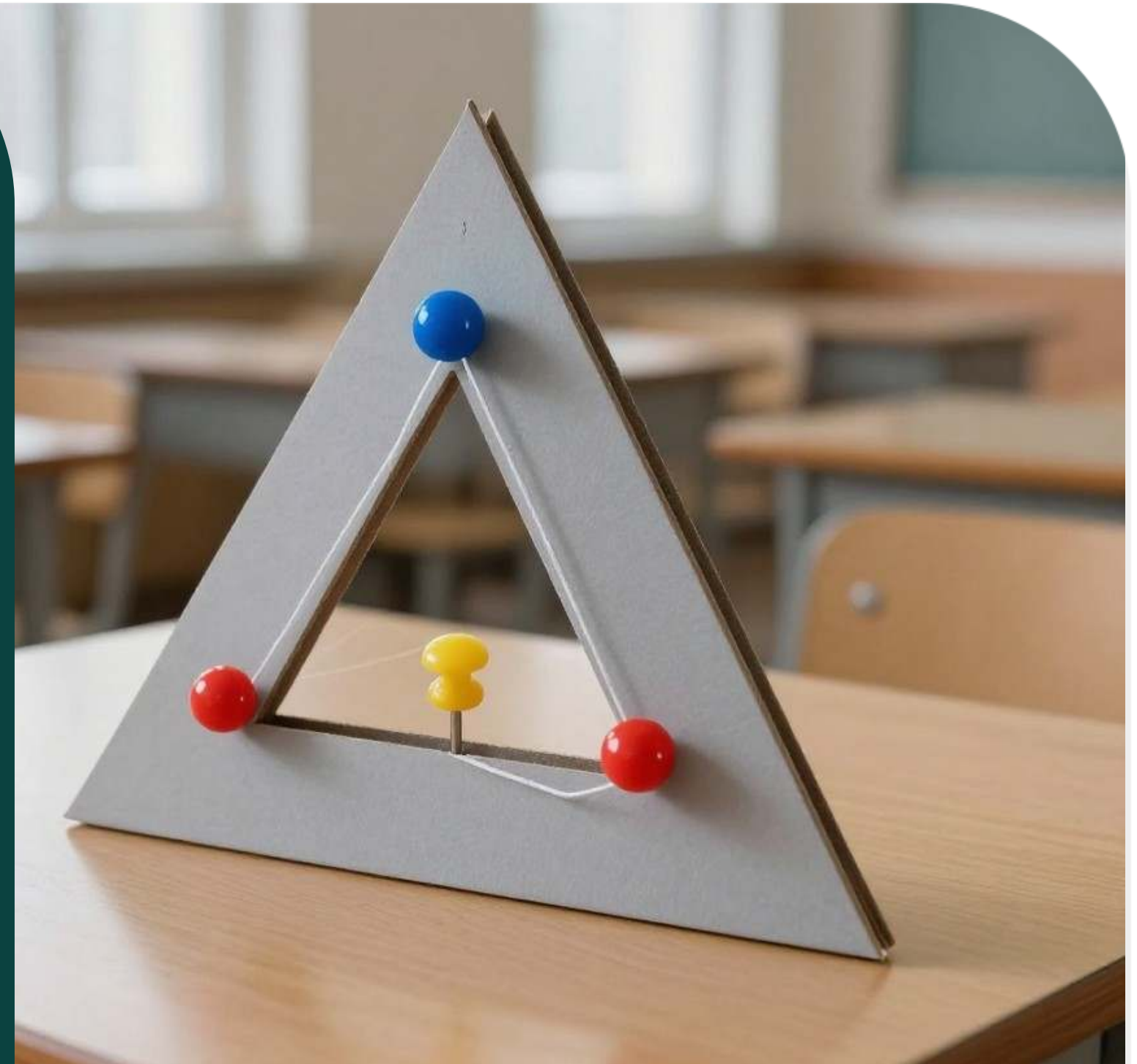
Замечательные точки в треугольнике

Медианы, биссектрисы,
перпендикуляры и высоты
ведут к особым точкам
треугольника.



Зачем нужны особые точки треугольника

Эти точки помогают решать построения и доказательства, находить центры окружностей и быстрее понимать свойства треугольника: равновесие, равные расстояния и деление углов.



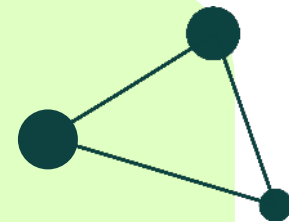
Медианы и центр тяжести

3

1

Что такое медиана

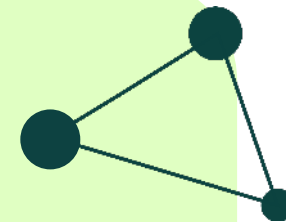
Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В каждом треугольнике таких отрезков три, и они всегда строятся одинаково, без дополнительных условий.



2

Точка пересечения

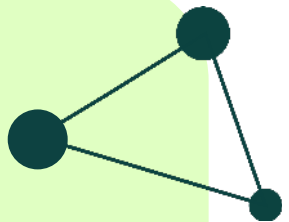
Все три медианы пересекаются в одной точке, которая называется центром тяжести или центроидом. Это одно из самых важных свойств треугольника в школьной геометрии.



3

Почему это важно

Центр тяжести делит каждую медиану в отношении 2:1, если считать от вершины. Такое деление удобно понимать как признак равновесия треугольной фигуры.



Четыре главные линии треугольника

Линия	Свойство	Точка
Медиана	К середине стороны	Центр тяжести
Биссектриса	Делит угол пополам	Инцентр
Высота	Перпендикуляр к стороне	Ортоцентр
Серединный перпендикуляр	Через середину стороны	Центр окружности

Каждая из основных линий треугольника приводит к своей особой точке пересечения.

У каждой линии есть своё геометрическое назначение, а пересечение трёх одинаковых линий даёт особую точку.



Центр тяжести в жизни и механике

5

● Идея равновесия

Предмет держится устойчиво, когда его центр тяжести расположен над точкой опоры. Поэтому понятие центра тяжести важно не только в геометрии, но и в повседневной жизни.

● Инженерные применения

Принцип равновесия используют при создании конструкций, деталей и устойчивых форм. Чем точнее определён центр тяжести, тем надёжнее можно проектировать объект.

● Треугольная пластина

У треугольной пластинки центр тяжести совпадает с точкой пересечения медиан. Это наглядный пример того, как геометрическое построение описывает реальное физическое равновесие.

● Спортивные примеры

В спорте важно чувствовать, как распределяется масса тела. Понимание центра тяжести помогает сохранять баланс, выполнять повороты и удерживать устойчивую позу.



Именно три биссектрисы позволяют найти центр вписанной окружности, которая касается всех сторон треугольника.

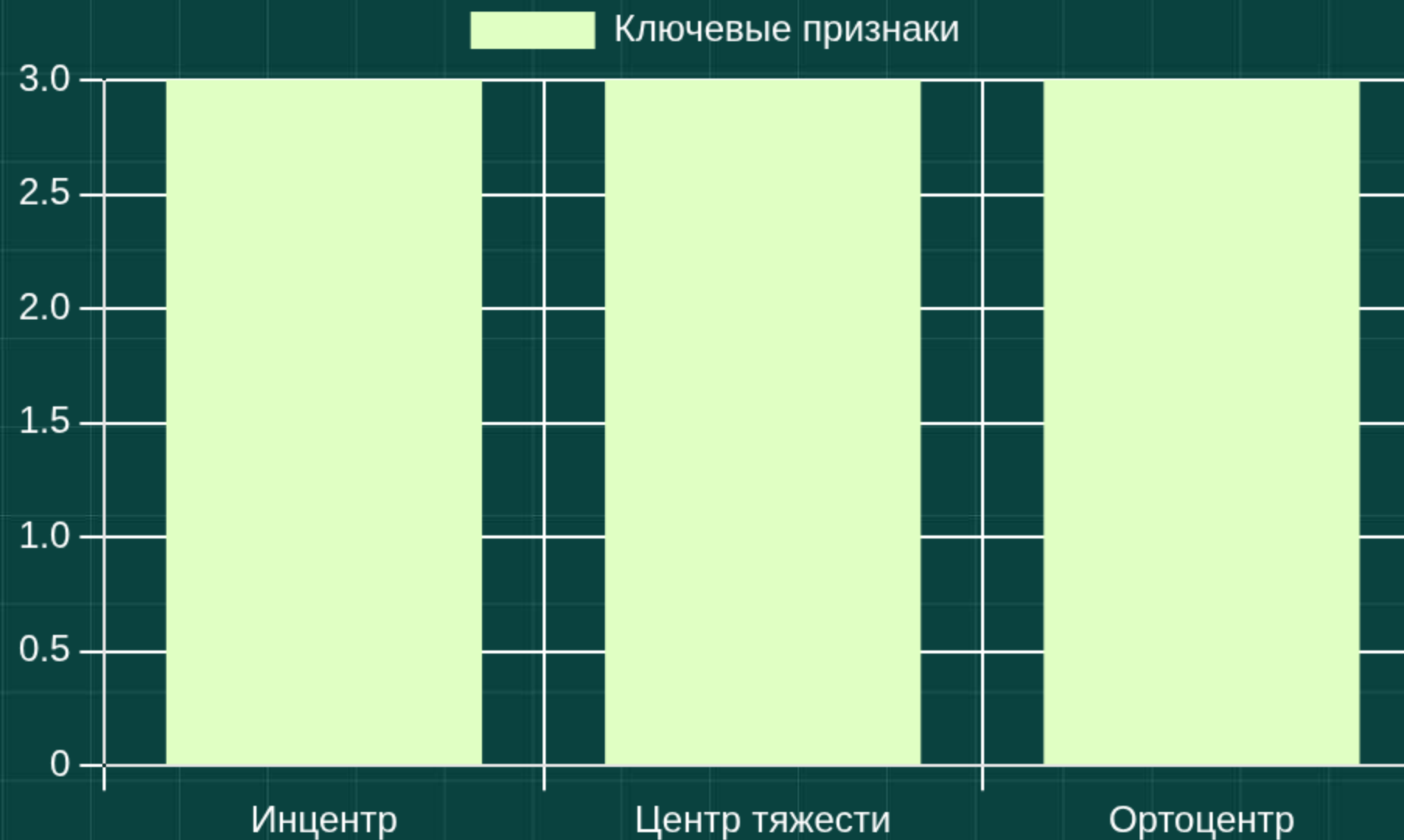
Свойство биссектрис треугольника



3

**биссектрисы всегда
пересекаются в одной точке —
инцентре**

Что характеризует каждая замечательная точка



На диаграмме показаны точки, которые чаще всего изучают в школе. Каждая из них связана с собственным набором линий и построений.

Точки различаются не числом, а смыслом: одна отвечает за стороны, другая — за равновесие, третья — за высоты.

Серединные перпендикуляры и центр описанной окружности

8

1

Как строится перпендикуляр

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны под прямым углом. Его можно построить циркулем и линейкой, используя равные дуги из концов отрезка.

2

Где они встречаются

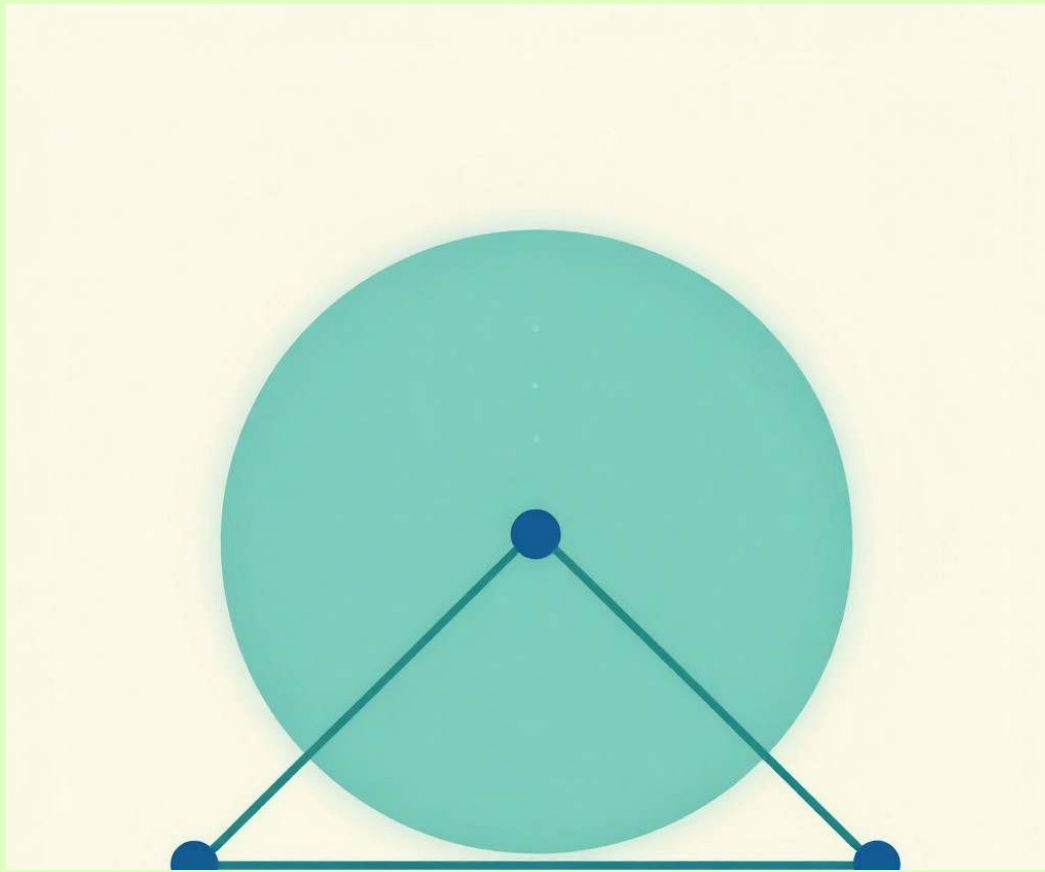
Три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта точка называется центром описанной окружности и одинаково удалена от всех вершин треугольника.

3

Что это даёт

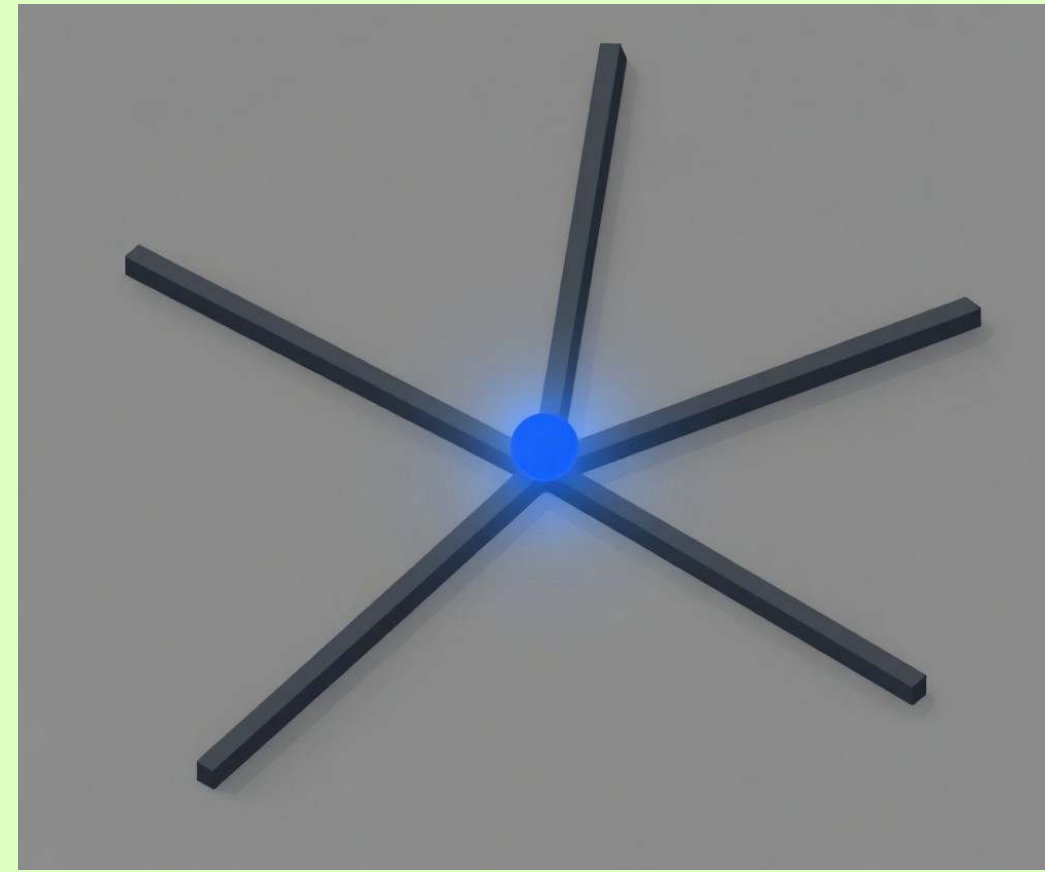
Если центр равноудалён от всех вершин, через эти вершины можно провести единственную окружность. Именно поэтому описанная окружность всегда проходит через три вершины треугольника.

Описанная окружность треугольника



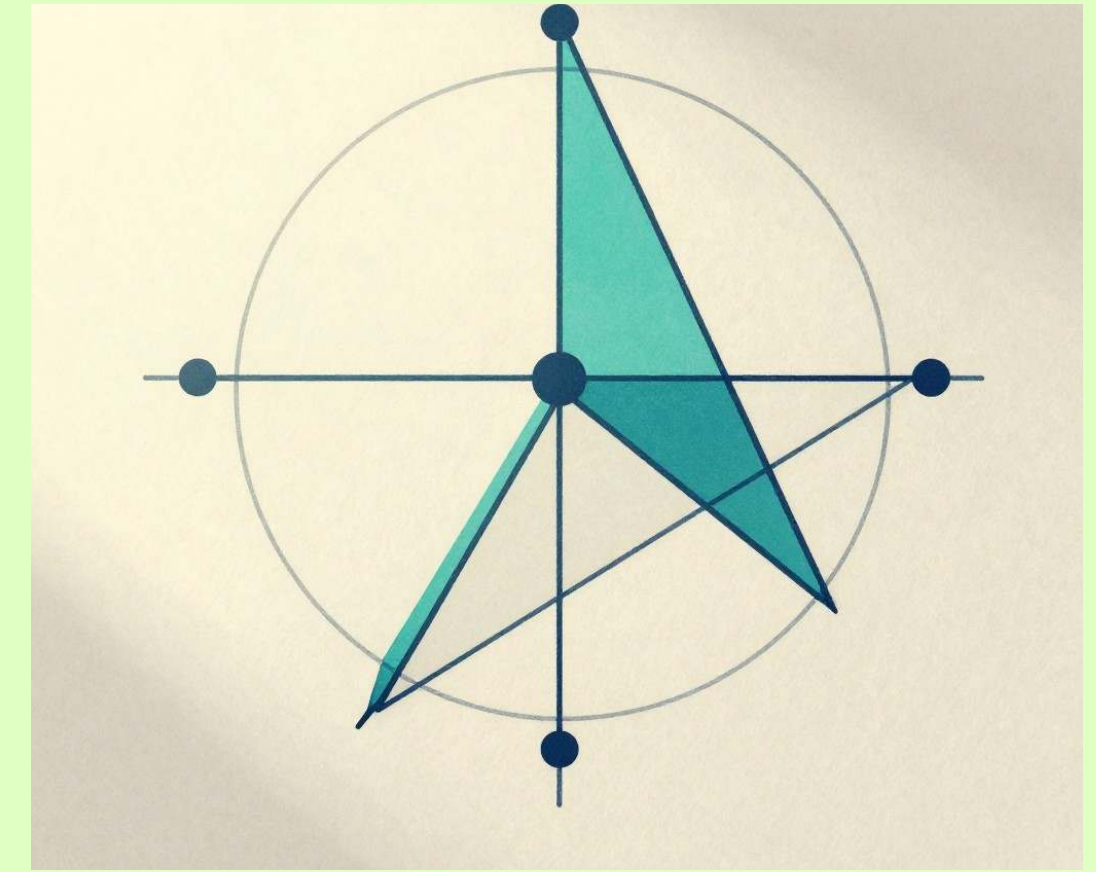
Окружность через три вершины

Описанная окружность выглядит особенно аккуратно: она проходит через все вершины треугольника без исключения. На рисунке важно показать сам треугольник, окружность и три равных радиуса, выходящих из центра к вершинам.



Почему центр один

Центр окружности находится там, где пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам. От этой точки до каждой вершины расстояние одинаково, поэтому любой радиус, проведённый к вершине, имеет ту же длину. Это и делает окружность описанной.



Зачем нужен рисунок

Чёткое изображение помогает увидеть сразу несколько свойств: равные радиусы, положение центра и связь с вершинами. Такой чертёж удобно использовать в задачах на построение и доказательство.

Как появляются высоты и ортоцентр

Шаг 1. Выбор вершины

Из каждой вершины проводят отрезок к противоположной стороне так, чтобы он был перпендикулярен ей или её продолжению.

Шаг 2. Построение трёх высот

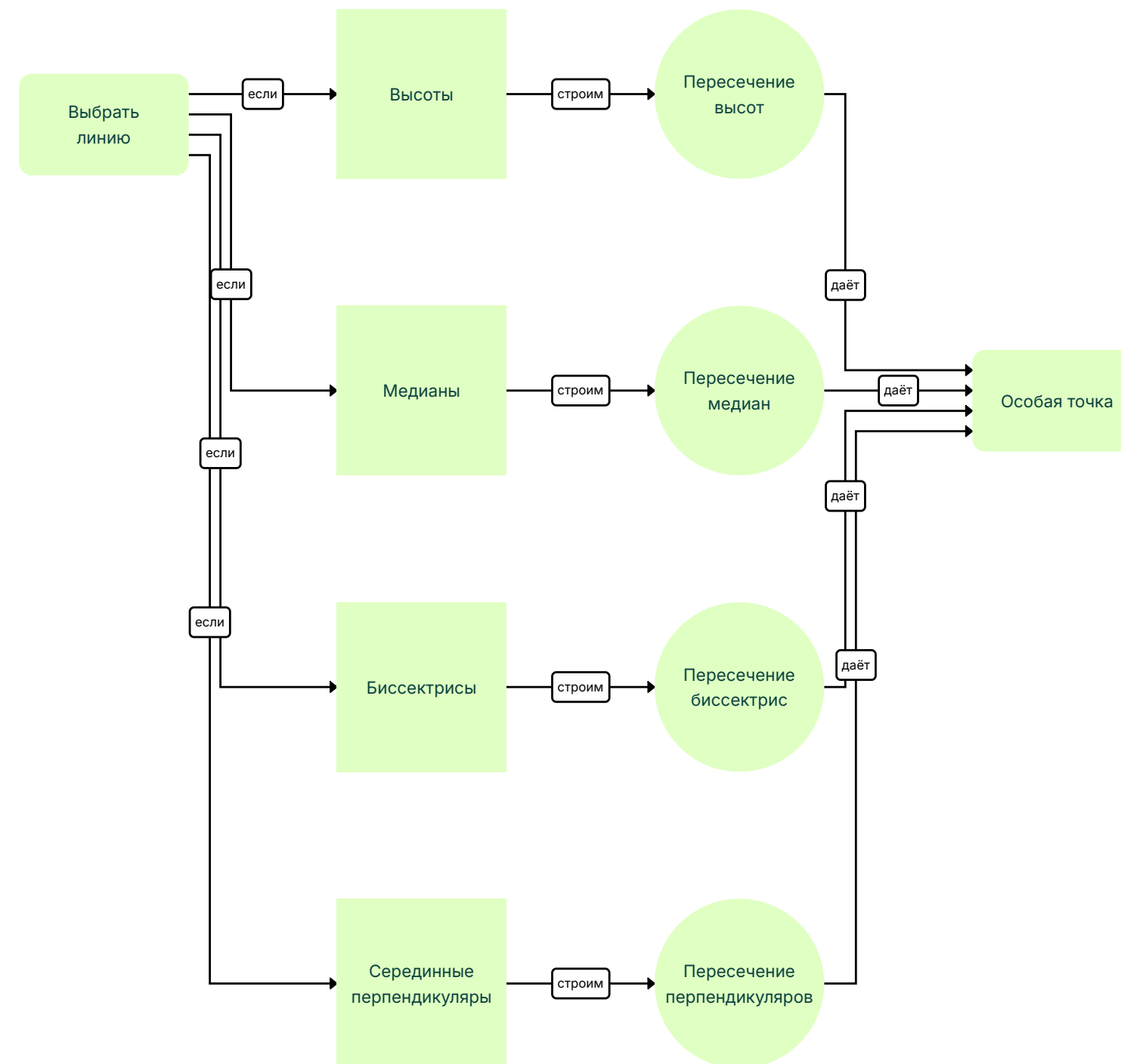
Так получают три высоты треугольника. Они могут пересекаться внутри фигуры, на её вершине или вне треугольника.

Шаг 3. Общая точка

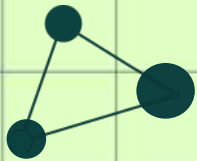
Точка пересечения высот называется ортоцентром. Её положение зависит от вида треугольника: остроугольного, прямоугольного или тупоугольного.

Как находят замечательные точки

Схема показывает, какие линии строят в треугольнике и какую особую точку они задают.

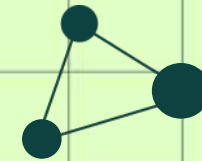


Другие замечательные точки треугольника



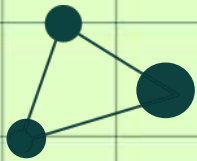
Точка Нагеля

Она появляется в задачах о невписанных окружностях и их касаниях со сторонами треугольника. Эта точка связана с более тонкими построениями, чем основные четыре центра.



Точка Ферма

Эта точка выбирается так, чтобы сумма расстояний до вершин была наименьшей. Её рассматривают в задачах повышенной сложности, где важны кратчайшие пути и сравнение расстояний.



Что изучают в школе

В 9 классе чаще всего работают с центром тяжести, инцентром, центром описанной окружности и ортоцентром. Они легче строятся и сразу опираются на знакомые свойства треугольника.

Как положение точек зависит от вида треугольника

● Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике все четыре главные точки совпадают в одном месте. Это происходит потому, что у него одинаковые стороны, углы и оси симметрии, которые связывают все построения.

● Равнобедренный треугольник

В равнобедренном треугольнике некоторые точки лежат на оси симметрии. Она помогает увидеть, как особые линии делят фигуру на две одинаковые части и упрощают построения.

● Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, а ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла. Это удобно запомнить как два характерных признака.



Где располагаются главные точки

Точка	Положение	Свойство
Инцентр	Внутри	Равны расстояния до сторон
Центр тяжести	Внутри	Делит медианы 2:1
Центр описанной окружности	Внутри/на стороне/вне	Равны расстояния до вершин
Ортоцентр	Внутри/в вершине/вне	Пересечение высот

Таблица помогает быстро сравнить положение четырёх главных точек и понять, какое свойство определяет каждую из них.

Положение точки зависит от типа треугольника, а её смысл связан с конкретными линиями: сторонами, вершинами, медианами или высотами.

Сравнение четырёх замечательных точек



Диаграмма показывает, что у всех четырёх точек есть общее число определяющих линий, но каждая из них выделяется своим главным свойством.

Удобнее всего запоминать точки по их признаку: стороны, вершины, равновесие или перпендикуляры. Так они не смешиваются между собой.



Обобщение свойств замечательных точек треугольника

Координаты и вычисления



Центр тяжести

В координатах его находят как среднее арифметическое координат всех трёх вершин. Это делает вычисления быстрыми и показывает, почему точка связана с равновесием фигуры.



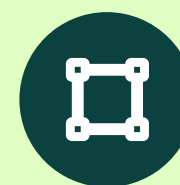
Инцентр

Для инцентра используют длины сторон и взвешенное среднее. Чем длиннее сторона, тем сильнее она влияет на положение точки, потому что расстояния до сторон должны быть одинаковыми.



Центр окружности

Центр описанной окружности получают как точку пересечения серединных перпендикуляров. После этого легко проверить, что расстояния до всех вершин одинаковы, а значит окружность проходит через них.

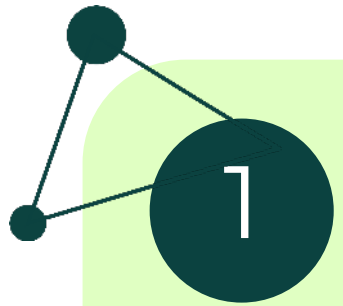


Ортоцентр

Ортоцентр находят как пересечение высот. В координатной форме это часто связано с уравнениями прямых, перпендикулярных сторонам треугольника, поэтому точку можно вычислить алгебраически.

Построения циркулем и линейкой

17



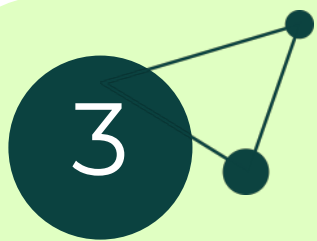
Найдите середины сторон

Сначала отмечают середины сторон, потому что именно через них проходят медианы и серединные перпендикуляры. Это создаёт основу для поиска центра тяжести и центра описанной окружности.



Постройте биссектрисы

Из вершин проводят дуги одинакового радиуса, чтобы получить точки на сторонах и построить биссектрисы. Их пересечение сразу указывает на инцентр и центр вписанной окружности.



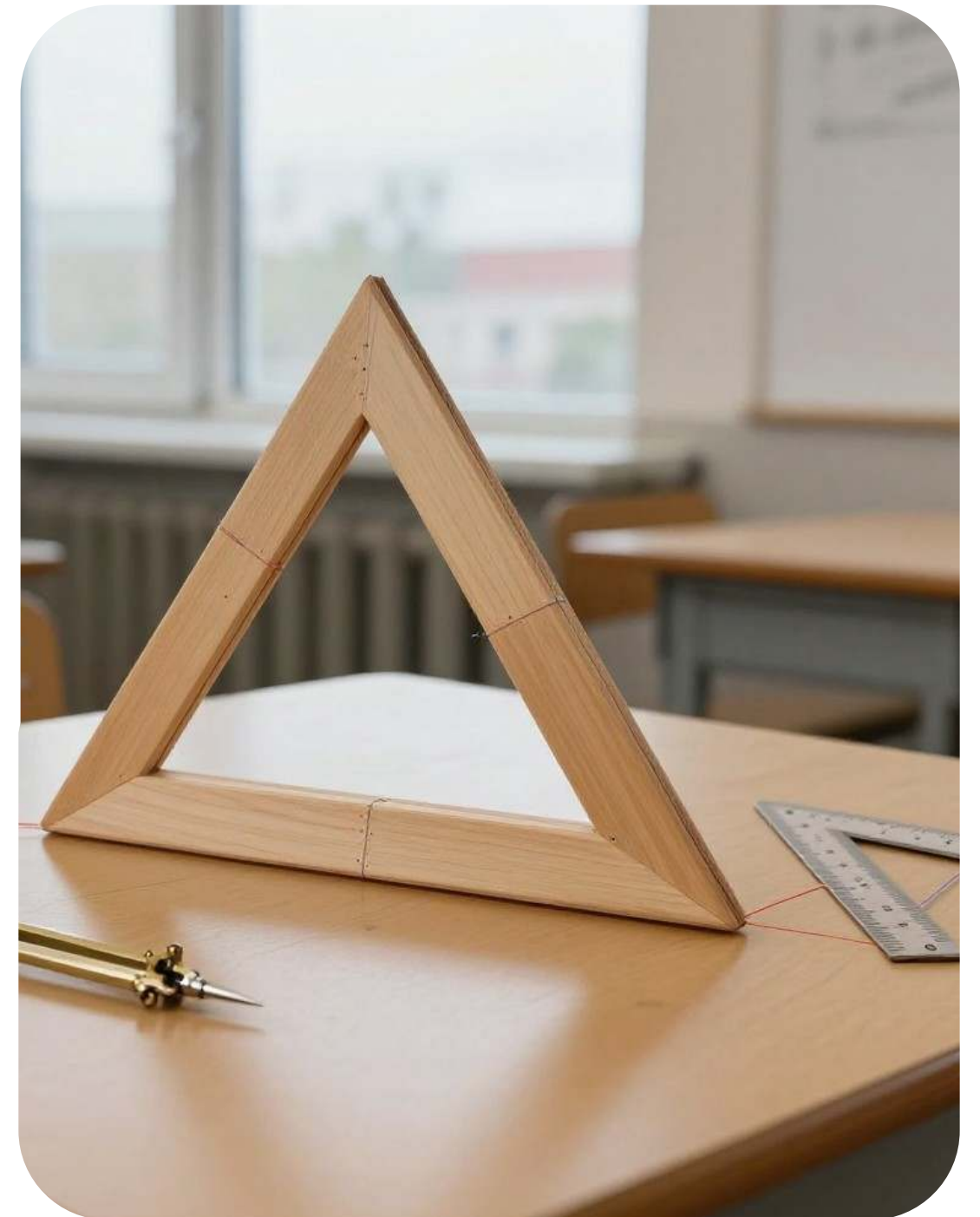
Проведите перпендикуляры

Через середины сторон строят перпендикуляры к этим сторонам. Их пересечение даёт центр описанной окружности, потому что он одинаково удалён от всех вершин треугольника.



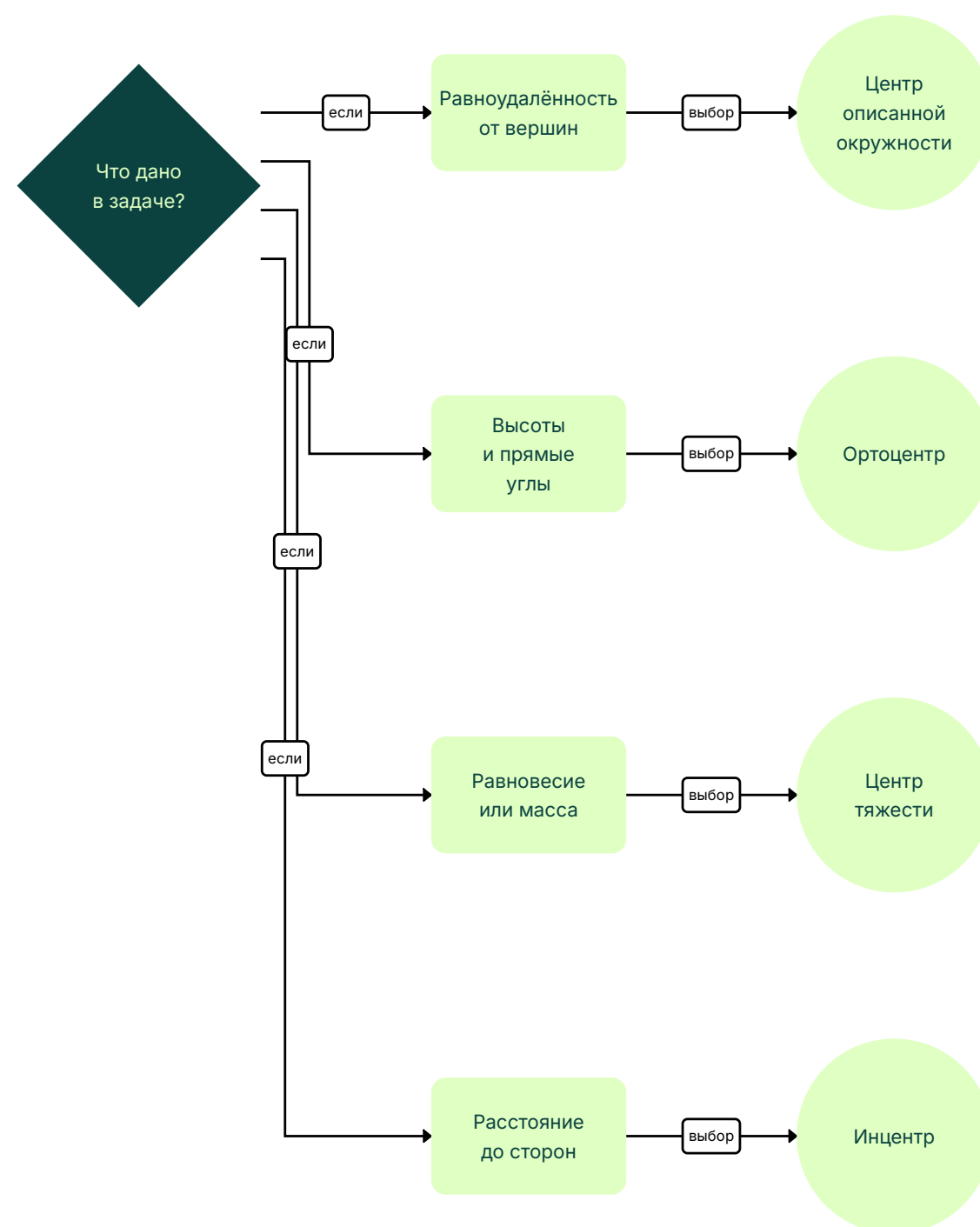
Опустите высоты

Из каждой вершины проводят прямую под прямым углом к противоположной стороне. Общая точка высот — ортоцентр, и именно его положение меняется в зависимости от вида треугольника.



Как выбрать нужную точку в задаче

Алгоритм помогает связать условие задачи с нужной замечательной точкой и нужными линиями.

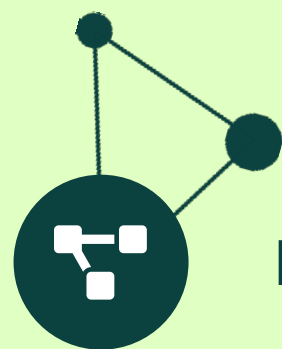


Практические задачи с замечательными точками



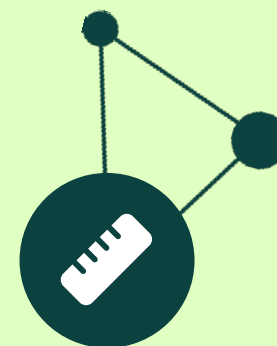
Построение окружностей

Замечательные точки помогают строить вписанную и описанную окружности без лишних вычислений. Достаточно найти инцентр или центр описанной окружности и аккуратно провести окружность через нужные точки.



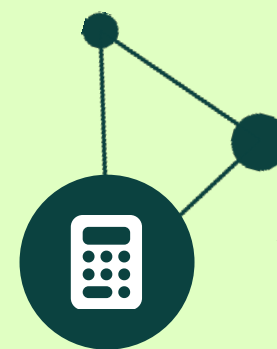
Пересечение линий

В задачах на доказательство важно показать, что три линии сходятся в одной точке. Для этого используют свойства медиан, биссектрис, серединных перпендикуляров и высот.



Нахождение радиусов

Когда известны стороны или высоты, можно находить радиусы вписанной и описанной окружностей. Здесь особенно полезны свойства инцентра и центра окружности, связанные с расстояниями.



Упрощение решений

Эти точки сокращают количество вычислений и делают доказательства более наглядными. Вместо длинных рассуждений можно опереться на одно ключевое свойство и быстро получить ответ.



Треугольник раскрывает свои центры

Замечательные точки показывают, что даже у простой фигуры есть внутренний порядок. Зная четыре главных центра и линии, которые к ним ведут, легко решать задачи точнее и увереннее.