

Тригонометрические функции острого угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс помогают читать геометрию треугольника.



Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

На уроке мы увидим, как по острым углам и сторонам прямоугольного треугольника находят неизвестные величины. Эти функции удобны не только в задачах, но и в измерениях на практике.

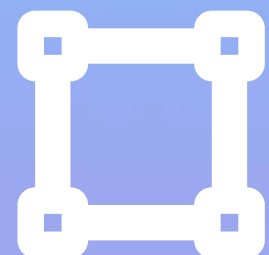


Ключевые элементы треугольника



Прямой угол

В прямоугольном треугольнике один угол всегда равен 90° . Именно он задаёт особую форму фигуры и позволяет выделить гипотенузу и два катета.



Гипотенуза

Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой. Она всегда длиннее каждого из катетов и остаётся одной и той же, какой бы острый угол мы ни выбрали.



Катеты

Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами. Они лежат рядом с прямым углом и участвуют в формулах по-разному, в зависимости от выбранного острого угла.



Противолежащий катет

Если смотреть от выбранного острого угла, сторона напротив него становится противолежащим катетом. Именно её отношение к другим сторонам используется в синусе и тангенсе.



Прилежащий катет

Сторона, которая прилегает к выбранному углу, но не является гипотенузой, называется прилежащим катетом. Она нужна в формулах косинуса, тангенса и котангенса.

Определения функций

Каждая тригонометрическая функция связывает стороны одного прямоугольного треугольника по-разному.

Функция	Формула	Смысл
$\sin \alpha$	a / c	противолежащий / гипотенуза
$\cos \alpha$	b / c	прилежащий / гипотенуза
$\operatorname{tg} \alpha$	a / b	противолежащий / прилежащий
$\operatorname{ctg} \alpha$	b / a	прилежащий / противолежащий

Синус и косинус сравнивают катет с гипотенузой, а тангенс и котангенс — два катета между собой.

Определения тригонометрических функций острого угла, курс алгебры 8 класса

Как меняются названия сторон

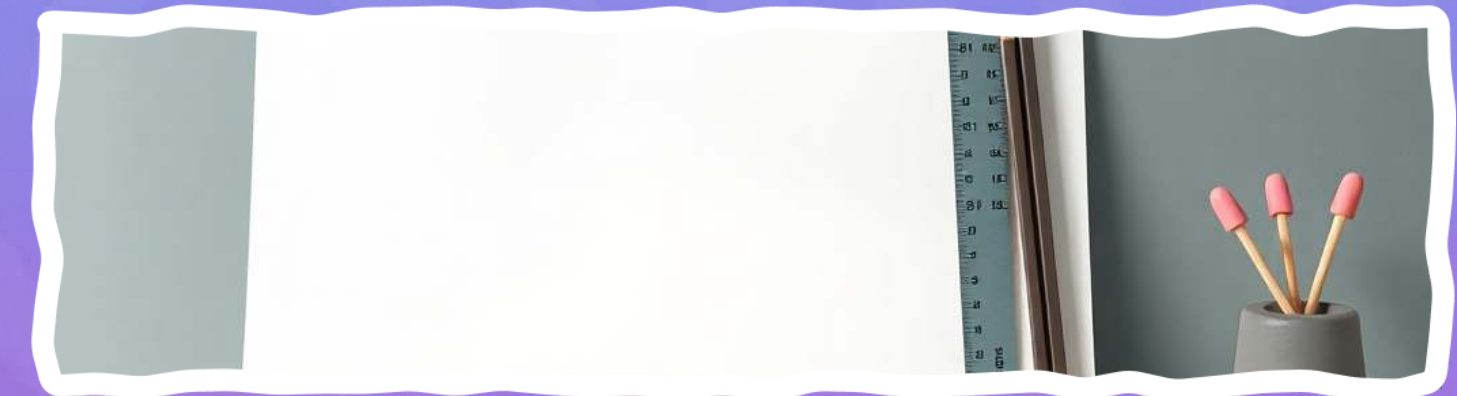
Один треугольник — два взгляда

Возьмите один и тот же прямоугольный треугольник и посмотрите на него с двух острых углов. Названия сторон сразу меняются: то, что было прилежащим катетом, может стать противолежащим. Поэтому сначала всегда выбирают угол, а потом подписывают стороны.



Подписи на чертеже

На рисунке удобно выделить прямой угол, а затем отметить стороны разными цветами. Стрелки и короткие подписи помогают увидеть, какая линия лежит напротив угла, а какая подходит к нему вплотную.

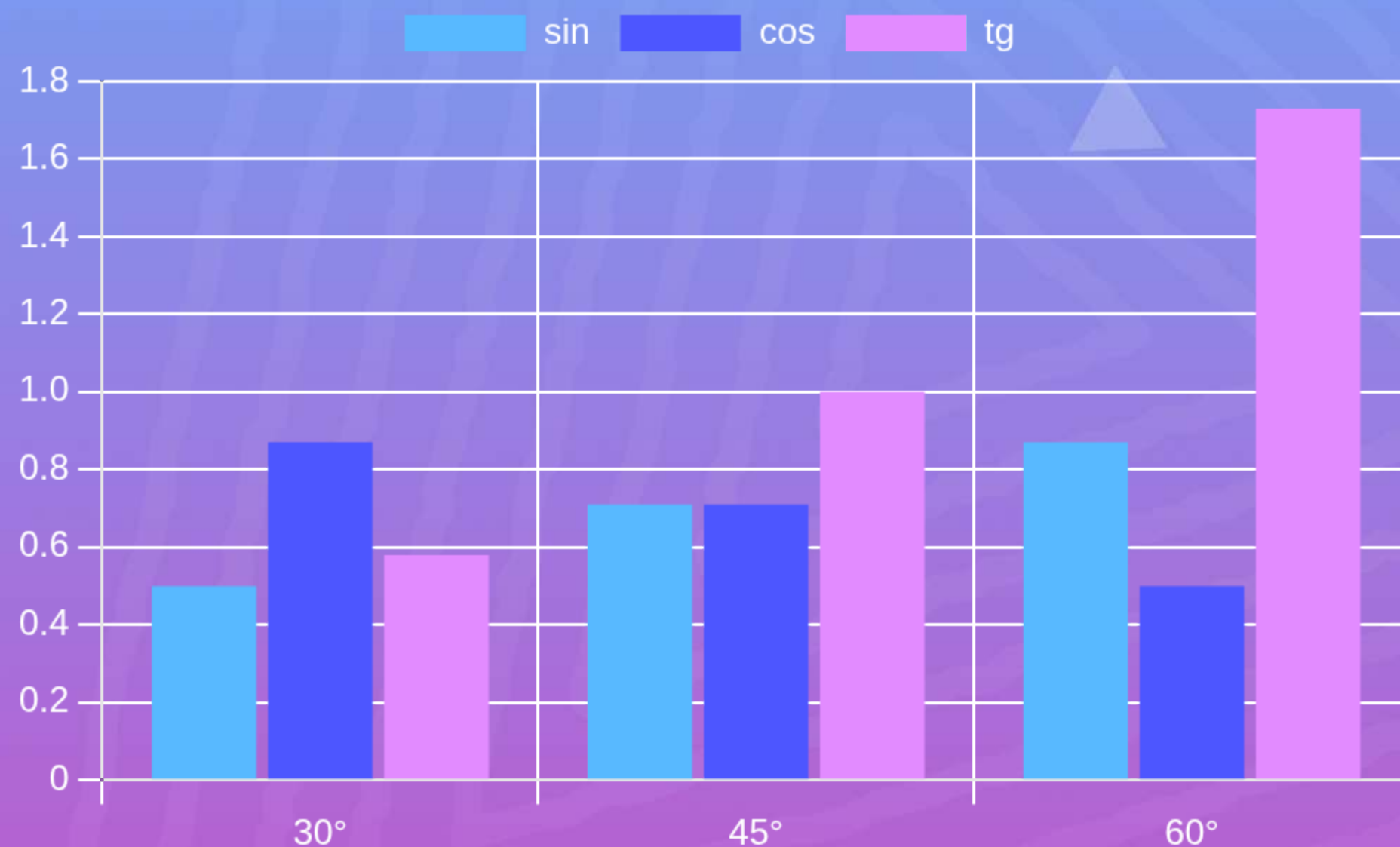


Почему это важно

Без точного выбора угла легко перепутать формулу и получить неверный ответ. Поэтому в решении сначала рассматривают геометрию треугольника, а уже потом записывают отношение сторон для нужной функции.



Значения функций для углов 30° , 45° и 60°



Стандартные значения тригонометрических функций для углов 30° , 45° и 60°

Эти значения удобно запоминать как опорные: они часто встречаются в задачах и помогают быстро проверять вычисления.

При росте угла от 30° к 60° синус увеличивается, а косинус уменьшается; тангенс растёт особенно заметно.

Свойства синуса и косинуса острого угла

01

Положительные значения

Для любого острого угла синус и косинус всегда больше нуля, потому что в прямоугольном треугольнике все стороны положительны. Кроме того, оба значения меньше 1.

02

Главная связь

Если взять один и тот же угол, то сумма квадратов синуса и косинуса равна 1. Это соотношение помогает проверять вычисления и замечать ошибку ещё до записи ответа.

03

Связь двух углов

В прямоугольном треугольнике два острых угла дополняют друг друга до 90° . Поэтому синус одного из них равен косинусу другого, и наоборот.

04

Проверка решения

Если получилось значение больше 1 для синуса или косинуса, ответ точно неверный. Такие простые ограничения помогают быстро оценить разумность результата.

Тангенс и котангенс как отношения сторон

Тангенс угла

Тангенс показывает отношение противолежащего катета к прилежащему. Если противолежащий катет больше, значение тангенса тоже становится больше.

Котангенс угла

Котангенс выражает обратное отношение: прилежащий катет делят на противолежащий. Поэтому при росте одного значения второе обычно уменьшается.

Изменение при росте угла

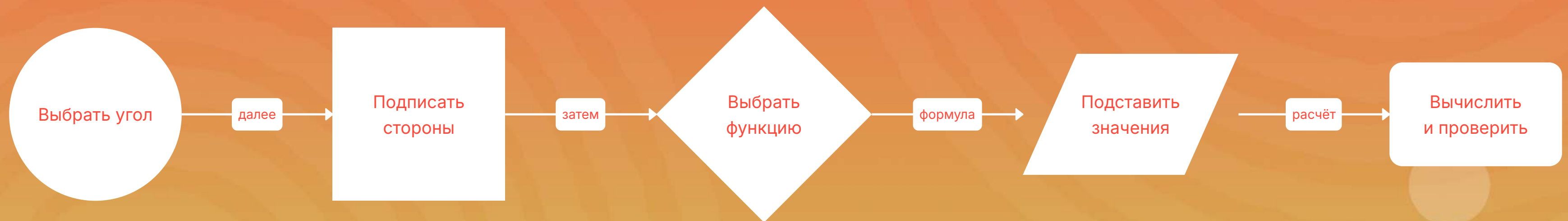
Когда острый угол увеличивается от 0° к 90° , тангенс быстро возрастает, а котангенс убывает. Это хорошо видно на чертежах с разным наклоном.

Практический смысл

Эти функции особенно полезны, если известны оба катета или нужно определить наклон линии, лестницы, крыши или ската.

Как найти значение тригонометрической функции

Последовательность действий при работе с прямоугольным треугольником



Теорема Пифагора в тригонометрических задачах

01

Найти неизвестную сторону

Если в прямоугольном треугольнике известны две стороны, сначала применяют теорему Пифагора. Она помогает получить третью сторону, необходимую для вычисления синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

02

Связать геометрию и функции

После нахождения стороны можно подставить её в нужную формулу и получить значение функции. Так одна и та же задача соединяет несколько математических идей.

03

Проверить ответ

Теорема Пифагора полезна не только для решения, но и для проверки. Если стороны не удовлетворяют формуле $a^2 + b^2 = c^2$, значит, в вычислениях допущена ошибка.

04

Удобство в задачах

Такой подход особенно полезен в упражнениях про высоту, расстояние и наклон. Он позволяет сначала восстановить чертёж, а потом уверенно перейти к тригонометрической формуле.

Опорные значения для углов 30°, 45° и 60°

Угол	sin	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Эти значения удобно запоминать и использовать как проверочные при вычислениях.

При увеличении угла от 30° к 60° синус растёт, косинус убывает, а тангенс увеличивается.

Стандартные значения тригонометрических функций острых углов из школьного курса алгебры.

Равнобедренный прямоугольный треугольник

01

Равные катеты

Если два катета в прямоугольном треугольнике равны, то фигура становится симметричной относительно биссектрисы прямого угла. Такая симметрия сразу подсказывает, что оба острых угла тоже равны.

02

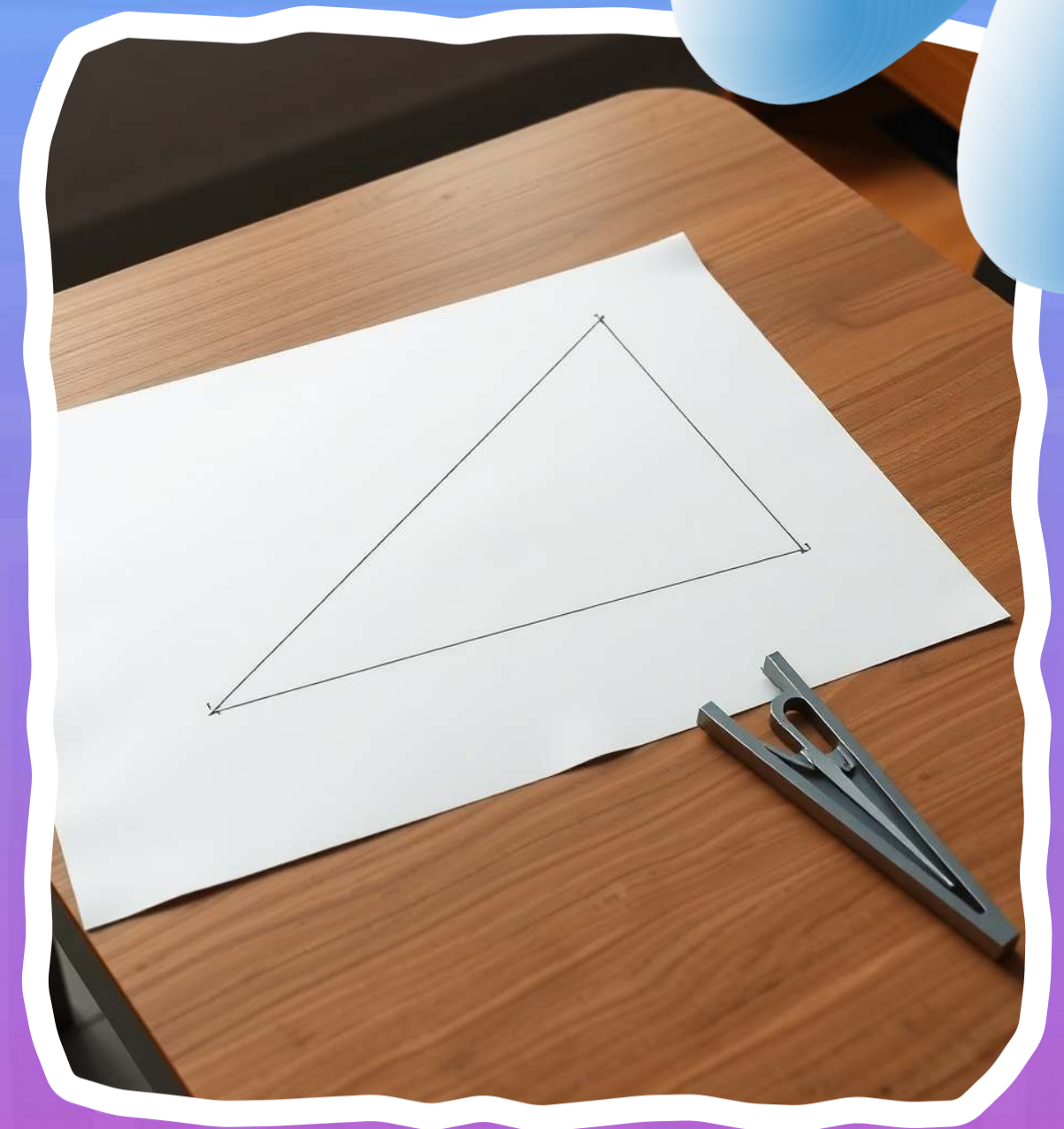
Углы по 45°

Сумма двух острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° , поэтому при равных катетах каждый из них составляет по 45° . Это один из самых удобных случаев для запоминания.

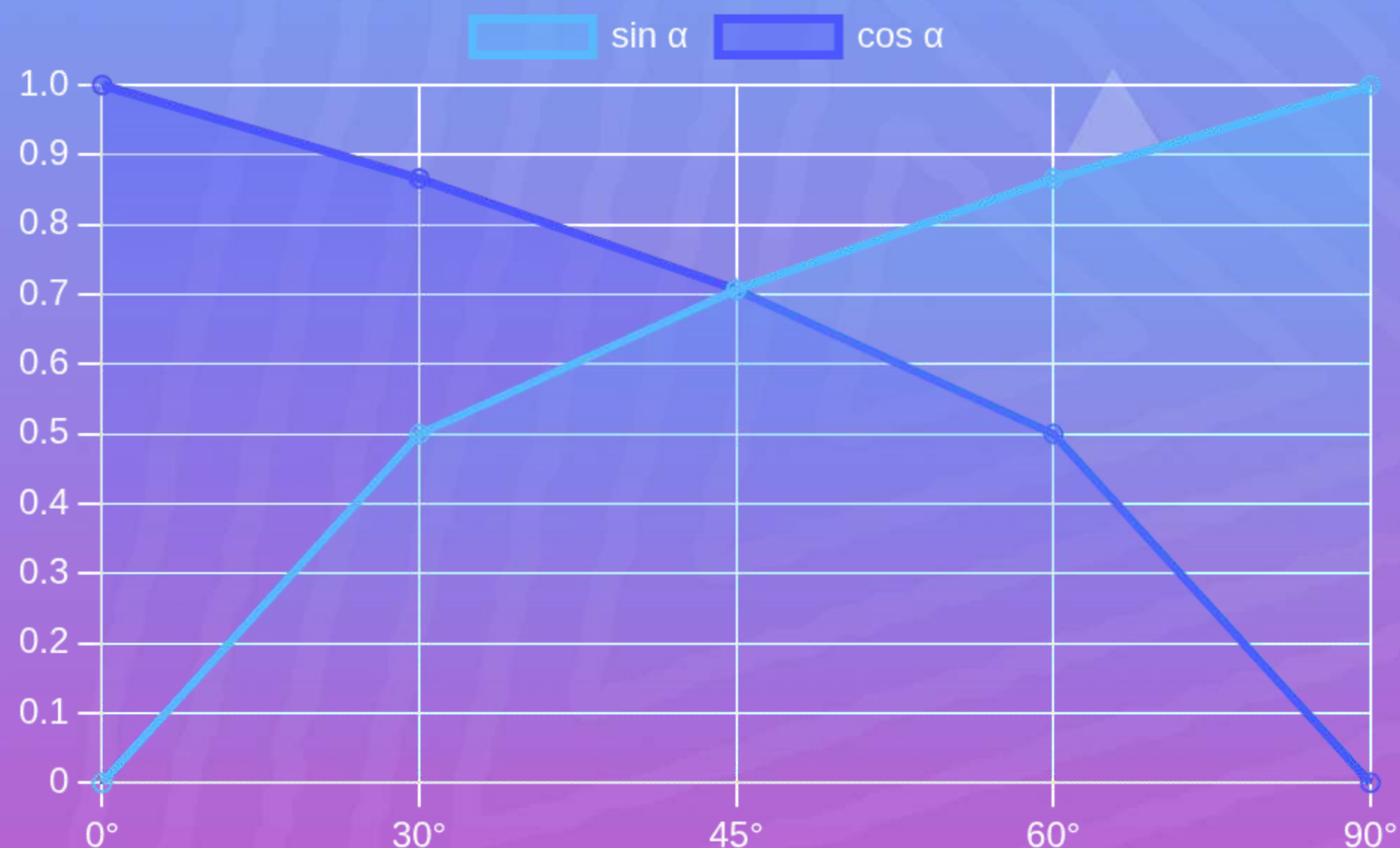
03

Значения функций

Для угла 45° синус и косинус совпадают и равны $\sqrt{2}/2$. Этот результат помогает быстро решать задачи и проверять себя, не выполняя лишних вычислений.



Как меняются функции при увеличении угла

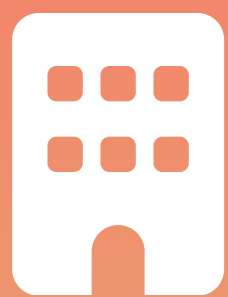


Стандартные значения тригонометрических функций острых углов; учебный пример для 0° – 90° .

На графике видно, что синус и косинус изменяются в противоположных направлениях, а при 45° их значения совпадают.

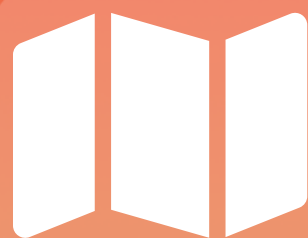
Рост угла делает синус больше, а косинус меньше; это помогает быстро оценивать, какая сторона треугольника окажется большей.

Где применяются тригонометрические функции



Строительство

Тригонометрия помогает рассчитывать высоту стен, угол наклона крыши и длину лестницы. Такие вычисления нужны, чтобы конструкции были удобными, прочными и безопасными.



Геодезия

Специалисты измеряют расстояния и высоты на местности, когда прямой доступ к объекту затруднён. Тригонометрические функции позволяют получать точные результаты без подъёма к самому объекту.



Навигация

При движении по карте и в море важно понимать направление и угол поворота. Тригонометрия помогает связать маршрут, расстояние и нужный курс движения.



Физика

В физике тригонометрические функции применяют при разложении силы на составляющие, изучении волн и движении по наклонной плоскости. Это облегчает описание реальных процессов.



Жизненные задачи

На уроках часто встречаются практические сюжеты: высота дерева, ширина реки, горка или башня. В таких задачах треугольник превращает сложную ситуацию в понятный расчёт.

Типичные ошибки при работе с функциями острого угла

Перед вычислением важно правильно подписать стороны и выбрать функцию по выбранному углу.

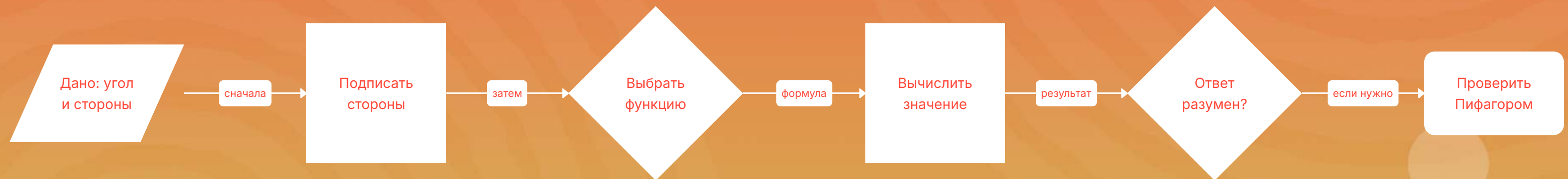
Ошибка	Что путают	Как избежать
Катеты	Противолежащий и прилежащий	Сначала отметить угол
Гипотенуза	Не самую длинную сторону	Проверить длину
Формула	Неверный выбор функции	Сверить стороны и угол

Если сначала разметить треугольник, большинство ошибок исчезает ещё до вычислений.

Типичные ошибки при решении школьных задач по тригонометрии.

Проверка решения тригонометрической задачи

Последовательность помогает не перепутать стороны и оценить ответ по смыслу.



Связь между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом

01

Тангенс через $\sin$ и $\cos$

Тангенс одного и того же острого угла можно найти по формуле $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Это удобно, когда известны значения синуса и косинуса, а тангенс ещё не посчитан.

02

Котангенс как обратное отношение

Котангенс выражается формулой $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$. Он показывает обратное соотношение катетов и помогает быстро переходить от одной записи к другой без нового чертежа.

03

Связь между функциями

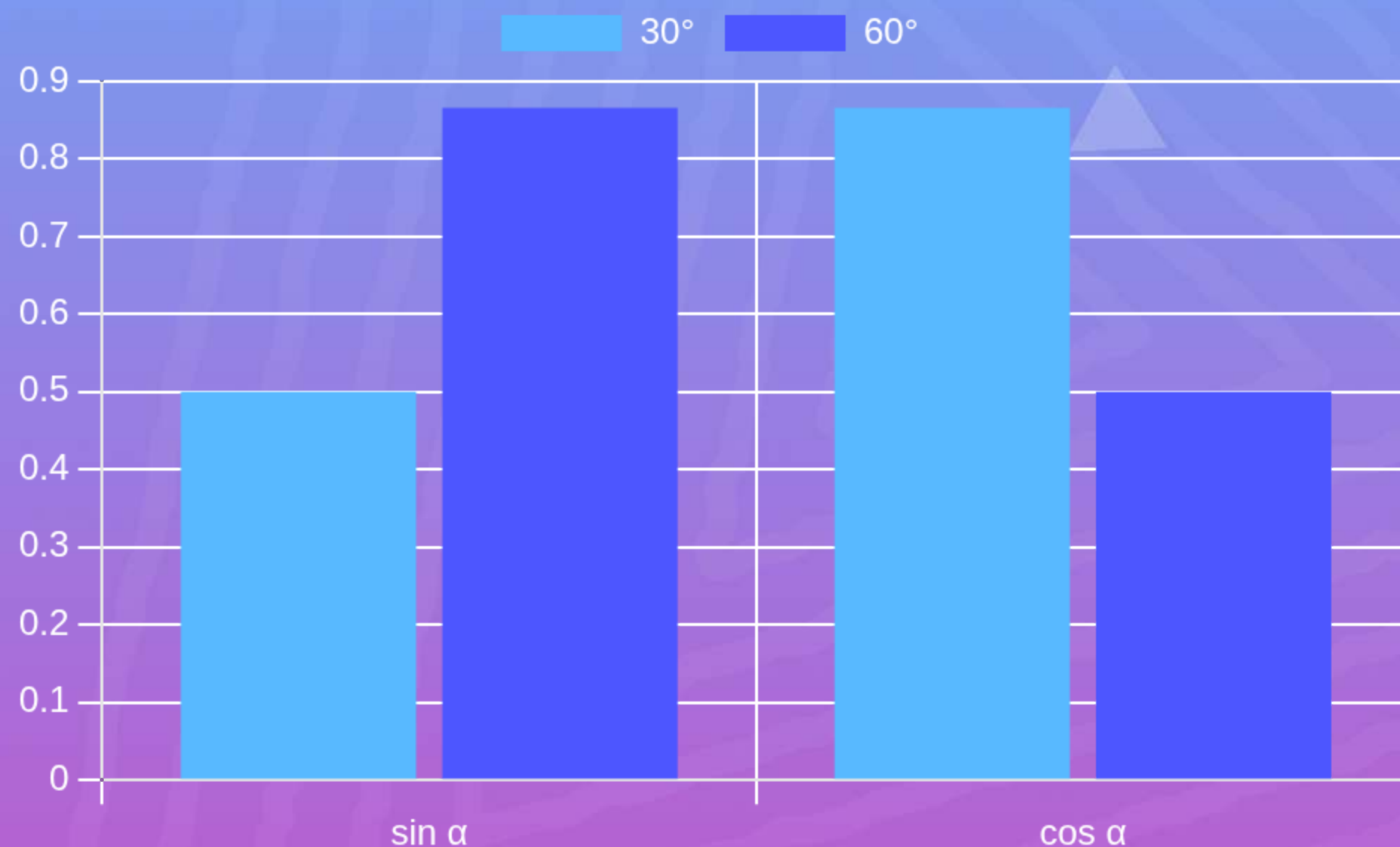
Если известны синус и косинус, можно получить тангенс и котангенс. Поэтому функции не нужно запоминать как отдельные правила: они связаны между собой через одни и те же стороны треугольника.

04

Проверка вычислений

Связи между функциями полезны для самопроверки. Если результат не согласуется с формулами, значит, где-то перепутаны стороны, угол или порядок действий при вычислении.

Сравнение двух острых углов одного треугольника



Стандартные значения для углов 30° и 60° из школьного курса алгебры.

Для двух дополнительных углов одного прямоугольного треугольника значения синуса и косинуса как будто меняются местами, сохраняя связь с одной и той же фигурой.

Чем больше острый угол, тем больше его синус и тем меньше косинус; это удобно для сравнения углов без дополнительных вычислений.

Пример из жизни: измерение высоты объекта

Высота дерева у дороги

Ученик стоит на расстоянии от дерева и смотрит на верхушку под известным углом. По тангенсу можно найти, насколько высоко находится верхушка над уровнем глаз, а затем добавить рост наблюдателя. Получается понятная задача без подъёма на дерево.



Мачта у берега

Если известны расстояние до мачты и угол подъёма взгляда, тригонометрия помогает определить её высоту. Такой приём особенно полезен, когда измерить объект напрямую трудно или небезопасно. Иногда после этого проверяют ответ по теореме Пифагора.



Горка и лестница

В школьных задачах часто рисуют горку, лестницу или наклонную крышу. Линия взгляда, основание и высота образуют прямоугольный треугольник, поэтому нужную сторону можно найти через тангенс, синус или косинус.



Что важно запомнить о тригонометрии

Тригонометрические функции связывают угол с отношениями сторон прямоугольного треугольника. Они помогают считать, сравнивать и проверять. Особенно полезно помнить значения для 30° , 45° и 60° .