

Первообразная и интеграл: от смысла к формулам



От смысла первообразной к базовым формулам и проверке
ответов.

Производная и интеграл: связь понятий



Производная описывает, как функция меняется в точке, а первообразная позволяет восстановить саму функцию по этому изменению. Поэтому интеграл решает обратные задачи и задаёт целое семейство ответов.

Если известна скорость движения, можно восстановить пройденный путь. Так же по производной находят исходную функцию: изменение известно, значит можно восстановить накопленный результат.

Идея связи скорости и пути в кинематике

1

изменение можно обратить
в восстановление функции

Если производная функции F совпадает с f , то F является первообразной f . При этом одной и той же функции f соответствуют бесконечно многие первообразные.



у одной функции может быть бесконечно много первообразных

Определение первообразной

Запись $\int f(x)dx = F(x)+C$ показывает, что интеграл задаёт не один ответ, а всё семейство первообразных. Константа C отвечает за сдвиг по вертикали.

C

задаёт произвольный
вертикальный сдвиг результата

Определение неопределённого интеграла

Графическая интуиция



Наклон графика

Наклон в каждой точке задаётся производной. Если известен этот наклон, можно восстановить общий вид кривой, хотя её положение на плоскости ещё не определено.

Семейство кривых

Одно и то же изменение допускает несколько графиков, отличающихся только высотой. Поэтому семейство первообразных визуально выглядит как одинаковые кривые, сдвинутые вверх или вниз.

Сборка по шагам

Первообразная собирает локальные изменения в единую функцию. Это похоже на движение по следу: по маленьким шагам восстанавливается вся траектория.

Проверка по смыслу

Графическая проверка полезна как интуитивный контроль: если функция возрастает там, где производная положительна, и убывает там, где она отрицательна, запись первообразной выглядит правдоподобно.

Почему появляется C

1 Одинаковая производная

Сравните две первообразные одной и той же функции. Их производные совпадают, значит разность самих функций не меняется и остаётся постоянной величиной.

2 Почему добавляют C

Именно поэтому в записи неопределённого интеграла добавляют $+C$. Эта константа объединяет все возможные вертикальные сдвиги в одном выражении.

3 Полный ответ

Если забыть константу, ответ будет неполным, хотя формально верным по форме. В задачах на первообразную важно показывать всё семейство решений, а не только один представитель.

Линейность и множитель

Сумма под знаком

Сумму функций можно интегрировать по частям: сначала каждое слагаемое отдельно, затем результаты складываются. Это особенно удобно для многочленов и выражений, составленных из простых слагаемых.

Упрощение вычислений

Линейность позволяет не усложнять вычисления без необходимости. Вместо поиска общей формулы проще разложить выражение на знакомые части и обработать каждую по стандартному правилу.

Вынос множителя

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. Если перед функцией стоит число, оно сохраняется в ответе и не мешает применять известную формулу.

Практическая польза

Эта идея работает не только в школьных примерах. Она лежит в основе всех аккуратных вычислений, где сложный интеграл разбивают на более простые компоненты.

Как работает обратная операция

01.

Распознать производную

Если подынтегральная функция уже является производной известной функции, интегрирование сразу возвращает исходное выражение с точностью до константы.

02.

Восстановить функцию

Затем применяют обратное правило: интеграл от производной восстанавливает функцию. Это сокращает вычисление до одного узнавания формы.

03.

Проверить результат

После этого добавляют $+C$ и при необходимости проверяют ответ производной. Так сохраняется и точность, и полнота результата.

Степенная формула

Степенная формула – основа большинства первых вычислений неопределённого интеграла.

Формула для степенной функции охватывает и постоянную 1, поэтому служит базой для многих вычислений.

Выражение	Интеграл	Комментарий
x^n	$x^{(n+1)/(n+1)}+C$	$n \neq -1$
1	$x+C$	частный случай $n=0$
x^0	$x+C$	так как $x^0=1$

Правило интегрирования степенной функции из школьного курса математики

Формула для логарифма работает только вне нуля и помогает запомнить связь между делением на x и производной логарифма.

Правило: $(\ln |x|)' = 1/x$ при $x \neq 0$

0

нужно исключить из области определения

Показательные функции

Функция	Первообразная	Условие
e^x	$e^x + C$	всегда
a^x	$a^x / \ln a + C$	$a > 0, a \neq 1$

Для показательных функций удобно держать рядом производную и первообразную: так легче видеть, какая формула сразу восстанавливает исходное выражение.

Экспонента сохраняет свой вид при интегрировании, а для основания a появляется деление на $\ln a$.

Таблица базовых формул неопределённого интеграла

Тригонометрические формулы

Синус и косинус образуют парную таблицу: производная одной функции сразу подсказывает первообразную другой.

Эти формулы удобно учить вместе: они взаимно проверяют друг друга через производную.

Функция	Первообразная	Проверка
$\sin x$	$-\cos x + C$	$(-\cos x)' = \sin x$
$\cos x$	$\sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$

Таблица базовых формул неопределённого интеграла

Здесь используется три слагаемых,
и каждое интегрируется отдельно, после
чего ответ легко проверить
дифференцированием.

*Интегрирование многочлена по правилам
неопределённого интеграла*

3

слагаемых дают ответ по правилу
линейности

В этом примере две разные формулы складываются в один ответ, а общая константа ставится только в конце.

Интегрирование суммы функций по правилам неопределённого интеграла

2

слагаемых удобно считать по отдельности

Знак перед синусом меняет результат, поэтому важно не механически копировать формулу, а внимательно отслеживать минус.

Интегрирование линейной комбинации функций по таблице первообразных

7

показывает, что постоянную часть тоже интегрируют

Короткая тренировка включает пять типовых случаев и помогает быстро вспомнить самые нужные формулы без лишних вычислений.

Подборка базовых задач на неопределённый интеграл

5

примеров достаточно для быстрой самопроверки

Три самые частые ошибки связаны с константой, формулой для $1/x$ и модулем в логарифме; проверка производной сразу их выявляет.

*Типовые ошибки при вычислении
неопределённых интегралов*

3

ошибки чаще всего встречаются
на базовых формулах

На этом этапе достаточно освоить четыре опоры: определение, таблицу формул, линейность и проверку через производную.

4

опоры уже дают уверенное решение базовых задач

Школьный уровень темы «Первообразная и неопределённый интеграл»

Первообразная как обратный ход

Первообразная показывает, как по производной восстановить исходную функцию, а неопределённый интеграл собирает все такие решения в одно семейство. Если каждый ответ проверять производной, базовые задачи становятся предсказуемыми и надёжными.