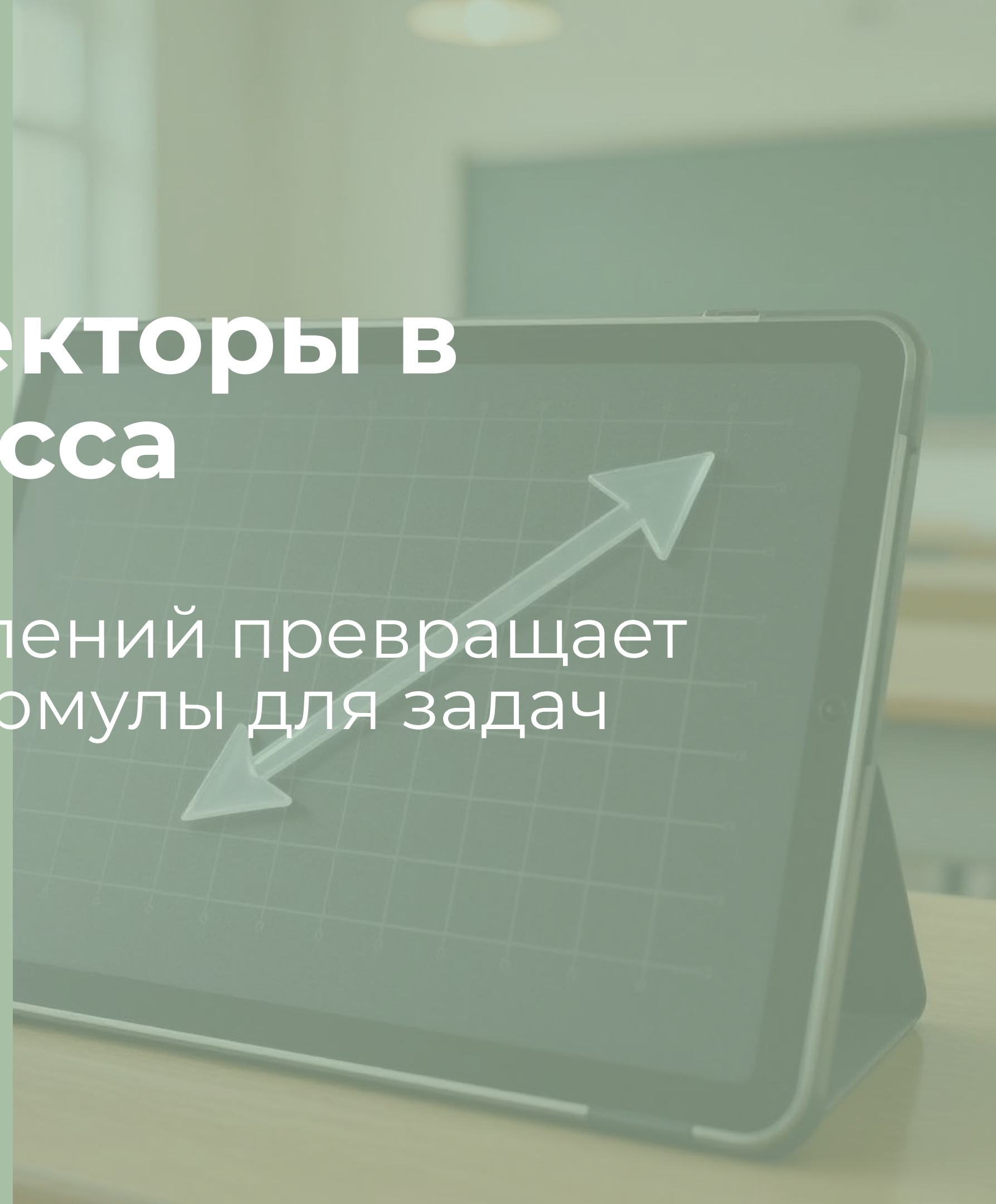
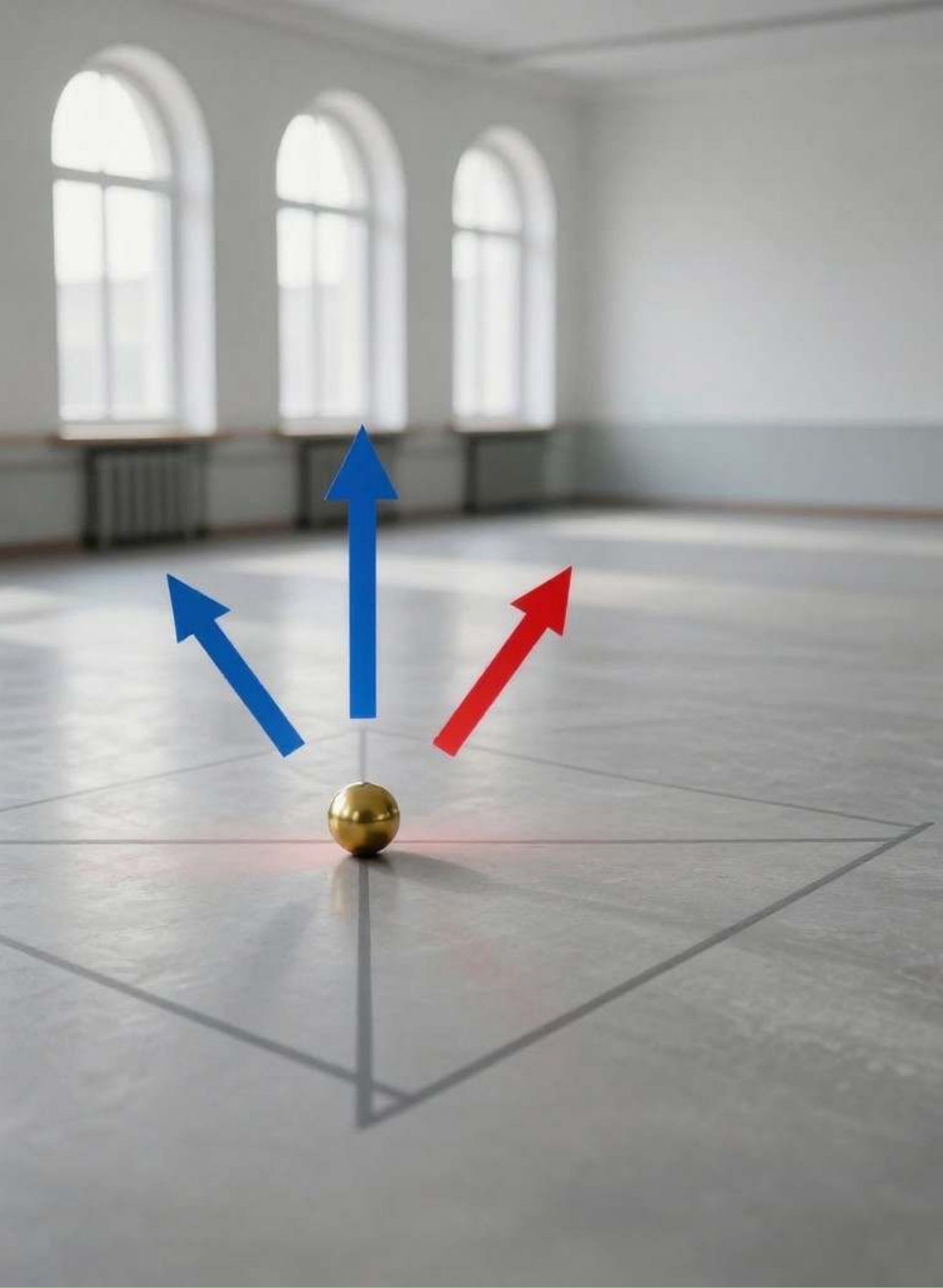


Координаты и векторы в геометрии 11 класса

Точность чисел и направлений превращает геометрию в удобные формулы для задач ОГЭ и ЕГЭ.





Как координаты и векторы помогают «считать» геометрию

Аналитическая геометрия соединяет алгебру и геометрию: фигуры описываются числами, а движения — векторной записью. Метод Декарта опирается на прямоугольную систему координат, а векторы помогают точно задавать перемещения, силы и направления в школьных задачах.

Система координат на плоскости

01

Прямоугольная система координат строится из двух перпендикулярных осей: Ox и Oy . Их пересечение — начало координат $O(0;0)$, от которого начинается отсчёт всех положений на плоскости.

02

Любую точку можно задать парой чисел $A(x;y)$: абсцисса x отвечает за положение по Ox , ордината y — за положение по Oy . Эти числа определяют, где точка находится относительно осей.

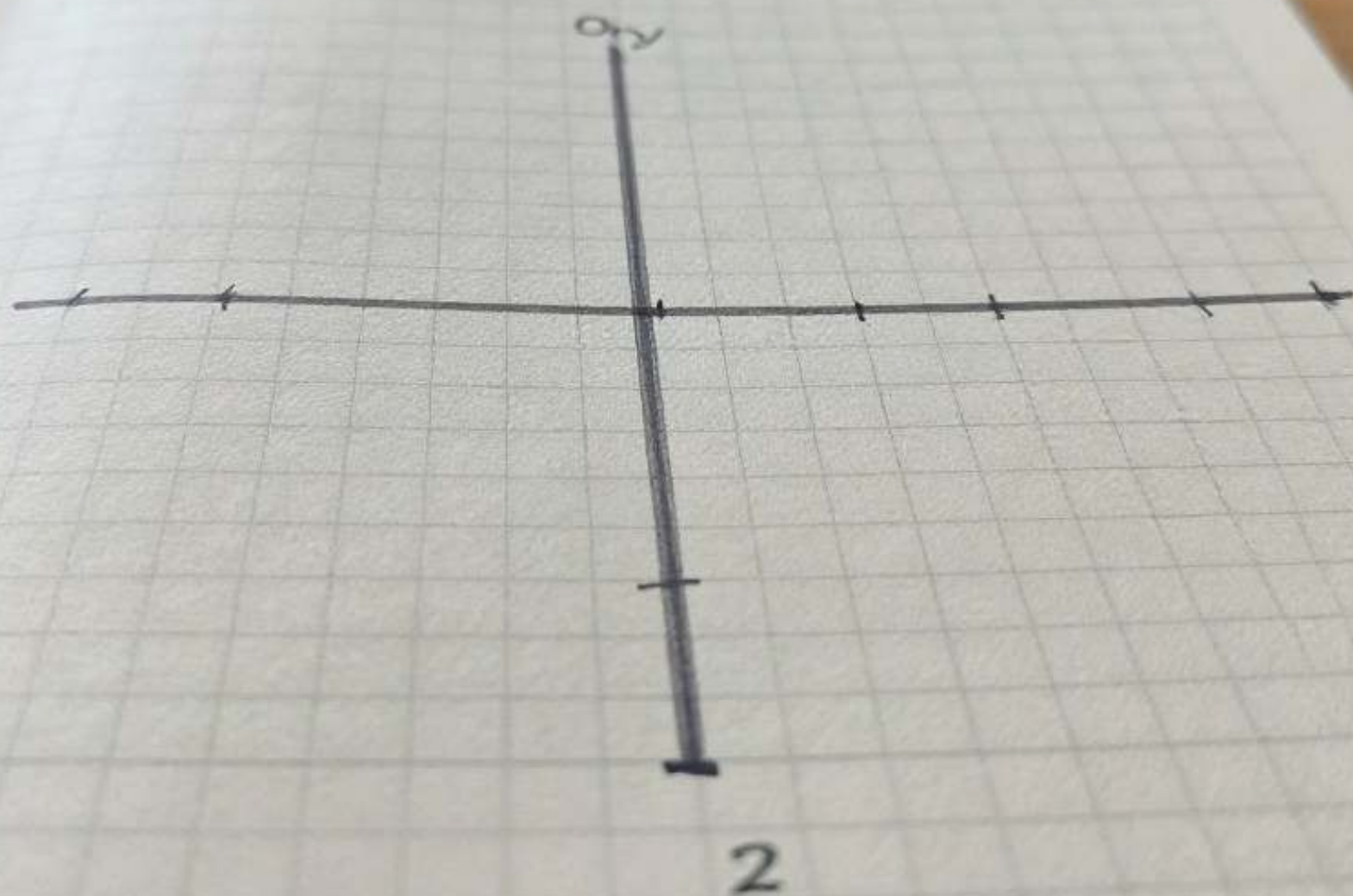
03

Знаки x и y показывают, в какой четверти расположена точка: I (+;+), II (-;+), III (-;-), IV (+;-). Это помогает быстро ориентироваться на координатной плоскости.

Как читаются координаты точки на чертеже

Точка $A(3;-2)$ означает: от начала координат нужно пройти 3 единицы вправо по оси Ox и затем 2 единицы вниз по оси Oy . Одна координата задаёт горизонтальный сдвиг, другая — вертикальный.

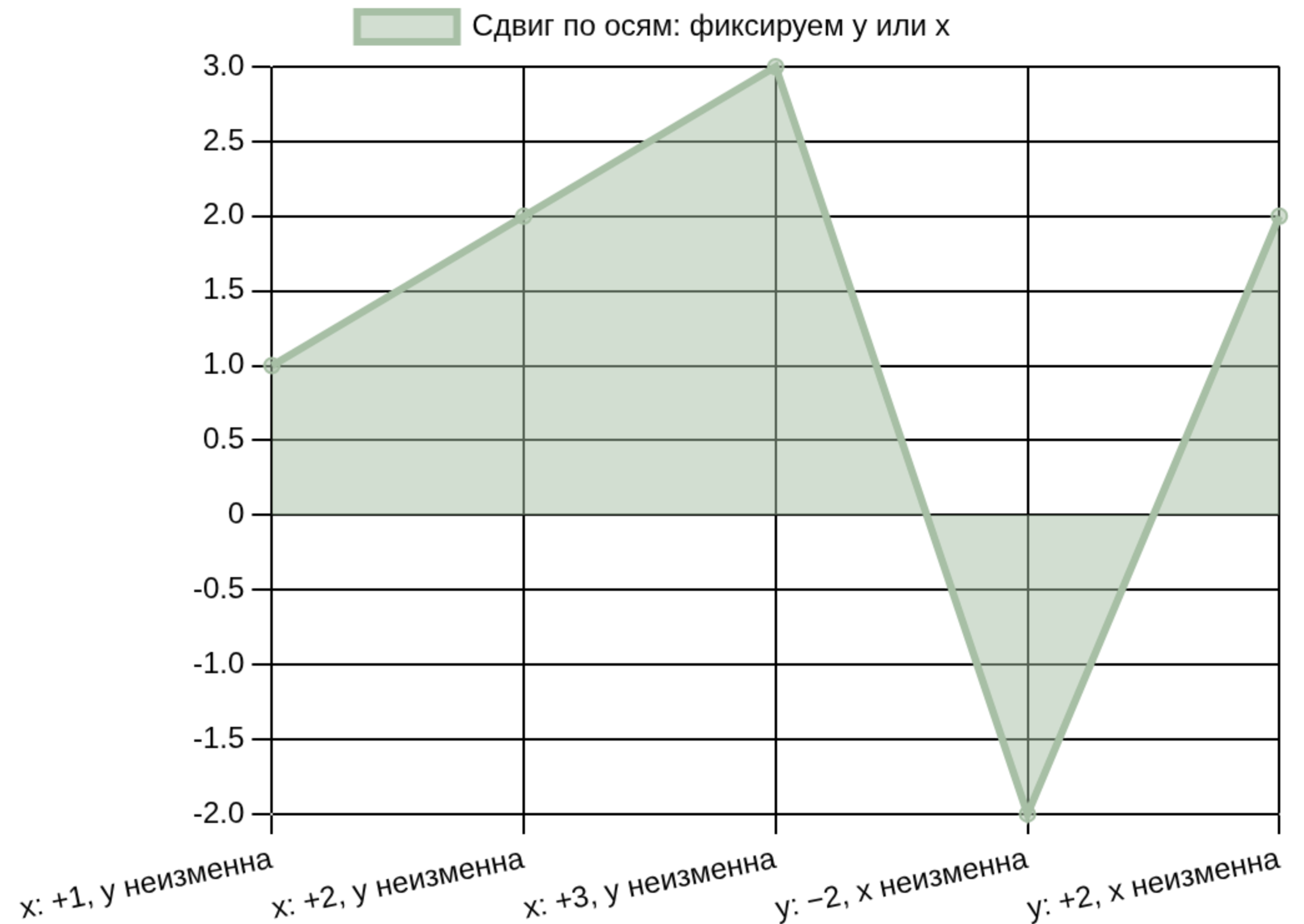
На чертеже координаты читают в определённом порядке: сначала абсциссу, затем ординату. Сетка визуально связывает числа с положением точки, поэтому по рисунку можно контролировать правильность построения и чтения.



Сдвиг точки по координатной плоскости

При горизонтальном переносе форма и размеры сохраняются: меняется только x , а расстояния до линий, задаваемых y , остаются теми же.

Диаграмма показывает два режима движения: параллельный перенос вдоль Ox при постоянном y и вертикальный сдвиг при неизменном x . Это упрощает чтение и проверку построений.



Собственное учебное моделирование по заданным шагам: x меняется на 1–3, y — при фиксированном x .

2

Если точки лежат на одной горизонтали или одной вертикали, формула заметно упрощается за счёт одного из разностей

Это свойство помогает быстрее находить длины отрезков на координатной плоскости и аккуратно избегать лишних вычислений по общей формуле.

Основные формулы координатного метода

Подбор правильной формулы — половина успеха: координаты середины, длина отрезка, координаты вектора и критерий коллинеарности напрямую переводят геометрию в вычисления.

Таблица объединяет «ключи» для решения: середина, расстояние и язык векторов. Используя их, можно переходить от рисунка к вычислению без громоздких построений.

Свойство	Формула (идея)	Зачем применяют
Середина отрезка	$((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$	Найти середину и точку симметрии
Расстояние	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Длины отрезков и сторон
Координаты вектора АВ	$(x_2-x_1; y_2-y_1)$	Связать направление с приращениями
Длина вектора	$ a =\sqrt{x^2+y^2}$	Проверить равенство и сравнить размеры
Коллинеарность	пропорциональность координат	Убедиться в параллельности
Общий смысл	все формулы взаимосвязаны	Они покрывают типовые задачи темы

Классические формулы школьного курса аналитической геометрии (11 класс).

Середина отрезка и деление в заданном отношении

01

Если концы отрезка — $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то середина имеет координаты $((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$. Это часто используют в задачах на центр симметрии и равные отрезки.

Когда точка делит отрезок в отношении $m:n$, её координаты находят через взвешенное среднее координат концов. Вес m связан с долей, ближайшей к соответствующему концу, и учитывает направление деления.

02

03

Такие формулы полезны не только для «середин»: они помогают решать задания на деление по условию, нахождение неизвестной точки по пропорции и вычисление координат при симметрии.

Вектор как направленный отрезок



Направление и длина

Вектор — это направленный отрезок: у него есть начало, конец и длина, а направление задаёт, куда именно происходит перемещение. Именно поэтому векторы удобны в задачах о движении.



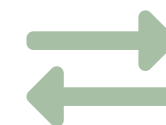
Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не задаёт определённого направления. Он появляется там, где начало и конец совпадают, и помогает отслеживать равенства и симметрии.



Обозначения на чертеже

Векторы записывают как $\overrightarrow{AB}$ или одной буквой, например $\vec{a}$. При чтении условий важно не перепутать порядок букв: от первой точки вы «стартуете», ко второй — «приходите».



Равные и противоположные

Равные векторы имеют одинаковую длину и направление. Противоположные — такую же длину, но обратное направление. Эти различия напрямую влияют на построения и проверки ответов.

Координаты вектора: от концов к вычислениям

«Приращение» вместо догадок

Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то координаты вектора AB равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. По смыслу это показывает, как меняются координаты при переходе от начала к концу.



Быстрая проверка свойств вектора

После нахождения координат легко вычислить длину и определить направление относительно осей. Это ускоряет решения и позволяет проверять равенство, сравнение и дальнейшие действия над векторами.



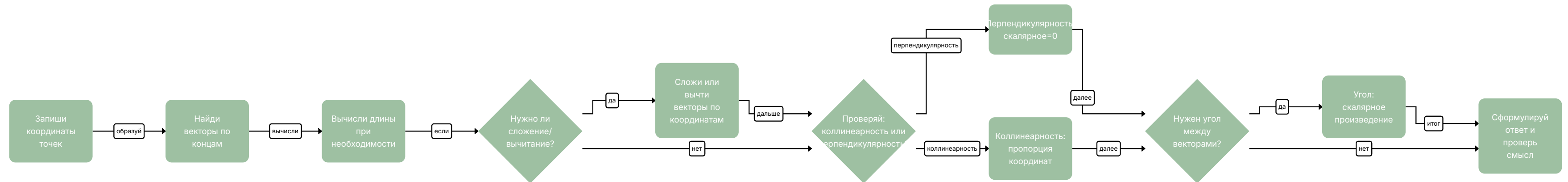
Геометрия становится вычислением

Такой способ записи связывает рисунок с алгеброй: вместо ручного построения достаточно подставить координаты и выполнить вычисления. Векторный язык помогает держать ход решения под контролем.



Алгоритм решения задач с векторами

Координатный подход: от точек к векторам, затем к длинам, условиям взаимного расположения и финальному ответу.



Сложение и вычитание векторов по координатам

1

Пусть $a=(x_1;y_1)$ и $b=(x_2;y_2)$. Тогда сумма записывается сразу через координаты: $a+b=(x_1+x_2; y_1+y_2)$. Такой способ работает без построений и экономит время в многошаговых задачах.

2

Разность понимается как прибавление противоположного вектора: $a-b=(x_1-x_2; y_1-y_2)$. Формулы одинаково удобны и для прямых вычислений, и для аккуратной проверки промежуточных результатов.

3

Поступательное сложение по правилу треугольника и параллелограмма в координатах превращается в простую алгебру. Координатное сложение соответствует «склейке» перемещений на плоскости.

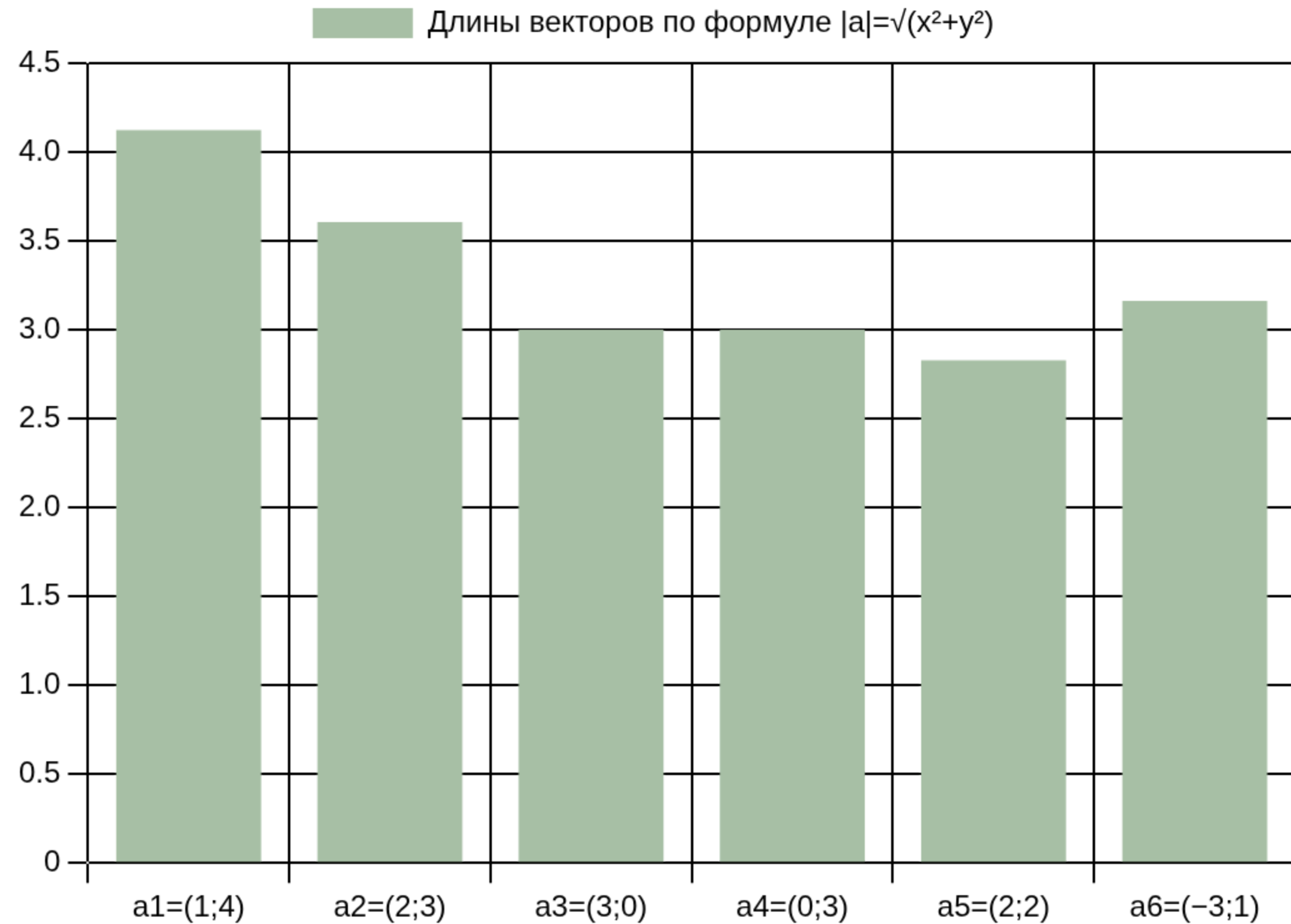
4

Особенно важно, когда в условии дано несколько действий подряд: стороны многоугольника, цепочки перемещений, векторы в аналитической записи. Вычисляй по правилам координат и переходи к следующему шагу задачи.

Сравнение длин векторов

В столбчатой диаграмме видно, что одинаковая длина возможна при разных координатах, например (3;0) и (0;3). Значит, сравнивать длины нельзя по одному компоненту.

Для равенства и сравнения векторов в задачах важны именно значения координат в выражении $\sqrt{x^2+y^2}$, а не направление и не знак компонентов.



Набор демонстрационных примеров для иллюстрации: длина каждого вектора посчитана по $|a|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Коллинеарность и перпендикулярность векторов

01

Векторы коллинеарны, если их координаты пропорциональны: $x_1/x_2 = y_1/y_2$ при ненулевых знаменателях. Практически это означает, что один вектор получается умножением другого на число.

02

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю: $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Это точный критерий, позволяющий заменить рисунок вычислением в координатной задаче.

03

Такие признаки помогают доказывать параллельность сторон, находить прямые углы и проверять свойства фигур. В задачах на плоскости достаточно подставить координаты и выполнить проверку.

Скалярное произведение и угол между векторами

1

Скалярное произведение $a \cdot b$ для $a=(x_1; y_1)$ и $b=(x_2; y_2)$ вычисляется формулой $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$. Далее оно связывается с углом φ : $a \cdot b = |a||b|\cos\varphi$.

2

Знак произведения сразу отражает характер угла: при остром угле $\cos\varphi > 0$, значит $a \cdot b > 0$; при прямом угле $\varphi = 90^\circ$ произведение равно нулю. Для тупого угла $\cos\varphi < 0$ и $a \cdot b$ отрицательно.

3

Если по условию требуется найти или подтвердить ортогональность, достаточно проверить равенство $a \cdot b = 0$, не прибегая к построениям. При нахождении угла используйте связь через $\cos\varphi$.

4

Этот инструмент особенно полезен в прикладных задачах, где требуется оценить «направленную согласованность» двух величин. В олимпиадных и экзаменационных задачах он заменяет геометрические догадки точным вычислением.

Зависимость скалярного произведения от угла

Линия на графике показывает, как величина $\cos\varphi$ определяет знак и масштаб скалярного произведения. При $\varphi=0^\circ$ произведение достигает максимума, а при $\varphi=90^\circ$ обращается в ноль.

По графику удобно сразу различать острые, прямые и тупые углы: знак $a \cdot b$ совпадает со знаком $\cos\varphi$. Значит, угол можно «диагностировать» по вычисленному произведению.

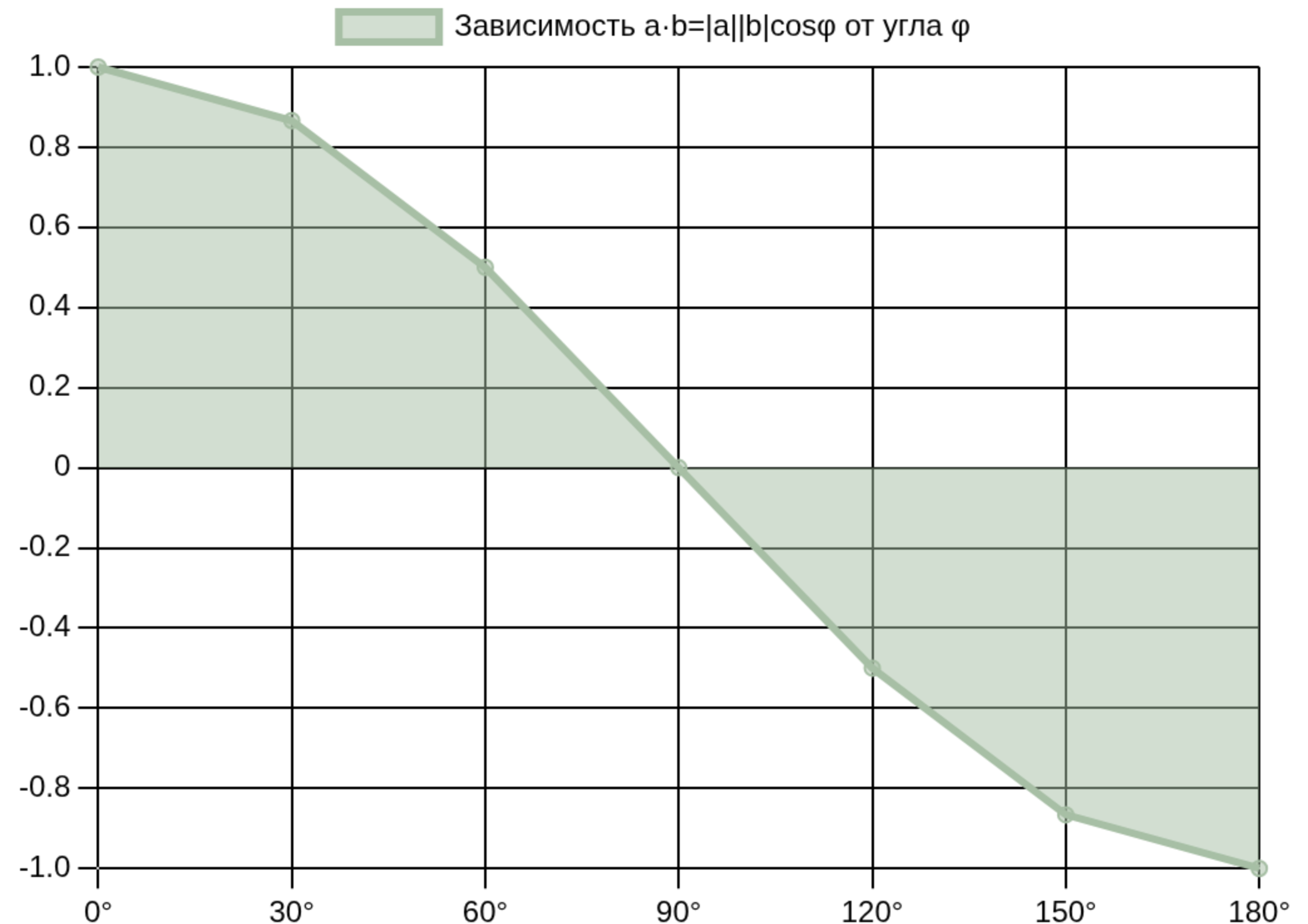


Иллюстрация зависимости $\cos\varphi$ от угла: нормированное значение $\cos\varphi$ для $\varphi=0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$.

Типовые задачи по теме и способы решения

Задача	Что найти	Формула	Что сделать
Расстояние	AB	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	Разности → квадраты → корень
Середина отрезка	M(x _m ;y _m)	$((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$	Сложи координаты концов → дели на 2
Длина вектора	a	$\sqrt{x^2+y^2}$	Подставь координаты → квадраты → корень

Три наиболее частых формата: расстояние между точками, середина отрезка и длина вектора. В каждой строке показаны исходные шаги вычисления — подстановка и работа с квадратами.

Во всех трёх задачах повторяются одни и те же действия: подстановка координат, работа с квадратами и аккуратное взятие корня или деление на 2.

Методические принципы координатного метода (базовые формулы школьного курса).

Практическое применение координат и векторов



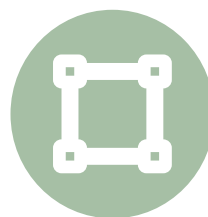
Геодезия и привязка на местности

Координаты задают положение точки относительно выбранной системы отсчёта, а векторы описывают перемещения при измерениях и построениях. Поэтому задачи превращаются в вычисление координат и проверку направлений.



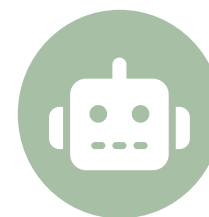
Навигация и маршрутные задачи

В навигации вектором удобно описывать перемещение и скорость, а координаты помогают точно задавать конечные точки. Даже при смене направлений путь удаётся анализировать аналитически.



Компьютерная графика

Повороты, переносы и построения на экране опираются на векторные операции. Координатная запись позволяет быстро вычислять новые положения объектов без громоздких геометрических рисунков.



Робототехника

Движение робота задаётся координатами и векторами команд, где направление и величина особенно важны. Для планирования траектории применяются сложение векторов и вычисление расстояний.

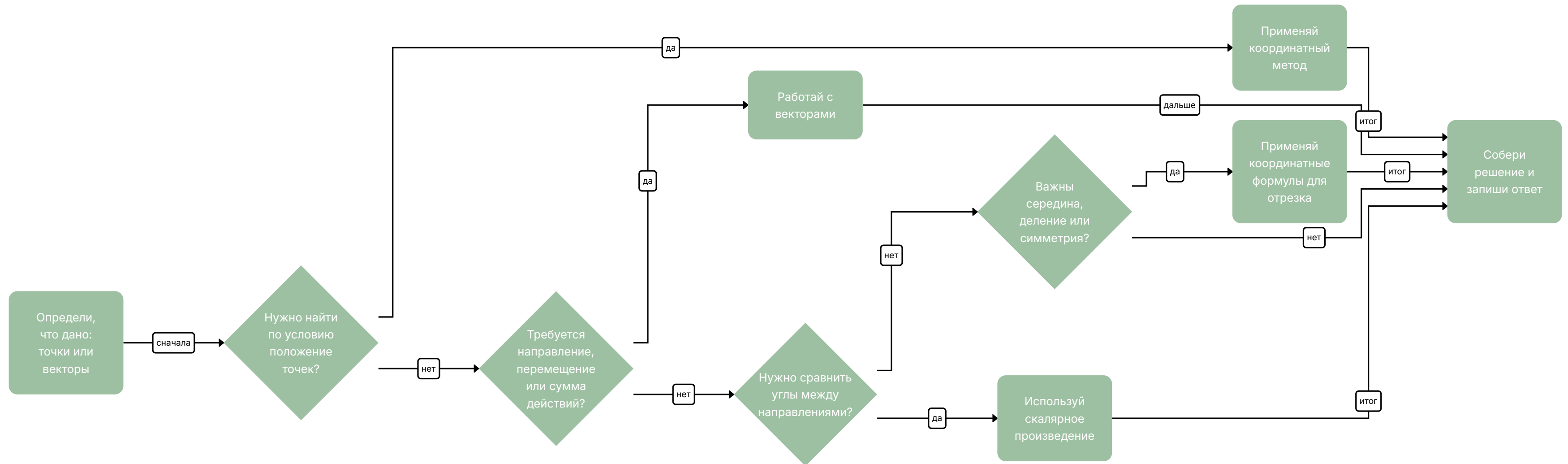


Механика и моделирование

Сила, ускорение и скорость выражаются через векторные величины, а их «согласование» оценивается скалярным произведением. Координаты помогают формализовать условия равновесия и направления действия.

Как выбрать способ решения задачи

Связка «условие → инструмент»: точки ведут к координатам, направление — к векторам, углы — к скалярному произведению.



Координаты и векторы как единый язык геометрии

Координаты и векторы переводят геометрические свойства в точные вычисления и делают решение задач универсальным. В 11 классе это ключ: расстояния, середины, длины, направления и углы через скалярное произведение.