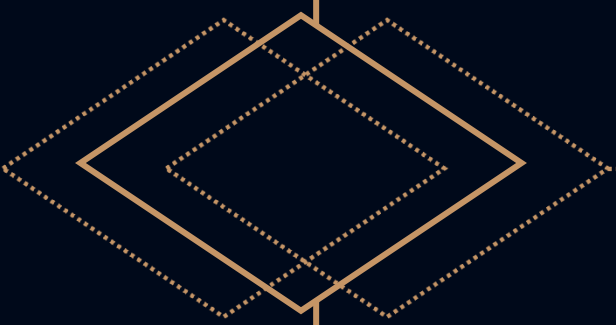
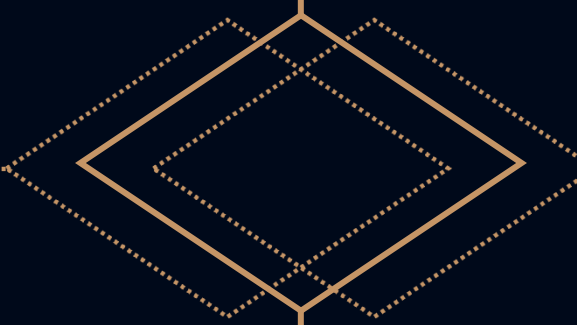


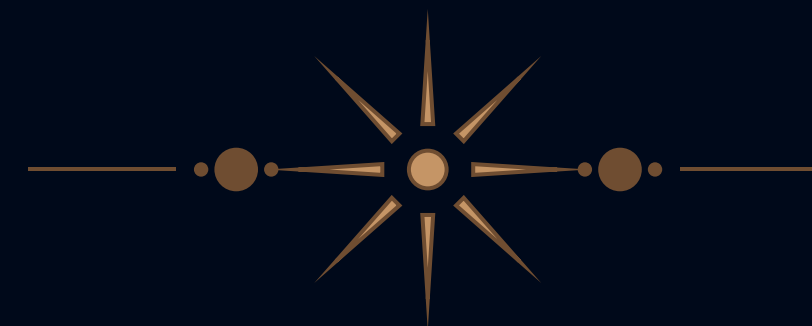
АКСИОМЫ в доказательствах теорем по геометрии



Основания каждого шага делают доказательство
понятным и проверяемым.



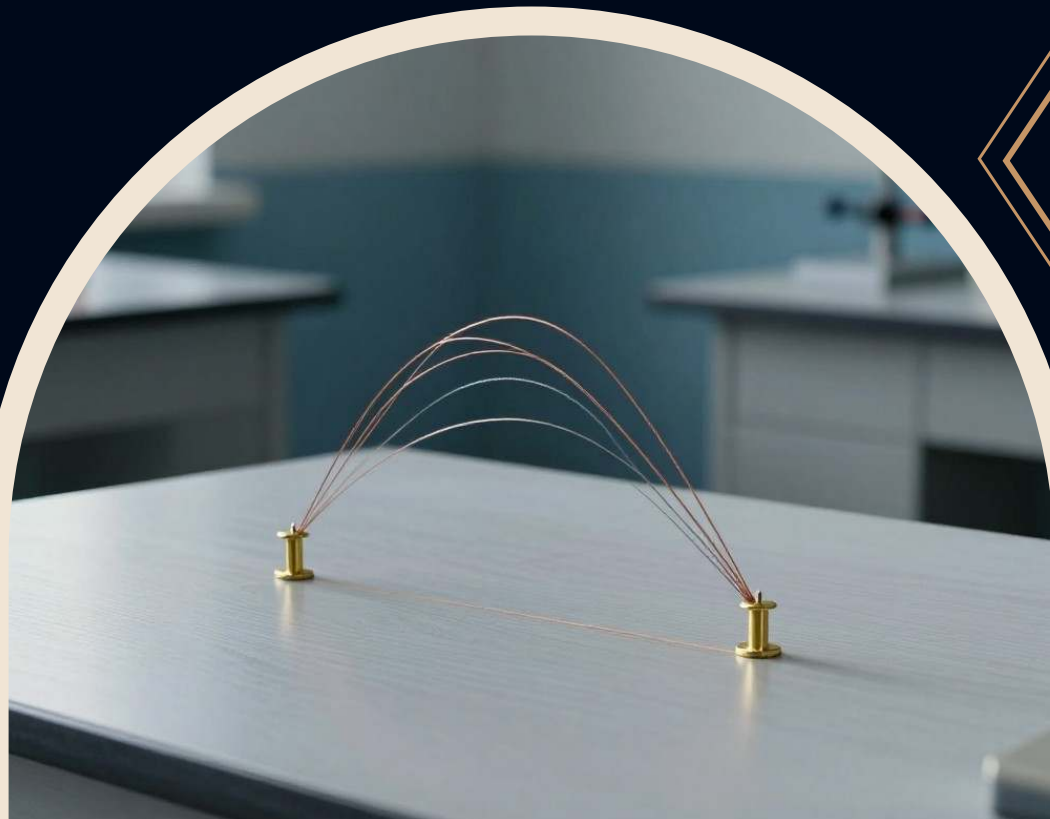
Почему доказательство работает



Геометрия начинается не с догадок,
а с точных правил. Они помогают
каждому шагу в доказательстве быть
понятным, проверяемым и логически
связанным с предыдущим.



Что ломается без аксиом



Когда прямая перестаёт быть единственной

Если через две точки можно провести несколько прямых, пропадает опора для построений. Нельзя уверенно говорить о пересечении, направлении или положении фигур, потому что сама фигура становится неоднозначной.



Когда теряется порядок на прямой

Без правил о порядке точек выражение «между» теряет смысл. Тогда невозможно точно описать отрезок, его части и середину, а равенства длин становятся спорными и неубедительными.



Когда сравнение фигур становится случайным

Если не принимать аксиомы о равенстве и углах, то даже простое сравнение фигур становится случайным. Доказательство превращается в набор предположений, а не в строгое рассуждение.

Аксиома, определение, теорема

1. Исходное правило

Аксиома принимается без доказательства и служит исходной опорой. Она задаёт базовое правило, на котором строят другие рассуждения и более сложные выводы в геометрии.

2. Что означает объект

Определение объясняет, что именно обозначает геометрический объект. Оно не доказывает свойство, а уточняет смысл слова: луч, угол, биссектриса, отрезок.

3. Нуждается в доказательстве

Теорема — это утверждение, которое нужно доказать. Её нельзя просто принять: каждый шаг должен опираться на уже известные факты и правила.

4. Основание каждого шага

В решении задачи любой переход должен иметь основание. Это может быть определение, аксиома или ранее доказанная теорема, иначе рассуждение теряет строгость.

Где проходит граница



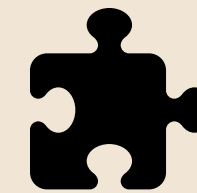
Смысл объекта

Определение сообщает смысл объекта: что такое отрезок, луч, угол или биссектриса. Оно помогает распознать фигуру и правильно использовать её свойства в задаче.



Базовое правило

Аксиома задаёт фундаментальное правило геометрии, например единственность прямой через две точки. Её не выводят из других утверждений, а принимают как основу.



Вывод из фактов

Теорема связывает уже известные факты и требует доказательства. Например, равенство вертикальных углов или сумма смежных углов появляется только после строгого рассуждения.

Карта школьных аксиом

Две точки — одна прямая

Единственность прямой через две точки делает построения однозначными. Если точки заданы, линия между ними уже не может быть произвольной или «примерной».

Порядок на прямой

Порядок точек на прямой позволяет говорить, что одна точка лежит между двумя другими. Благодаря этому можно рассуждать о частях отрезка и его середине.

Сравнение длин

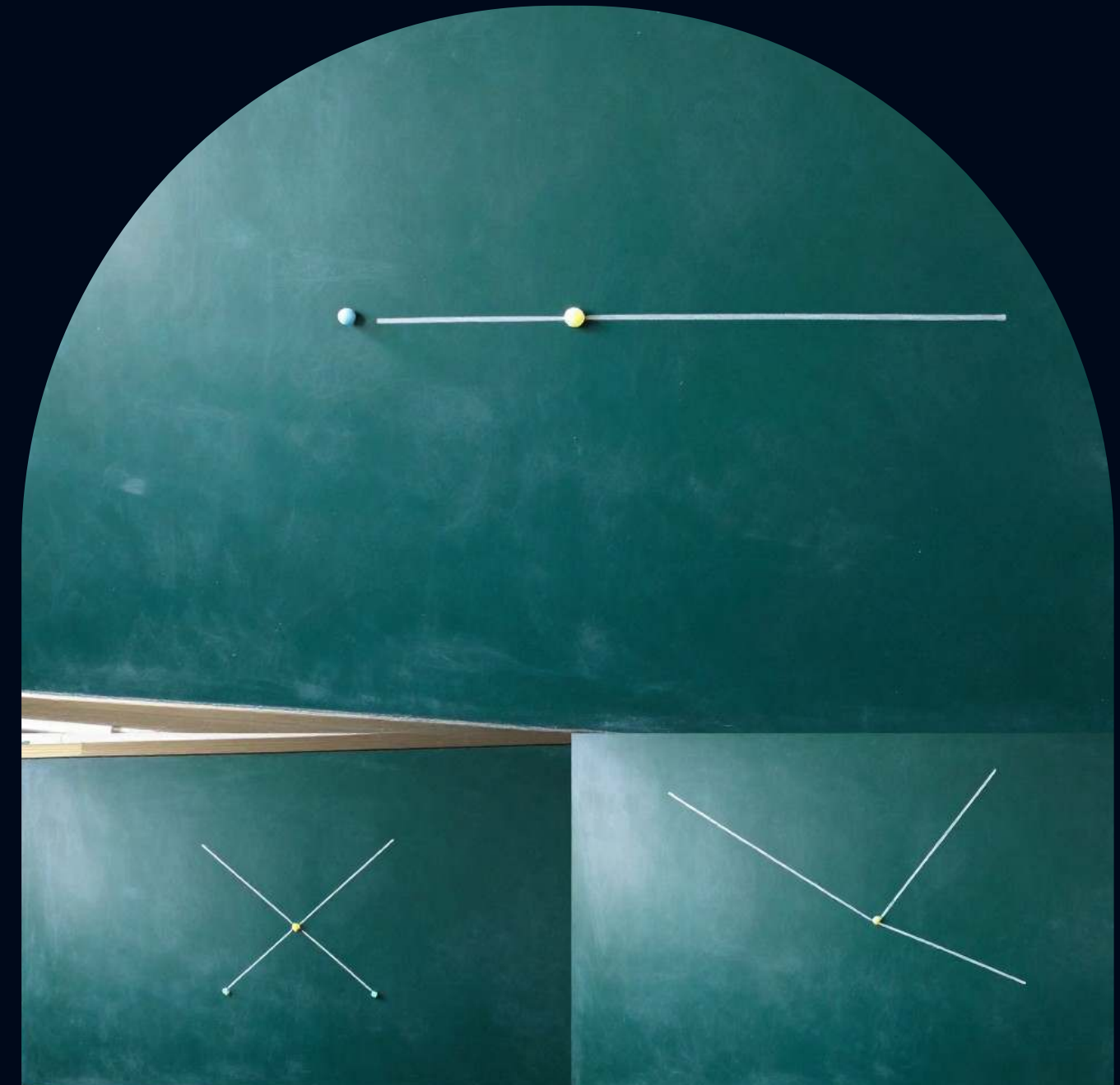
Длины отрезков можно сравнивать только потому, что у них есть мера. Это позволяет говорить о равных и неравных отрезках без путаницы.

Направление и поворот

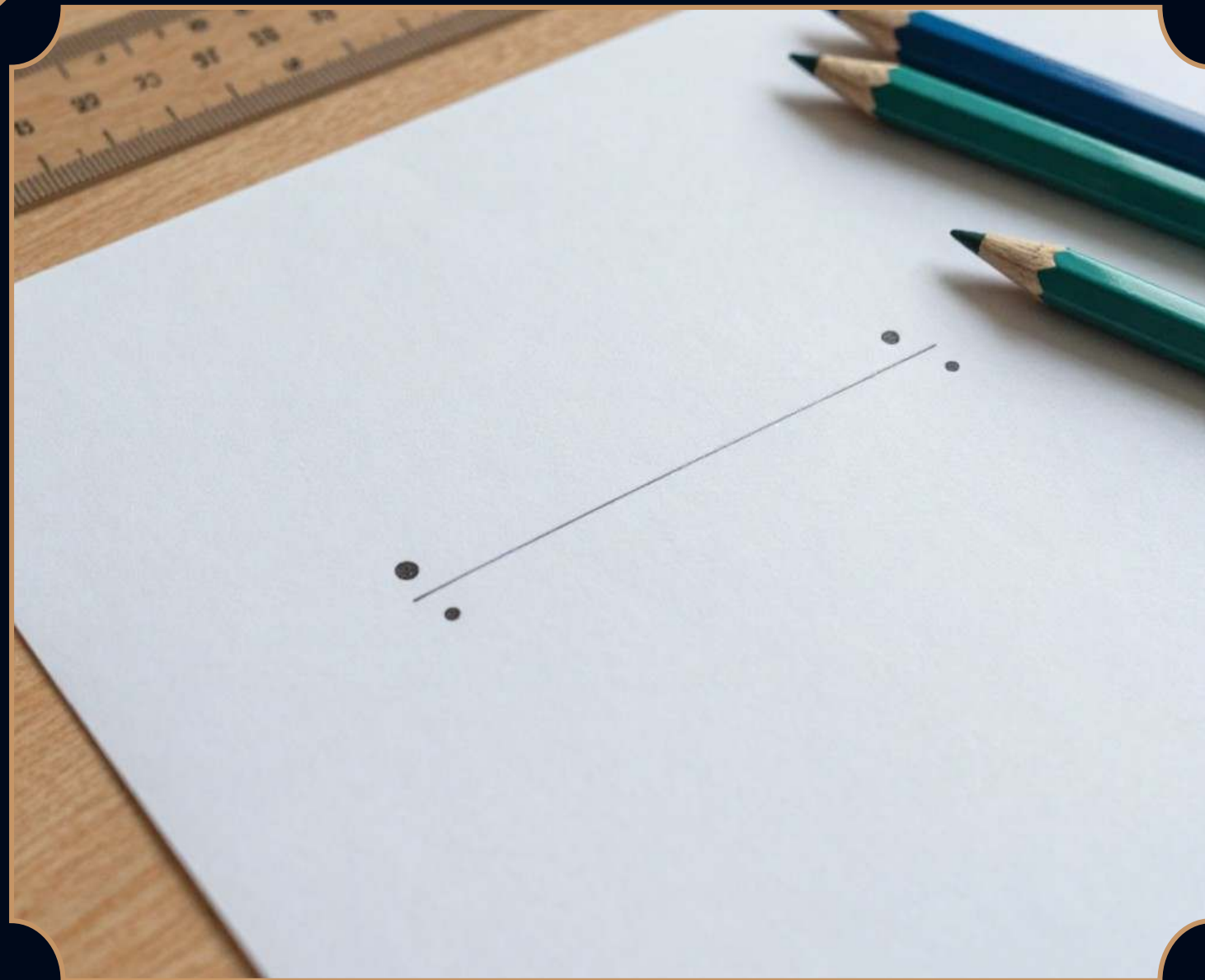
Лучи и углы задают направление и поворот. Они нужны, чтобы точно описывать положение фигур, особенно когда речь идёт о делении угла или о пересечении прямых.

Смежные углы

Смежные углы вместе образуют развернутый угол. Это простое правило часто помогает находить неизвестный угол и быстро проверять правильность решения.



Как точки задают прямую



Заданная линия



01



Если заданы две разные точки, через них проводится только одна прямая. Это делает чертёж определённым и не допускает случайных вариантов проведения линии.

Нет второй прямой



02



Когда одна прямая уже проведена, никаких дополнительных прямых через те же две точки быть не может. Иначе пересечения и углы в задаче стали бы неоднозначными.

Основа рассуждения



03



Именно эта аксиома позволяет уверенно строить доказательства о пересечениях, параллельности и расположении точек. Она убирает неопределённость и делает чертёж строгим.

Как работает порядок на прямой

2. Точка между ними

Слово «между» имеет точный смысл. Оно показывает, что одна точка лежит на отрезке между двумя другими, а не где-то рядом с ним.

4. Сумма длин

Так появляется правило: длина целого отрезка равна сумме длин его частей. Оно часто используется в школьных задачах и опирается на порядок точек.

1. Заданы точки

На прямой сначала фиксируют две точки. Между ними можно выделить точку, которая находится внутри отрезка и делит его на две части.

3. Две части отрезка

Из этого следует разбиение отрезка на две части. Их длины можно сравнивать, складывать и использовать в дальнейшем доказательстве.

Это число показывает, почему смежные углы удобно использовать в доказательствах: сумма дополняет их до развернутого угла и сразу даёт нужное равенство.



180°

— это величина развернутого угла и сумма смежных углов.

Школьный курс геометрии (7 класс)

Аксиомы и свойства прямых и углов

Вертикальные углы

При пересечении двух прямых вертикальные углы лежат напротив друг друга и оказываются равными. Это часто используется как короткое основание для дальнейших рассуждений.

Смежные углы

Смежные углы образуют развернутый угол, поэтому их сумма постоянна. Такое свойство удобно, когда нужно найти неизвестный угол по соседнему.

Биссектриса

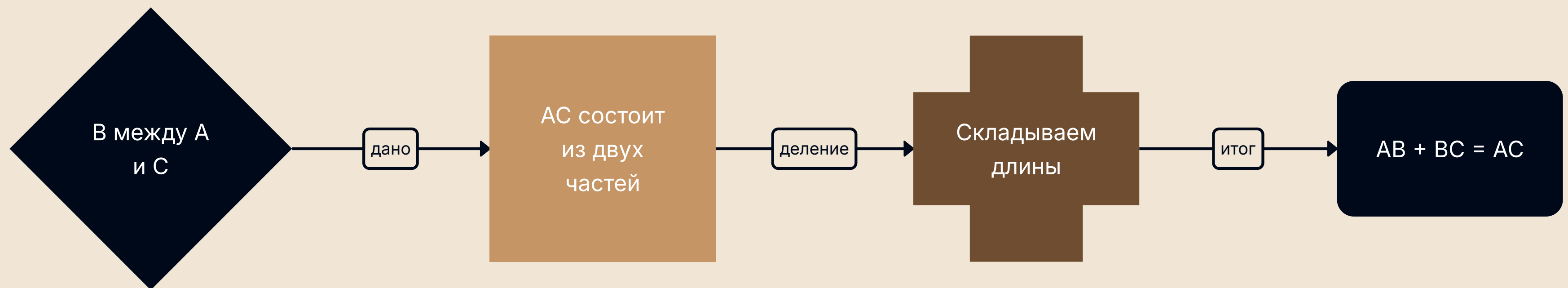
Если луч делит угол пополам, он образует два равных угла. Это определение биссектрисы сразу даёт нужное равенство без лишних вычислений.

Перенос результата

Когда известны равные углы или отрезки, можно переносить результат в другие фигуры. Так строятся короткие доказательства и признаки равенства треугольников.

Сложение отрезков: от условия к равенству

Если точка В лежит между А и С, то длина всего отрезка равна сумме длин его частей.



Разбор основания каждого шага

1. Точка между

Сначала используется определение точки между: оно говорит, что В принадлежит отрезку АС и разделяет его на два соседних отрезка. Без этого шага равенство ещё нельзя записывать.

2. Порядок точек

Далее применяют аксиому порядка точек: на отрезке порядок фиксирован, поэтому части АВ и ВС действительно составляют весь отрезок АС без наложений и пропусков.

3. Длина целого

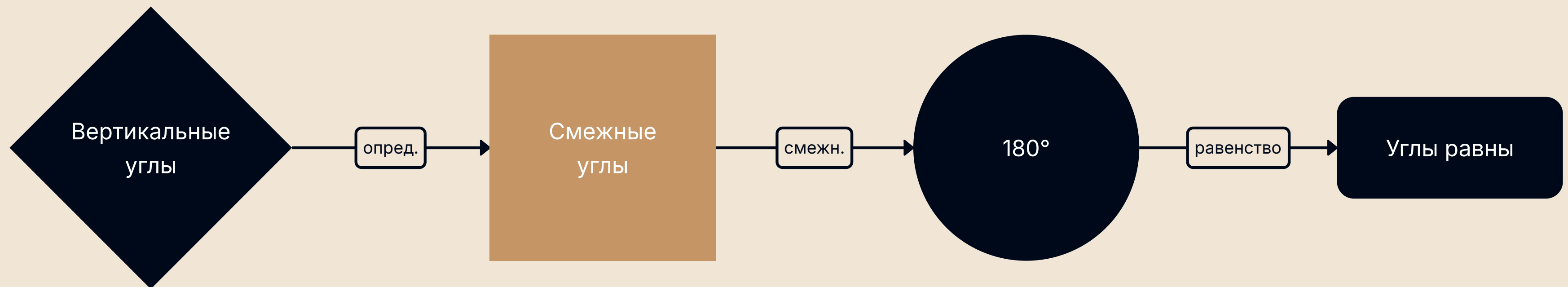
Затем переходят к свойству длины отрезка: длина целого равна сумме длин его неперекрывающихся частей. Именно отсюда появляется запись $AB + BC = AC$.

4. Проверка рассуждения

Такое помечание оснований показывает, что доказательство не держится на догадке. Каждый переход можно проверить и при необходимости точно указать, из чего он следует.

Вертикальные углы: короткое доказательство

Если две прямые пересекаются, то вертикальные углы можно сравнить через смежные углы и развернутый угол.





Что опирается на что во втором доказательстве



2. Развернутый угол

Затем используется аксиома о смежных углах: вместе они образуют развернутый угол, то есть дают 180° . Это связывает две разные пары углов.

1. Определение фигуры

Сначала вводится нужная фигура: две пересекающиеся прямые и пара вертикальных углов. Без точного определения нельзя понять, какие именно углы сравниваются.

3. Итоговое равенство

После этого применяется уже доказанное свойство: равные суммы с одним и тем же числом приводят к равенству нужных углов. Так получается итог.

Шаг доказательства → основание



Таблица показывает, какой тип основания скрыт за каждым шагом доказательства. Это удобно для самопроверки и помогает не путать определение, аксиому и теорему.

По короткой записи видно, что один и тот же способ проверки подходит для разных задач: сначала найти тип основания, затем убедиться, что он действительно применим.



Шаг	Основание	Пример
«между»	Определение	точка В
одна прямая	Аксиома	через 2 точки
вертикальные углы	Теорема	равны

Школьные примеры по геометрии

Упражнение: что это за основание?

Определение

Фраза «луч делит угол пополам» — это определение биссектрисы. В ней сразу сказано, что луч делит угол на два равных угла, а не доказывает это позже.



Аксиома

Фраза «через две точки проходит одна прямая» — аксиома. Она принимается без доказательства и служит основой для построений, чертежей и рассуждений о пересечениях.



Теорема

Фраза «если два угла равны третьему, то они равны между собой» — теорема. Её нужно доказать, а затем уже использовать как готовый факт.



Упражнение: допиши обоснование

◆ 01 ◆

Сумма отрезков

Если точка O лежит между A и B , то отрезок AB состоит из двух частей — AO и OB .
Поэтому $AO + OB = AB$
по определению
расположения точек
на прямой.

◆ 02 ◆

Вертикальные углы

Вертикальные углы равны, потому что каждый из них дополняет равный смежный угол до одного и того же развернутого угла. Отсюда следует их равенство.

Упражнение: найди пропуск в доказательстве

Проверь точность

Если в записи сказано лишь «луч делит угол», но не указано пополам ли он его делит, нужно добавить точное определение биссектрисы. Иначе шаг остаётся слишком общим.

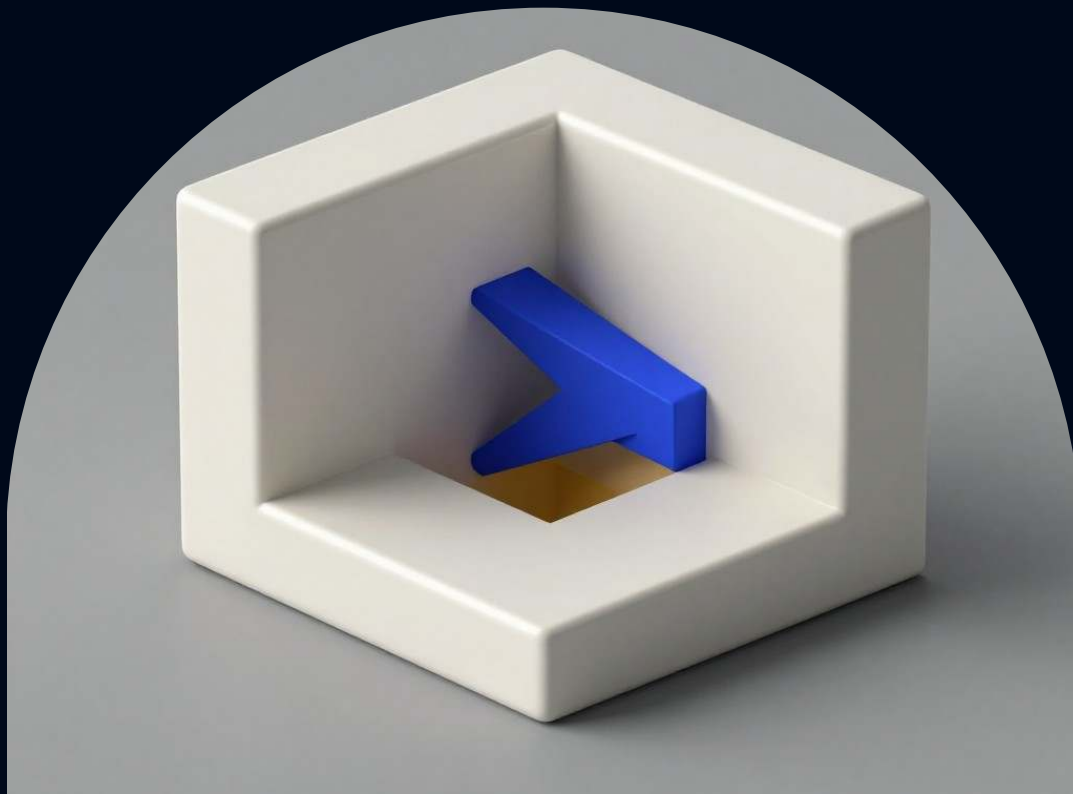
Отметь источник

Если сделан вывод «через две точки проходит одна прямая», это не нужно доказывать заново. Но обязательно пометить: это аксиома, а не теорема.

Найди пропуск

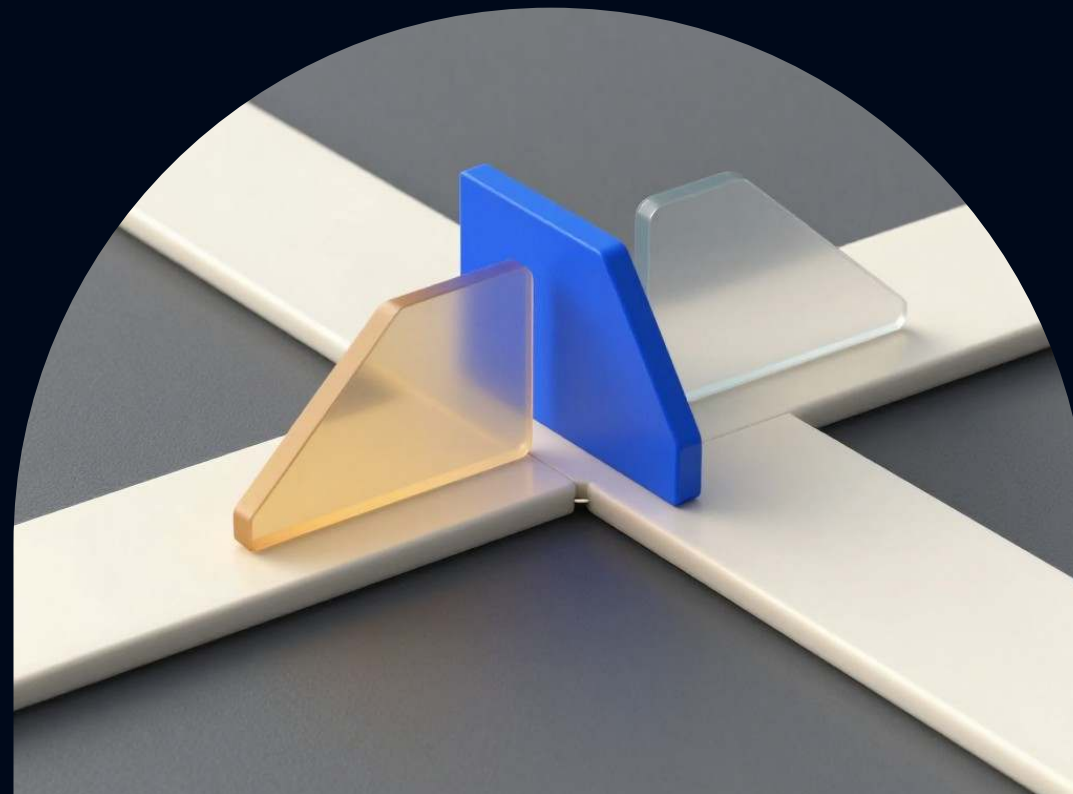
Когда используются равные углы или равные отрезки, важно понять, откуда взялось равенство. Иногда оно следует из уже доказанной теоремы, а не из определения.

Как читать рисунок перед доказательством



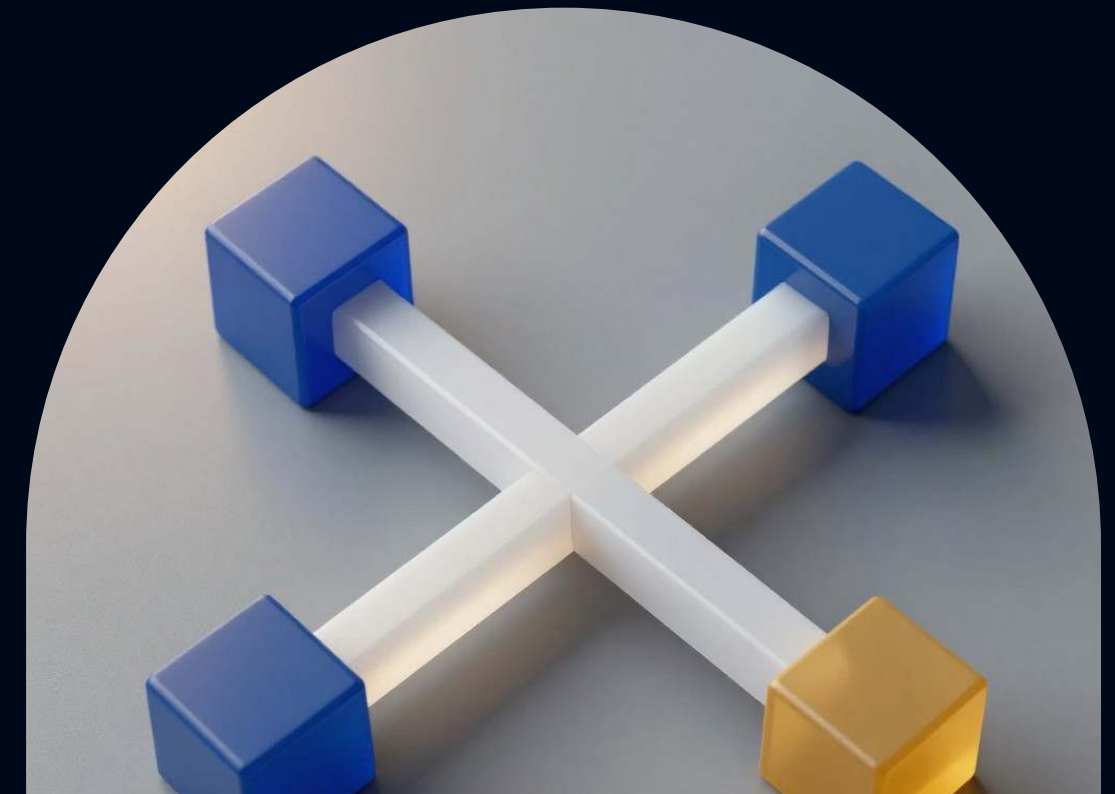
Луч как часть условия

На рисунке луч, исходящий из вершины угла, может быть просто дан как часть фигуры. Но если он делит угол на два равных, это уже не рисунок, а определение биссектрисы. Ученик должен отделить сам факт изображения от смыслового утверждения.



Смежные углы на схеме

Если два угла имеют общую сторону и вместе образуют прямую линию, они смежные. Из этого можно перейти к развернутому углу и дальше к числу 180° , не смешивая определение и свойство.



Пересечение и равенство

При пересечении прямых важно увидеть вертикальные углы и проверить, какие из них можно сравнить. Равенство здесь обычно не угадывают по рисунку, а выводят через уже известное свойство.



Главное правило для доказательств

В геометрии важно не только получить ответ, но и назвать опору каждого шага: определение, аксиому или теорему. Если это делать регулярно, доказательства становятся понятными, короткими и проверяемыми.