

Сферическая геометрия: геометрия на поверхности шара

Геометрия на шаре меняет привычные правила плоскости.



Геометрия Земли в реальной жизни

- Поскольку Земля близка к шару, сферическая геометрия помогает понимать глобус, карты и координаты, а также рассчитывать маршруты в навигации, авиации и морских путешествиях.



Что такое сфера и её поверхность

1 Определение сферы

Сфера — это множество всех точек, которые находятся на одном и том же расстоянии от общего центра. Это расстояние называют радиусом.

2 Двумерная поверхность

Поверхность сферы имеет только два направления движения: вдоль неё можно перемещаться, но нельзя выйти «вверх» или «вниз», как в обычном пространстве.

3 Радиус и диаметр

Радиус у сферы одинаков во всех направлениях. Диаметр проходит через центр и всегда равен двум радиусам, поэтому легко связывает центр и поверхность.

4 Почему это важно

Именно форма поверхности отличает сферу от плоскости. На ней привычные правила геометрии меняются, и для измерений приходится учитывать кривизну.



Глобус как модель Земли

Точная форма

Глобус передаёт Землю как шар без разрыва поверхности, поэтому лучше показывает взаимное расположение материков, океанов и полюсов, чем плоская карта.

Главные линии

На глобусе легко увидеть экватор, меридианы и параллели. Эти линии помогают объяснять географические координаты и находить положение объектов на Земле.

Связь с геометрией

Глобус делает абстрактные свойства сферы наглядными. По нему удобно показывать, как на кривой поверхности расстояния и направления ведут себя иначе.



Плоская и сферическая геометрия: основные отличия

Плоскость	Сфера
Прямая — кратчайший путь	Дуга большого круга
Сумма углов = 180°	Сумма углов $> 180^\circ$
Параллельные не пересекаются	Меридианы сходятся

— Сравнение показывает, что на сфере привычные правила плоскости не всегда работают одинаково. Кривизна поверхности меняет и расстояния, и углы, поэтому для сферы нужны особые правила.

— Общие свойства плоской и сферической геометрии

Большие круги и кратчайшие пути

1 Что такое большой круг

Большой круг — это окружность на сфере, плоскость которой проходит через центр шара. Экватор является самым известным примером такого круга.

2 Кратчайший маршрут

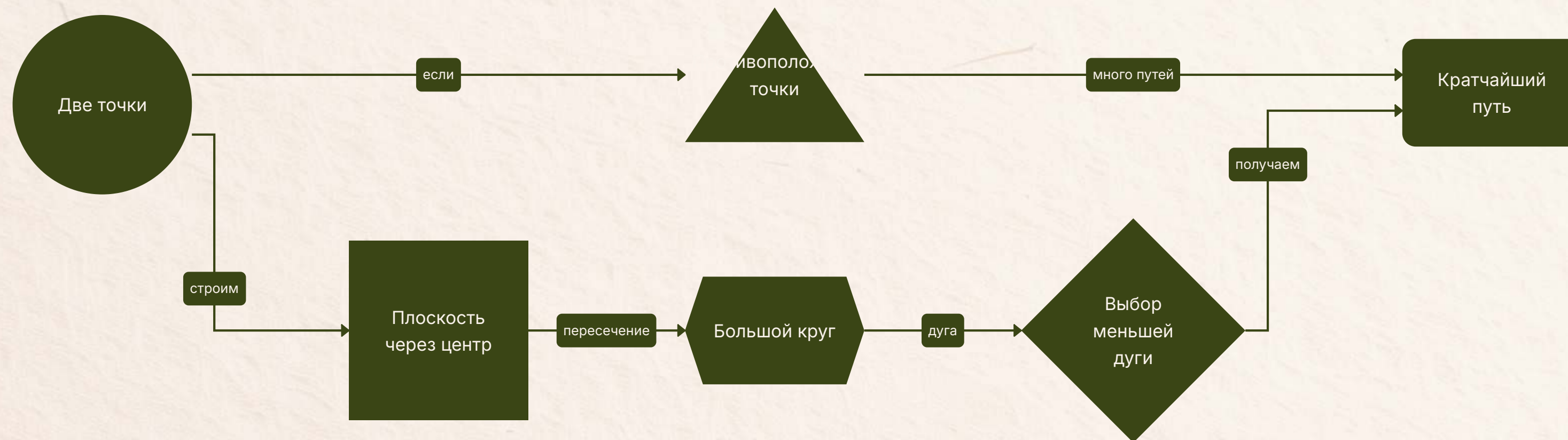
Если соединить две точки на поверхности сферы по меньшей дуге большого круга, получится самый короткий путь по поверхности, а не прямая линия в воздухе.

3 Практический смысл

Именно поэтому маршруты самолётов на глобусе часто выглядят изогнутыми. На плоской карте они кажутся длиннее, хотя на сфере остаются кратчайшими.

Поиск кратчайшего пути на сфере

Последовательность построения дуги большого круга между двумя точками



Меридианы, параллели и географические координаты



Меридианы

Меридианы соединяют Северный и Южный полюсы. Они показывают долготу точки и помогают определять её положение относительно нулевого меридиана.



Параллели

Параллели идут параллельно экватору и помогают измерять широту. Чем дальше линия от экватора, тем ближе она к полюсу.



Широта

Широта показывает, насколько точка находится севернее или южнее экватора. Она помогает быстро понять, в каком полушарии расположен объект.



Долгота

Долгота показывает положение точки восточнее или западнее нулевого меридиана. Вместе с широтой она позволяет точно находить города, острова и другие объекты.

Как меняется длина дуги при разных углах

Чем больше центральный угол, тем больше часть окружности занимает дуга и тем длиннее путь по поверхности сферы.

Зависимость почти линейная: удвоение угла почти удваивает длину дуги, что удобно для расчёта маршрутов.

Расчёт по радиусу Земли 6371 км; длина дуги = $R \times \text{угол}$ (в радианах)



Сферический треугольник

Из чего он состоит

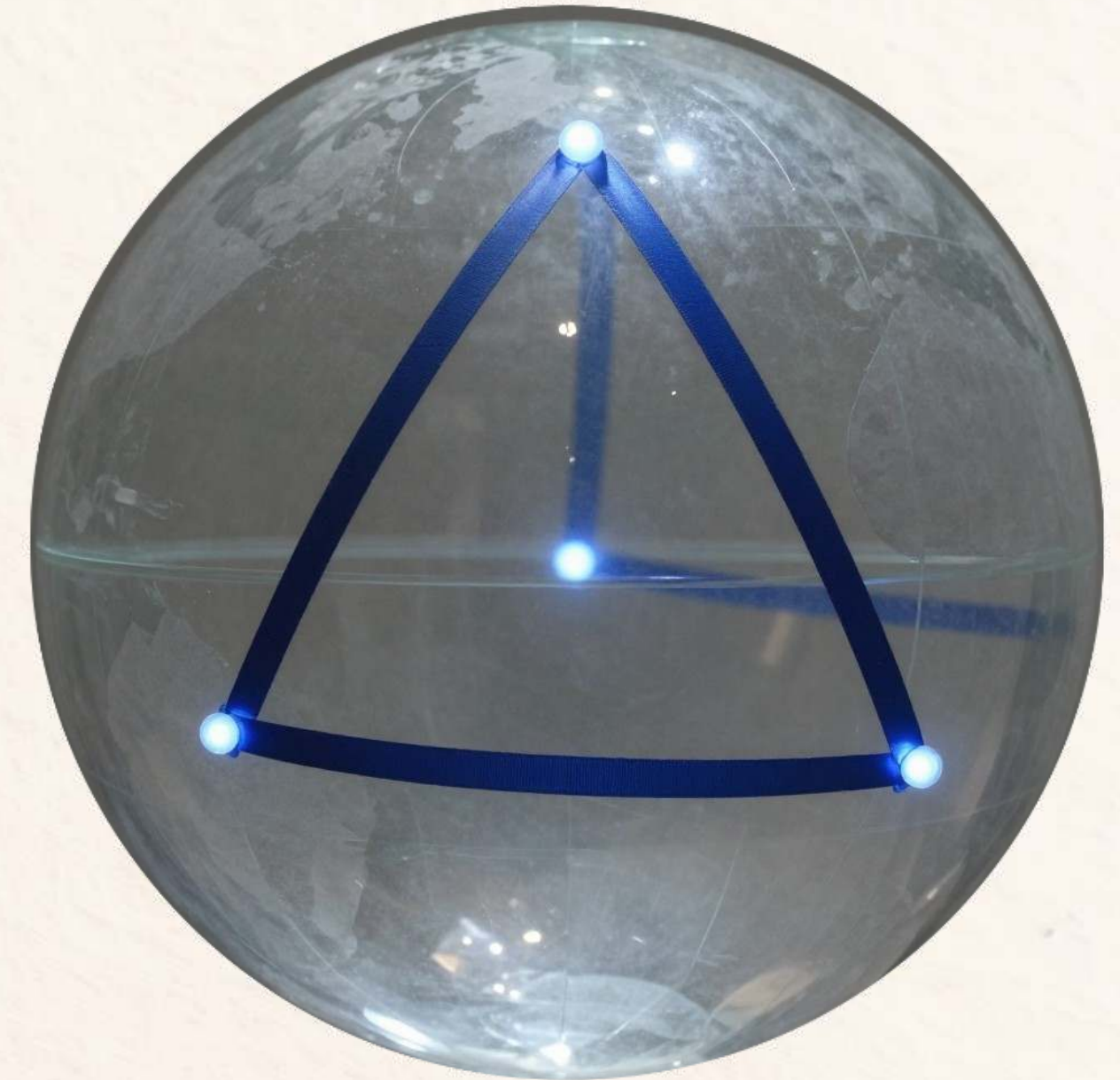
Сферический треугольник образуют три дуги больших кругов. Его стороны лежат на поверхности сферы, а не на плоскости, поэтому фигура выглядит необычно.

Как измеряются стороны

Стороны такого треугольника можно задавать не только длиной дуги, но и угловой мерой. Это связано с тем, что фигура находится на сфере.

Главное отличие

Сумма углов сферического треугольника всегда больше 180° . Чем больше сам треугольник на сфере, тем заметнее это отличие от плоской геометрии.



30°

именно такой избыток получился
в треугольнике с суммой углов 210° .

Сферический избыток показывает, насколько треугольник
на сфере отличается от плоского случая. Чем больше фигура,
тем заметнее это отличие.

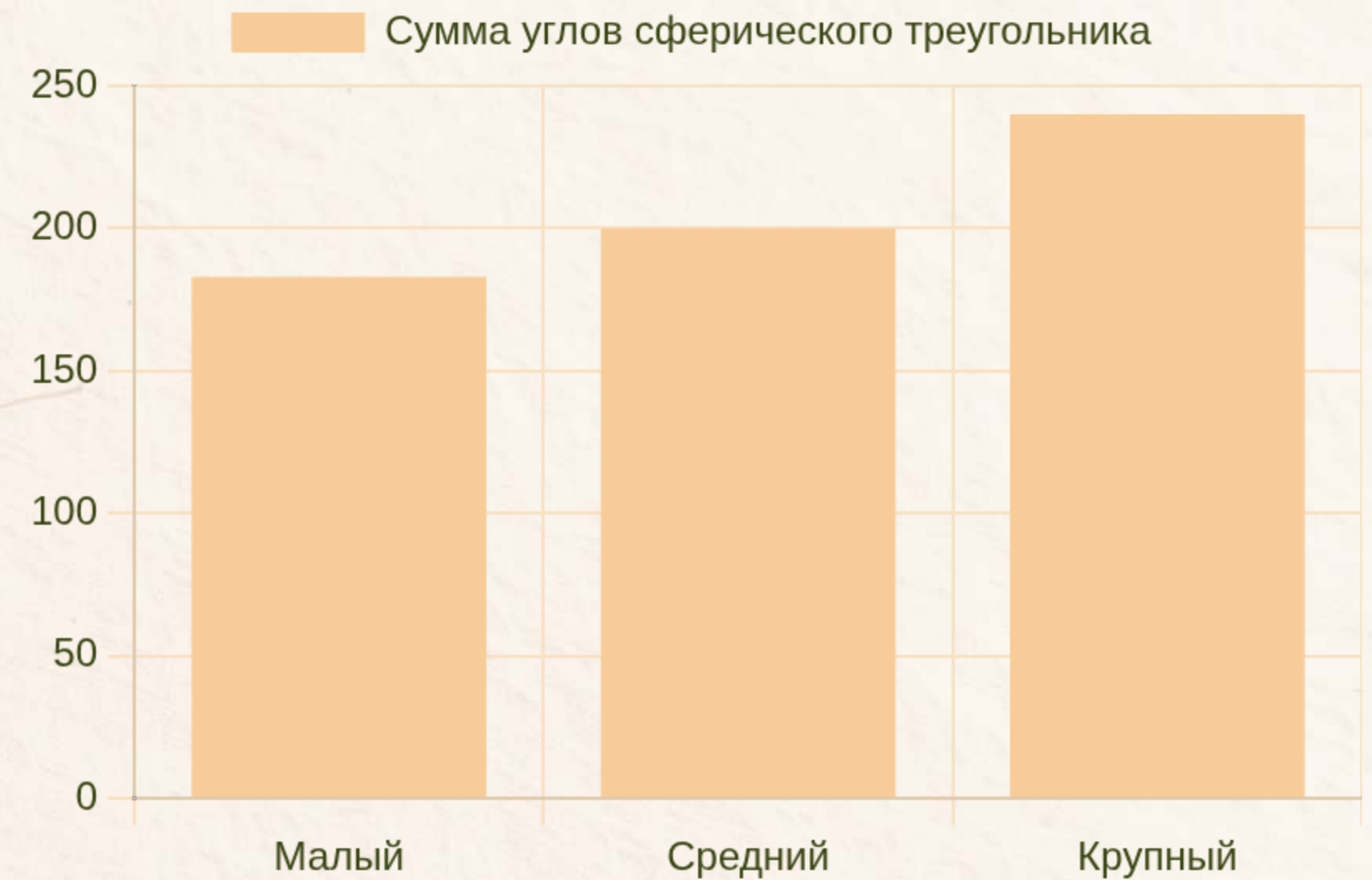
Учебный пример из условия: сумма углов 210° ; сферический
избыток равен $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.

Сумма углов треугольников разного размера

На сфере треугольники с большими сторонами сильнее отклоняются от плоской модели и дают больший избыток углов.

Чем больше площадь сферического треугольника, тем больше сумма его углов и тем заметнее отличие от 180° .

Схематические учебные значения, использованные в задании: малый — 181° – 185° , средний — около 200° , крупный — 240° и больше.



Как дуги больших кругов помогают в перелётах



Маршрут короче, чем на карте

Самолёт летит не по «прямой» на плоском листе, а по дуге большого круга на поверхности Земли. Поэтому на карте путь может выглядеть изогнутым, хотя на сфере он самый короткий. Именно так выбирают экономичные межконтинентальные рейсы.



Почему это важно для экипажа

Пилотам и диспетчерам важно учитывать кривизну Земли, чтобы точнее планировать время, топливо и запас маршрута. Большой круг помогает найти геометрически выгодную траекторию. Для пассажиров это означает более разумный и часто более быстрый перелёт.



Глобус объясняет лучше карты

Если провести линию между городами на глобусе, легко увидеть, почему она изгибается. Модель шара показывает настоящую форму пути без искажений плоской карты. Поэтому глобус помогает понять, как геометрия связана с реальными перелётами.

Где применяется сферическая геометрия

Сфера	Применение
Навигация	Маршруты
Картография	Глобусы
Авиация	Перелёты
Спутники	Координаты
Астрономия	Небо

Сферическая геометрия нужна там, где поверхность или движение связаны с шаром или его моделью.

Общие приёмы одинаковы: находят дуги, углы и координаты на кривой поверхности. Поэтому одна геометрия работает сразу в нескольких областях.

Обобщение учебного материала по теме сферической геометрии.

Как меняются параллели на сфере



Экватор

Экватор — единственная параллель, которая является большим кругом. Он делит Землю на Северное и Южное полушария и имеет наибольшую длину.



Средние широты

По мере удаления от экватора параллели становятся короче. Их радиус уменьшается, поэтому окружности на сфере постепенно сжимаются.



Полюса

У полюсов параллель превращается в точку. Это наглядно показывает, что поверхность сферы искривлена, а размеры окружностей зависят от широты.

Длина параллелей от экватора к полюсам

Здесь показано относительное сравнение: настоящие длины зависят от радиуса Земли и широты точки.

Чем дальше от экватора, тем короче параллель. У полюса длина становится нулевой, потому что окружность вырождается в точку.

Схематическое сравнение, основанное на свойстве параллелей сферы: длина уменьшается к полюсам.



Что измеряют в задачах на сфере

1 Углы между меридианами

В первую очередь измеряют угловые расстояния между меридианами и другими дугами. Эти величины помогают понять положение точки на сфере и правильно построить задачу.

2 Длины дуг

Затем находят длину дуги большого круга или другой части поверхности. Для этого используют радиус сферы и переводят угол в реальное расстояние.

3 Расстояния между точками

После этого определяют путь между двумя точками по поверхности, а не по прямой в пространстве. В земных задачах часто берут радиус Земли около 6371 км.

Как решают задачу на сфере

Схема показывает последовательность действий от исходных точек до ответа.



Сферическая геометрия вокруг нас

— Земля и глобус

Самый знакомый пример сферической поверхности — Земля и её модель, глобус. Они помогают увидеть меридианы, параллели и кратчайшие пути без искажений плоской карты.

— Планеты и спутники

Та же идея используется при изучении Луны, планет и движения спутников. Когда объект близок к шару, удобнее описывать его положение по сферическим правилам.

— Карты и приложения

Навигационные приложения, карты и маршруты транспорта опираются на координаты и дуги поверхности Земли. Поэтому сферическая геометрия помогает не только в математике, но и в повседневной жизни.

— Космос вокруг нас

В астрономии сферические представления нужны для описания положения звёзд и небесных тел на небесной сфере. Это ещё один пример того, как форма поверхности меняет геометрические правила.



Главная идея сферической геометрии

Сферическая геометрия учит видеть, что на кривой поверхности привычные правила меняются. Она объясняет большие круги, координаты и кратчайшие пути на Земле, в навигации и астрономии.