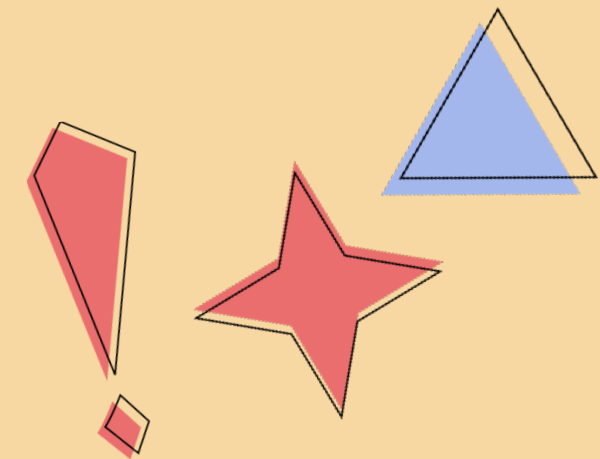


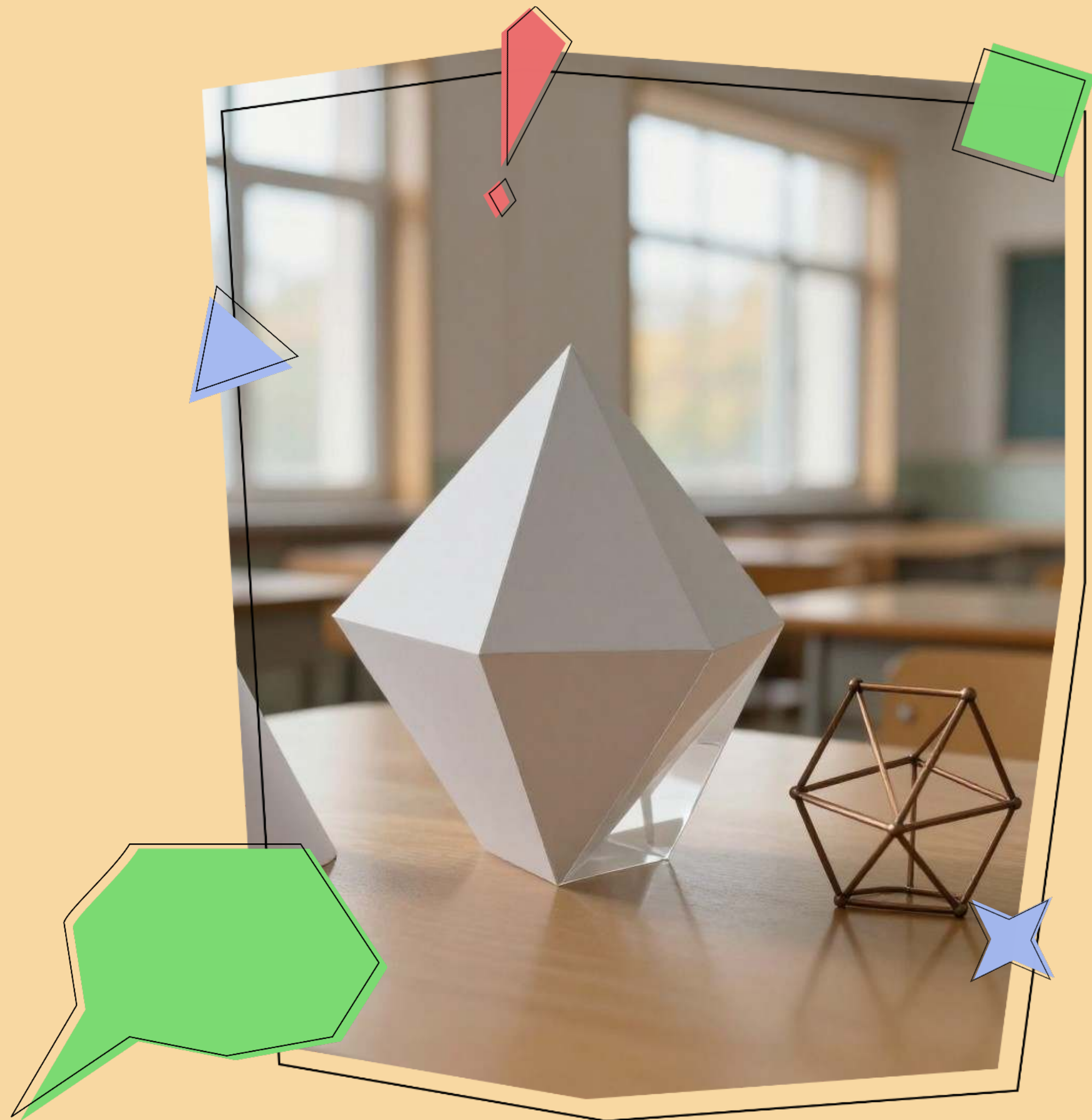
Многогранные углы: определение, свойства и задачи 10 класса

Многогранный угол возникает при пересечении плоскостей в одной вершине. Разбираем элементы и учимся решать задачи.

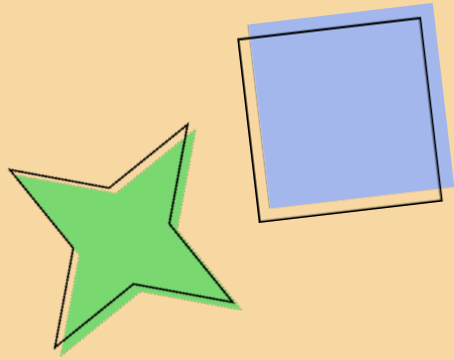


Где рождаются многогранные углы и зачем они нужны в стереометрии

Многогранный угол появляется в точках, где сходятся три и более плоскости — например, в вершине куба, пирамиды или тетраэдра. В 10 классе это опора для чтения чертежей, распознавания на рисунке и перехода к плоским построениям.

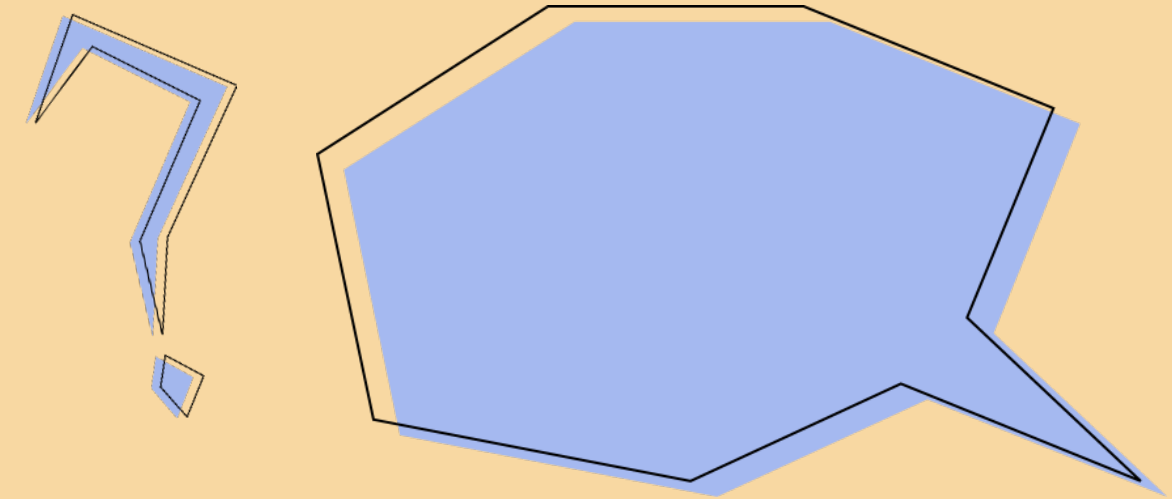


Определение многогранного угла и его элементы

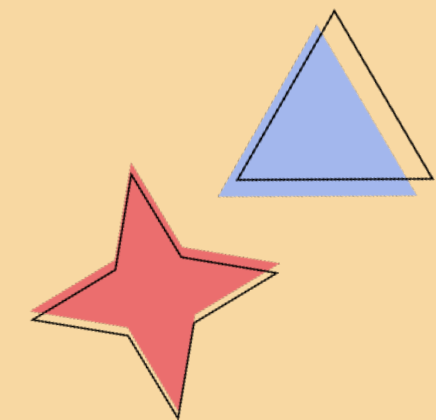


Многогранный угол образован несколькими плоскими углами: они имеют общую вершину и лежат в разных плоскостях. Так возникает пространственная «оболочка» вокруг одной точки.

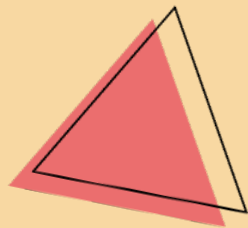
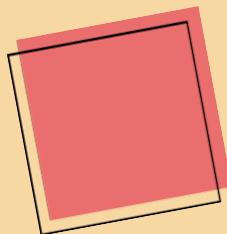
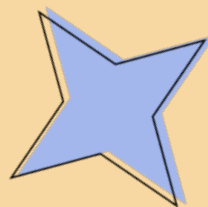
Ребра многогранного угла — это линии пересечения плоскостей, выходящие из общей вершины. Именно по ребрам различают границы каждой грани и «направление» угла в пространстве.



Грани многогранного угла — плоские углы, которые вместе собираются в единую пространственную фигуру. Важный частный случай — трехгранный угол: он часто встречается в задачах и служит базовой моделью.



Основные виды многогранных углов

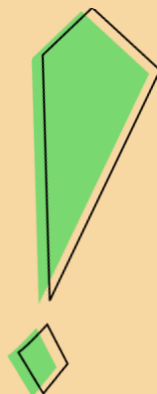
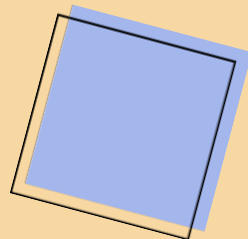
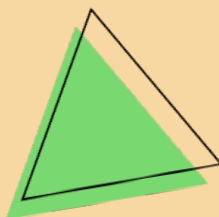


Вид	Признак	Пример
Выпуклый	точки лежат по одну сторону от каждой грани	угол при вершине куба
Невыпуклый	пространство «вдавлено» внутрь	нестандартный чертёж
Правильный	симметрия: грани и плоские углы равны	угол при вершине правильной пирамиды

Классификация помогает правильно «читать» чертеж и выбирать подход к решению задач на вычисление углов и построения.

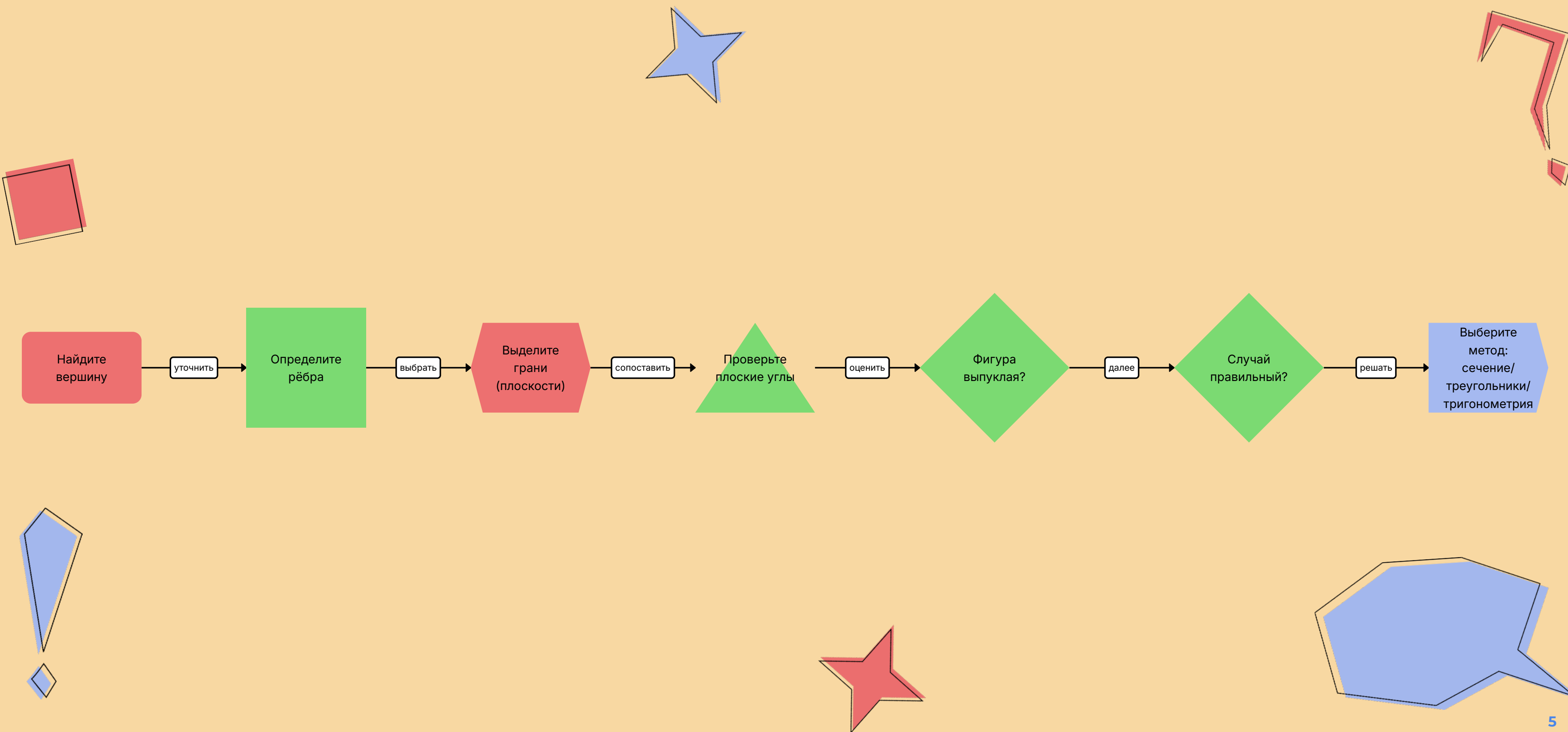
Чем точнее известен тип угла, тем проще выделить элементы на рисунке и быстрее подобрать метод решения.

Школьный курс стереометрии (обобщение учебных признаков выпуклых/ невыпуклых и правильных многогранных углов).



Как распознать многогранный угол на чертеже

Пошаговый алгоритм для анализа пространственной конфигурации в задачах 10 класса



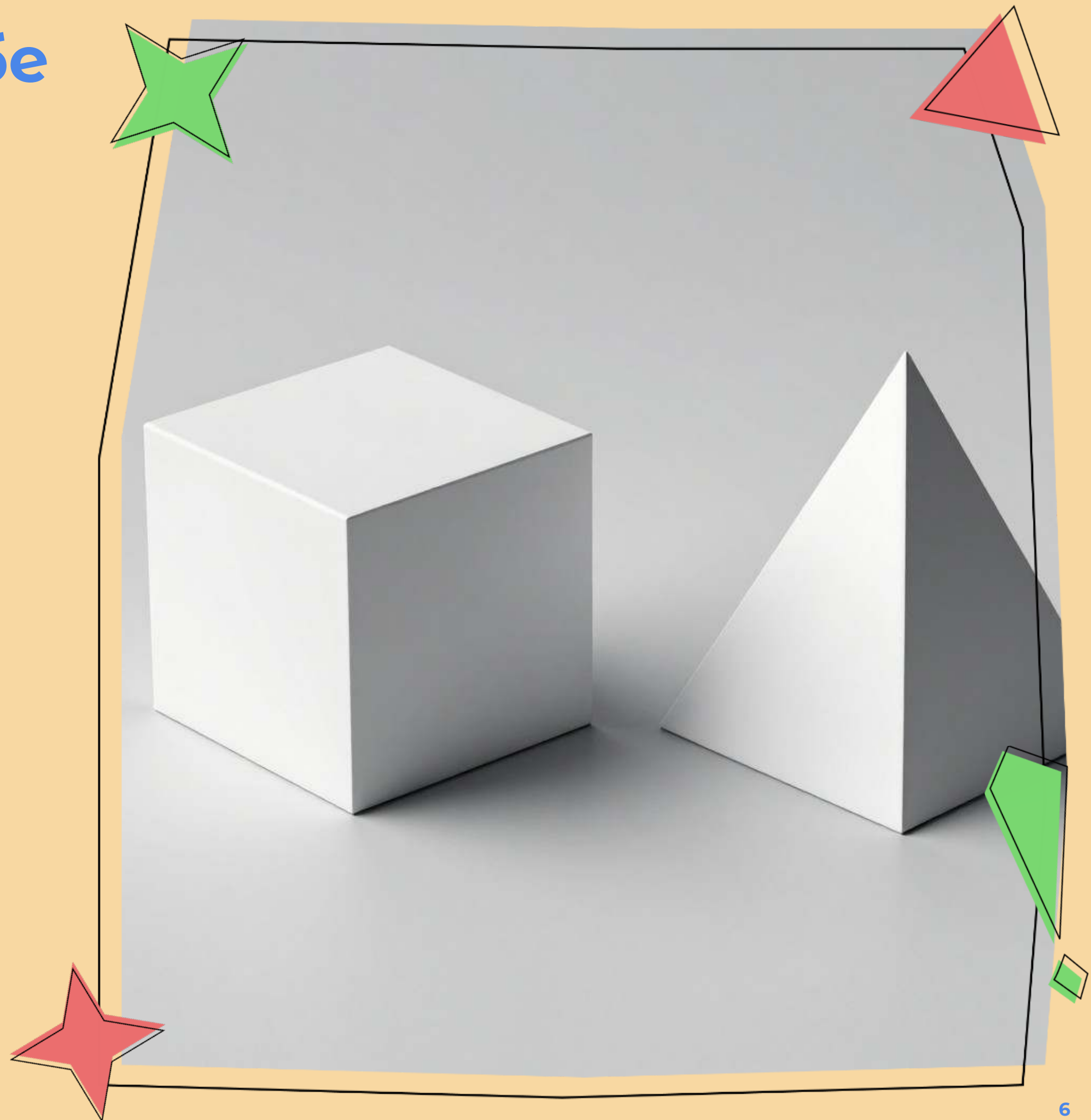
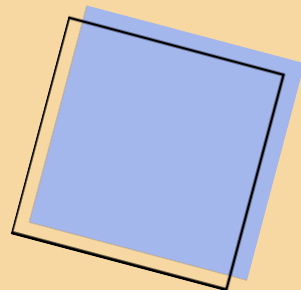
Многогранный угол в кубе и пирамиде

Куб: три перпендикулярных ребра в вершине

В каждой вершине куба сходятся три взаимно перпендикулярных ребра. Поэтому пространственный угол можно описать тремя плоскими углами по 90° : это помогает быстро переходить к вычислениям.

Правильная четырёхугольная пирамида: зависимость от высоты и основания

У правильной четырёхугольной пирамиды в вершине сходятся четыре боковые грани. Величина многогранного угла определяется высотой пирамиды и размерами основания, то есть тем, как боковые грани «наклонены» относительно общей вершины.

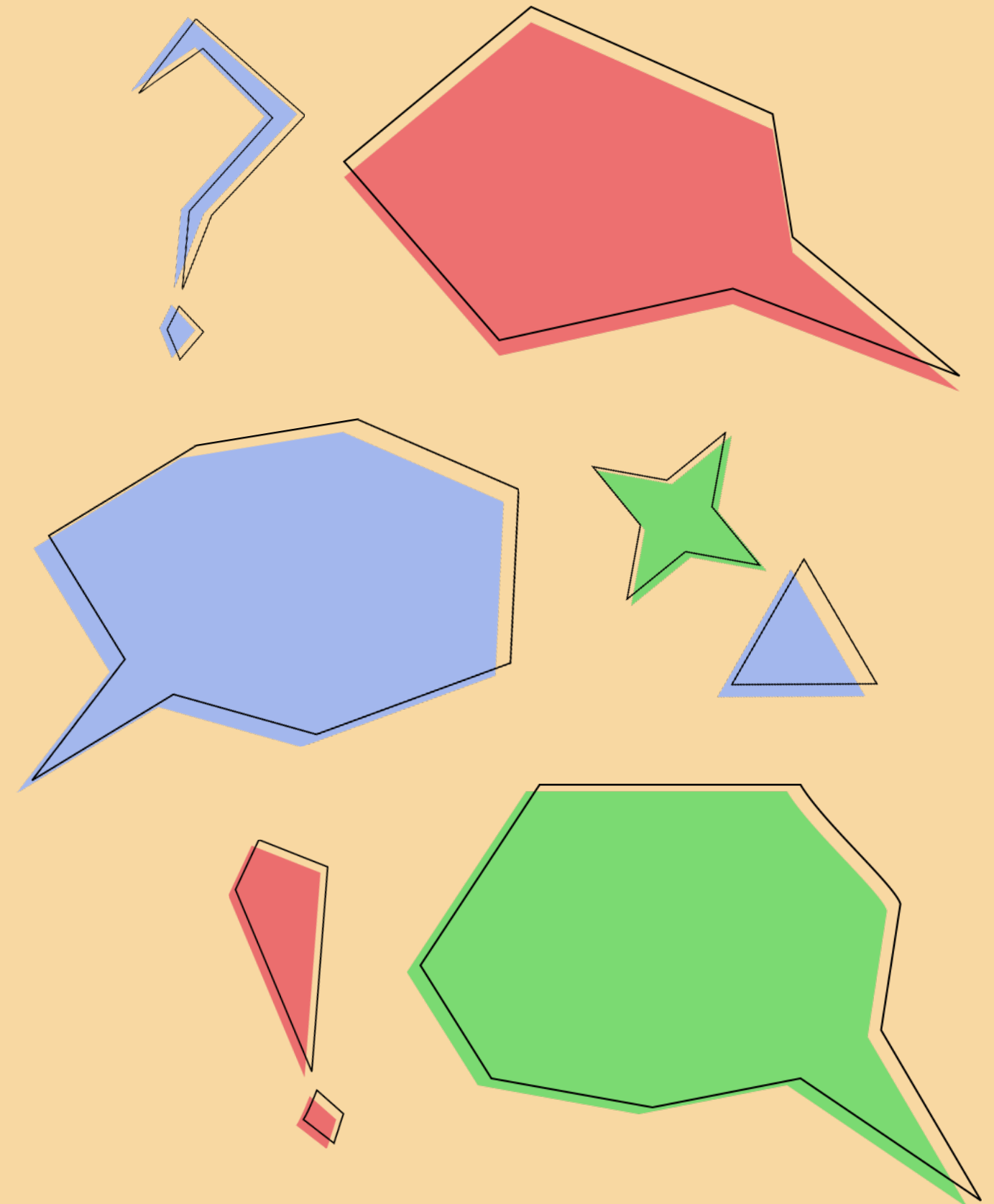
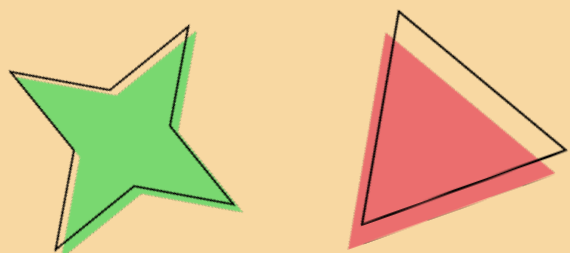


Плоские углы как основа измерения пространственного угла

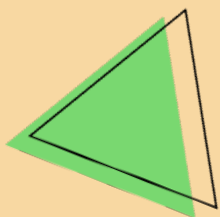
Величина многогранного угла связана с тем, какие плоские углы образуют его грани и как они «повёрнуты» друг относительно друга в пространстве. Поэтому старт всегда делают с плоской картины.

В правильных телах помогает симметрия: равенство ребер и граней часто задаёт равенство соответствующих плоских углов. В произвольных случаях опираются на известные длины ребер и углы между плоскостями.

Практически важный шаг для 10 класса — превращать пространственную задачу в набор плоских треугольников. Тогда можно применять известные формулы и аккуратно восстанавливать нужный пространственный угол.

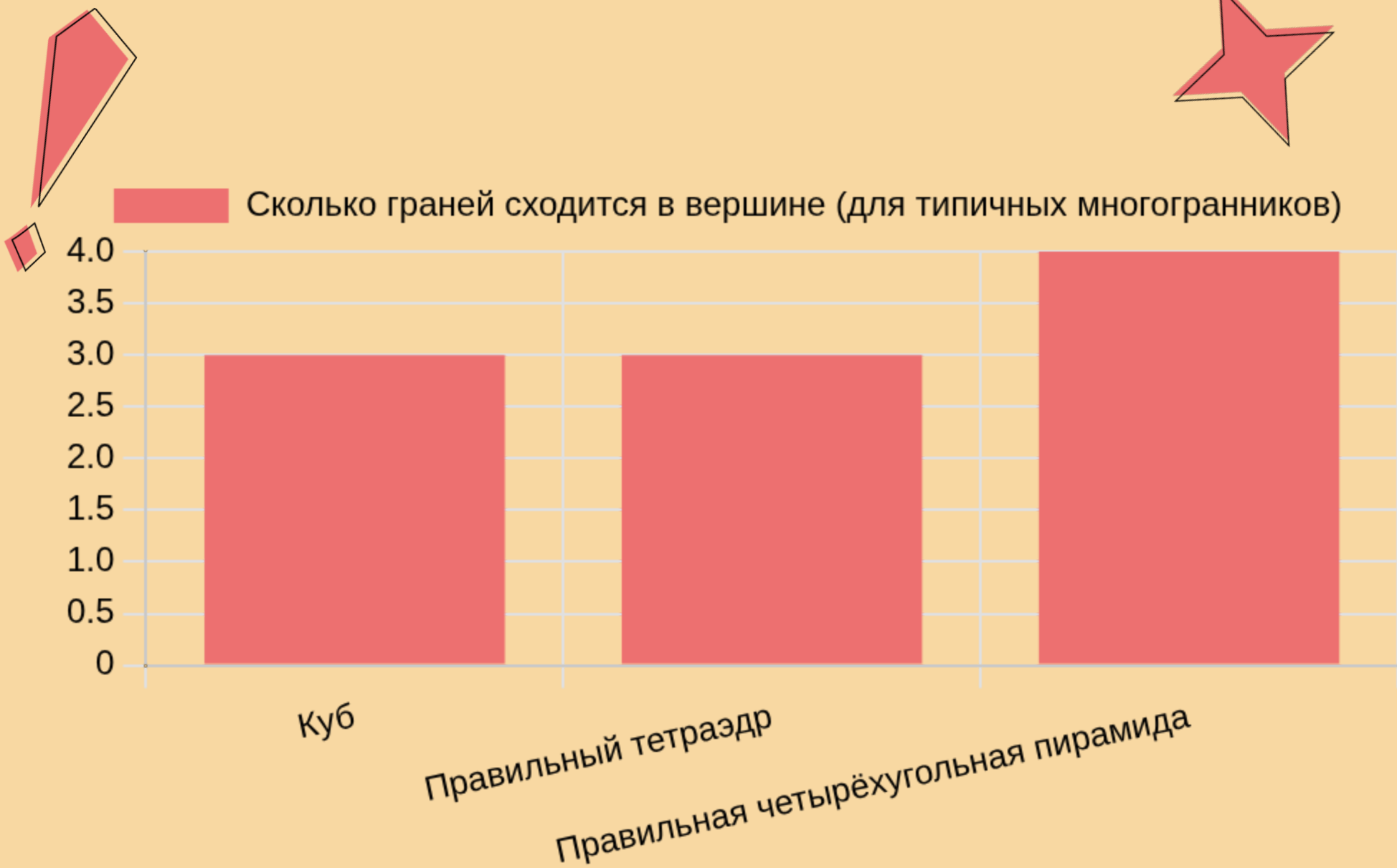


Сравнение углов при вершинах разных многогранников

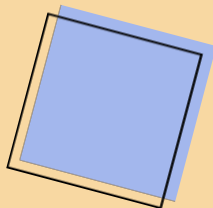
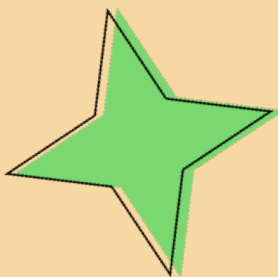


Число сходящихся граней влияет на структуру «раскрытия» вершины: чем их больше, тем сложнее геометрия связей.

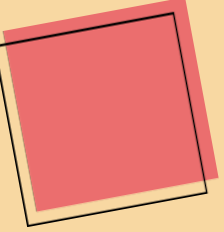
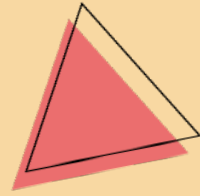
По данным видно: куб и тетраэдр имеют одинаковое число граней в вершине, а пирамида выделяется — это обычно отражается на количестве вспомогательных построений.



Справочная геометрия правильных многогранников (число граней, сходящихся в вершине).



Вычисление многогранного угла через теорему косинусов



1) Постройте сечение

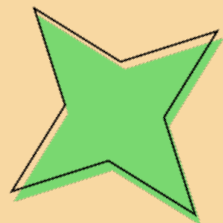
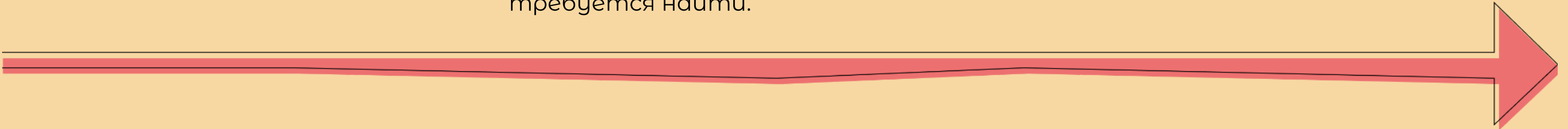
Через нужные рёбра/точки проводят плоскость так, чтобы в сечении получились треугольники, содержащие интересные ребра и отрезки. Важно явно обозначить длины на рисунке.

2) Запишите данные для треугольников

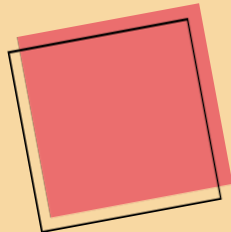
В каждом треугольнике используют известные стороны и отрезки: длины сторон, диагонали, высоты или элементы основания. Уточняют, какие углы там требуется найти.

3) Примените теорему косинусов

Для треугольника с известными сторонами находят косинус нужного плоского угла по теореме косинусов, затем переходят к значению пространственного угла по геометрической связи.

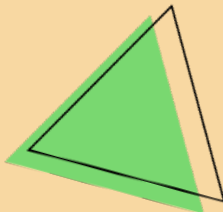


Типовые задачи на многогранные углы и методы решения

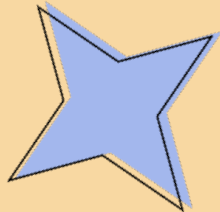


Тип задачи	Данные	Метод
Задача при вершине пирамиды	рёбра, высота, параметры основания	сечение и теорема косинусов
Сравнение углов	набор плоских углов, симметрия	признаки равенства и сопоставление граней
Доказать равенство углов	равные рёбра, равные треугольники	анализ равнобедренных/равносторонних

Схемы решения школьных задач по стереометрии (обобщение типовых подходов).



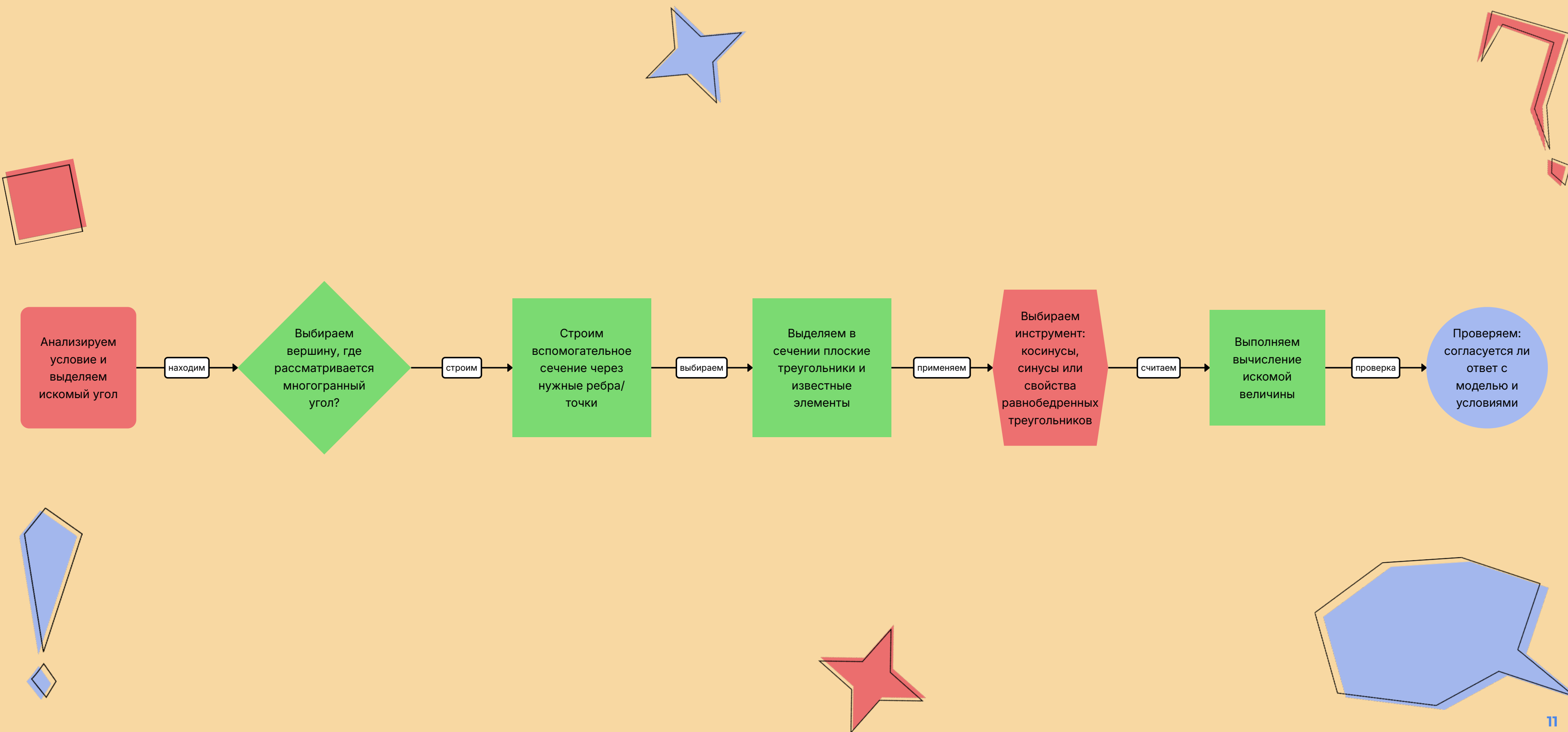
Разные условия дают разные «зацепки»: иногда выгоднее сечение, иногда — симметрия, а иногда требуется разбор равных треугольников.



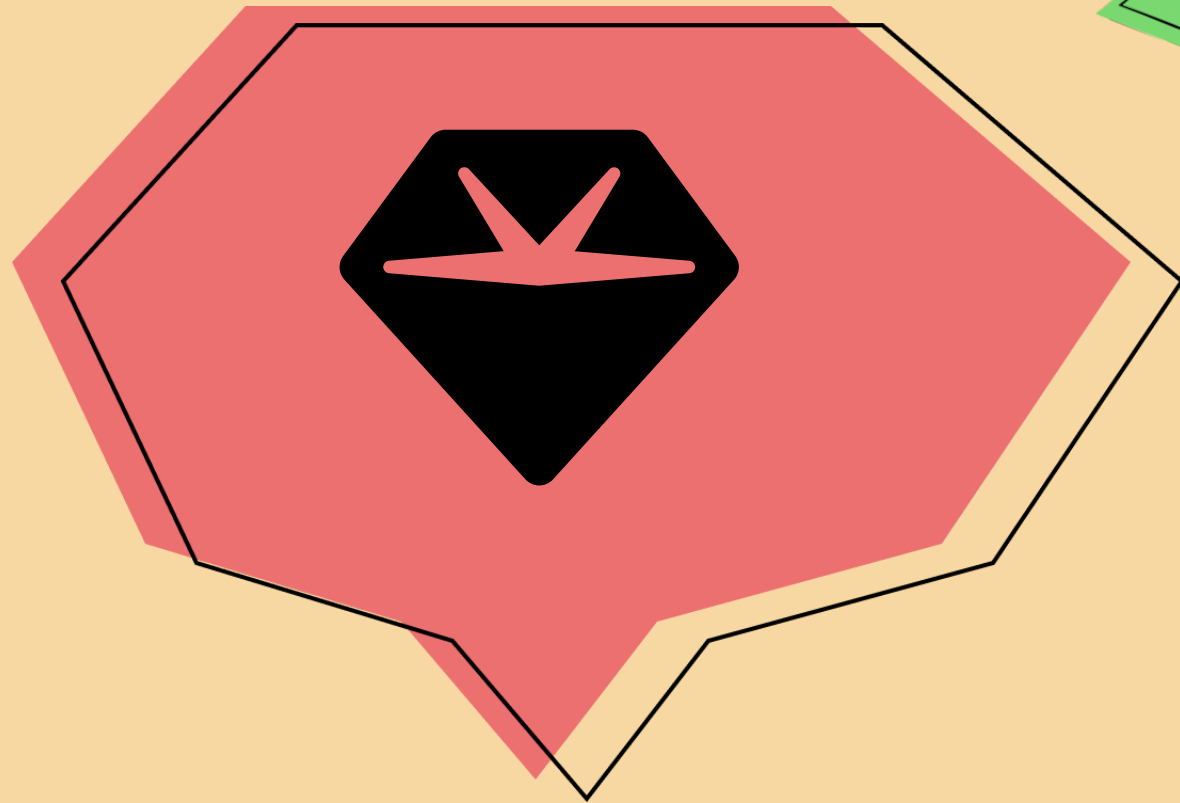
Метод выбирают по тому, какие элементы известны: их количество и взаимосвязи определяют, удастся ли свести задачу к плоским вычислениям.

Алгоритм решения задач на многогранные углы

Пошаговый план, который помогает перейти от рисунка к вычислению пространственного угла

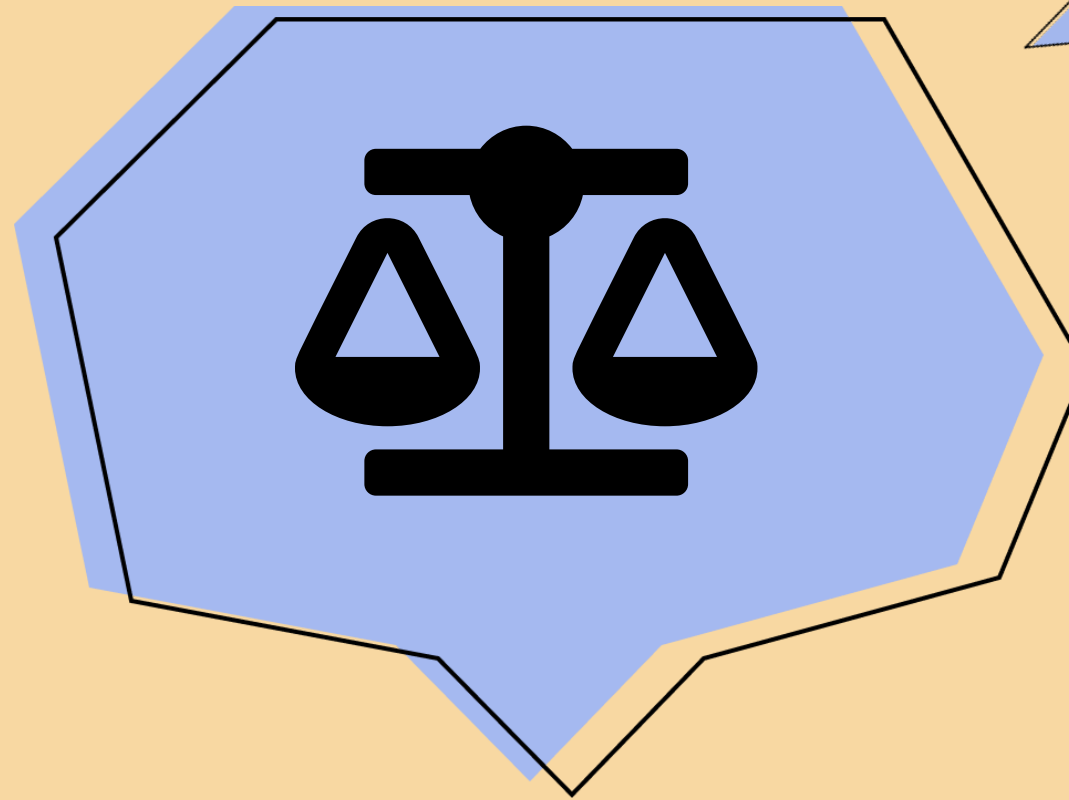
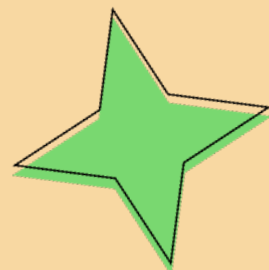


Связь многогранного угла с вершинами многогранников



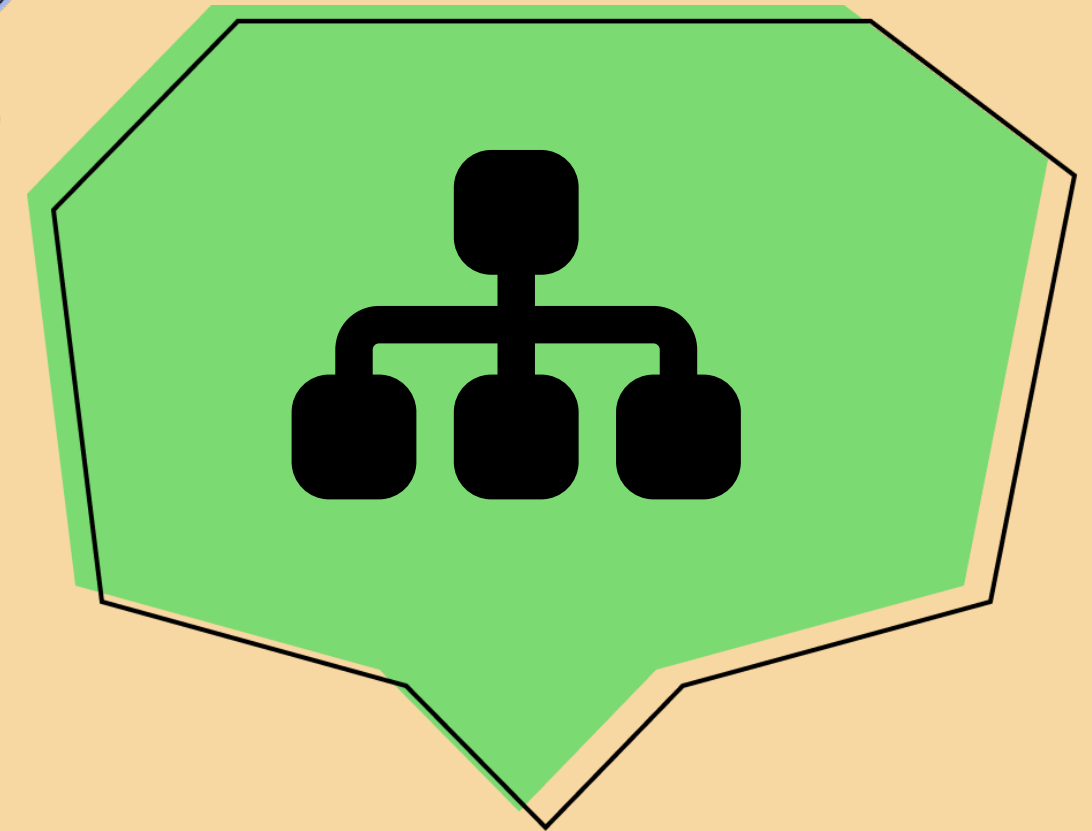
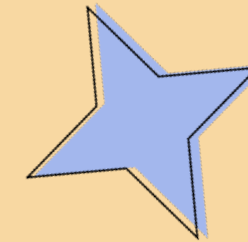
Вершина задаёт геометрию угла

Каждая вершина многогранника порождает свой многогранный угол: в точке сходятся прилегающие грани. Понимание вершины помогает «считывать» форму тела без лишних догадок.



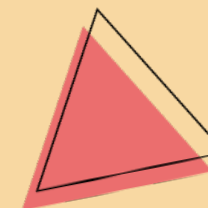
Правильные фигуры — повторяемость элементов

В правильных многогранниках все вершины устроены одинаково. Поэтому многогранные углы при разных вершинах равны, а вычисления можно выполнять по одному «типичному» случаю.

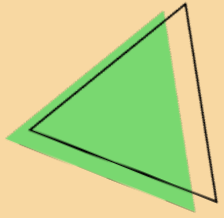


В произвольных фигурах вершины различаются

Если многогранник не является правильным, у разных вершин может отличаться число прилегающих граней и величина пространственного угла. Тогда анализируют конкретную вершину из условия задачи.

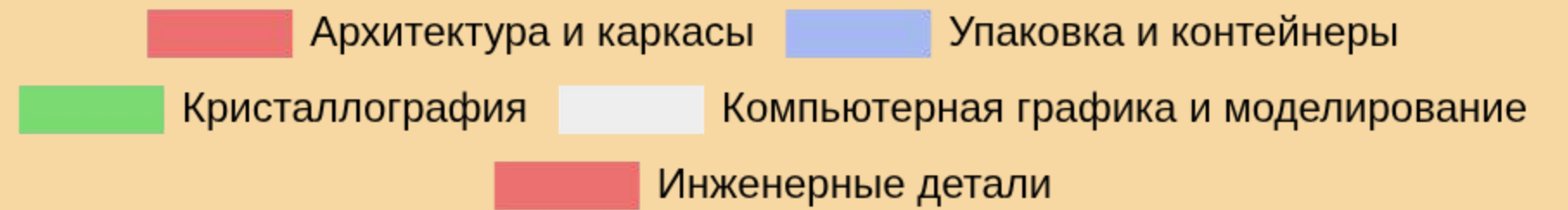
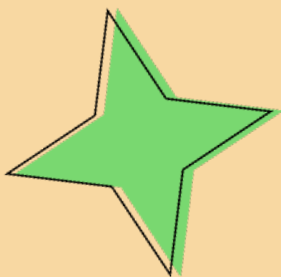


Где встречаются многогранные углы в реальной жизни

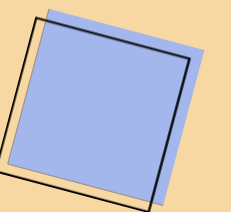
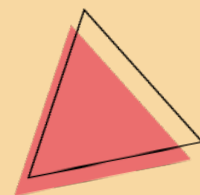


Хотя диаграмма условная, она показывает общий принцип: пространственные вершины важны там, где требуется соединение поверхностей и расчёт формы.

Во всех перечисленных сферах многогранный угол связывает «границы и направления». Поэтому умение мыслить вершинами напрямую переносится на практические задачи.



Условная разметка по тематике школьных задач и учебных примеров; точные статистические доли не приводятся.



Сечение как способ увидеть скрытую структуру

Почему сечение упрощает пространственный угол

Плоскость сечения превращает многогранный угол в набор плоских фигур, чаще всего в треугольники. Благодаря этому становится проще связать ребра, высоты и углы, которые в пространстве «маскируются» наложением.

Что именно появляется на чертеже после сечения

На схеме важно показать линию сечения и точки пересечения с ребрами. Тогда известные и искомые элементы можно обозначить на плоских фигурах и вычислять их привычными методами.



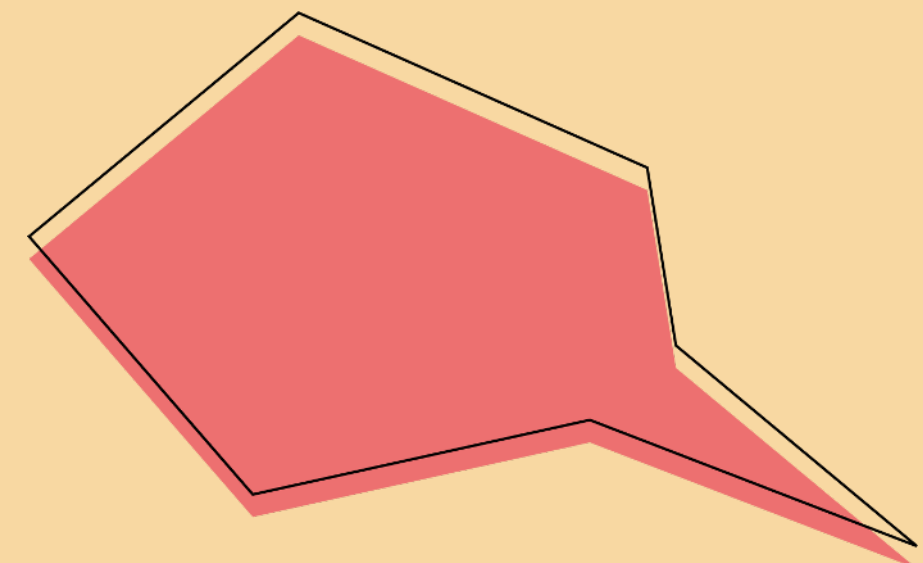
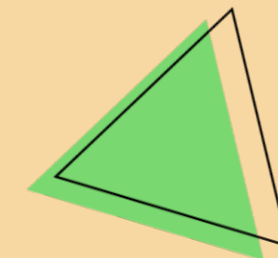
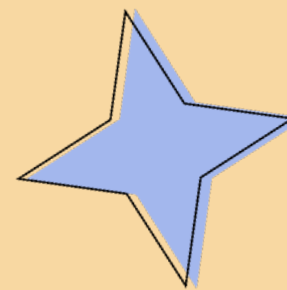
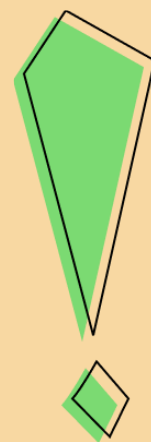
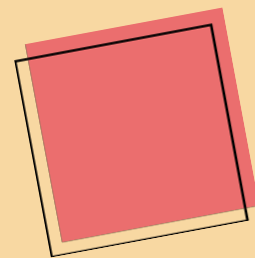
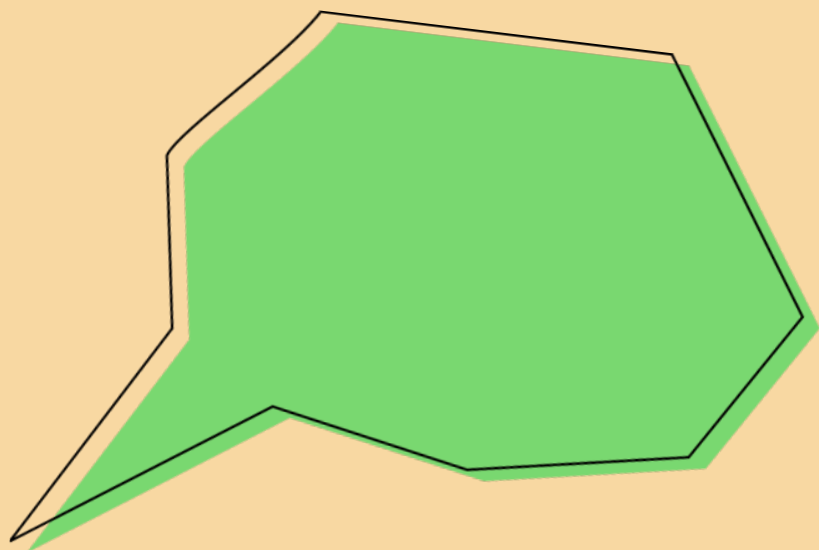
Типичные ошибки при изучении многогранного угла

Путают многогранный угол с двугранным: у них разный «набор» граней и разная пространственная модель. В результате неверно выбирают форму для дальнейших построений и вычислений.

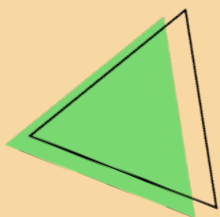
Случается ошибочный подсчёт граней и ребер, особенно на чертежах с несколькими пересекающимися плоскостями. Тогда сечение строят не через те ребра, и все последующие вычисления теряют точность.

Смешивают углы: плоский угол на грани принимают за пространственный при вершине. Это приводит к подмене задачи и к числу, которое не соответствует геометрии тела в целом.

Иногда игнорируют общую вершину, из-за чего фигура распознаётся неправильно: «разрывается» связь между прилегающими гранями. Правильная работа начинается с выделения всех элементов, затем идут расчёты.

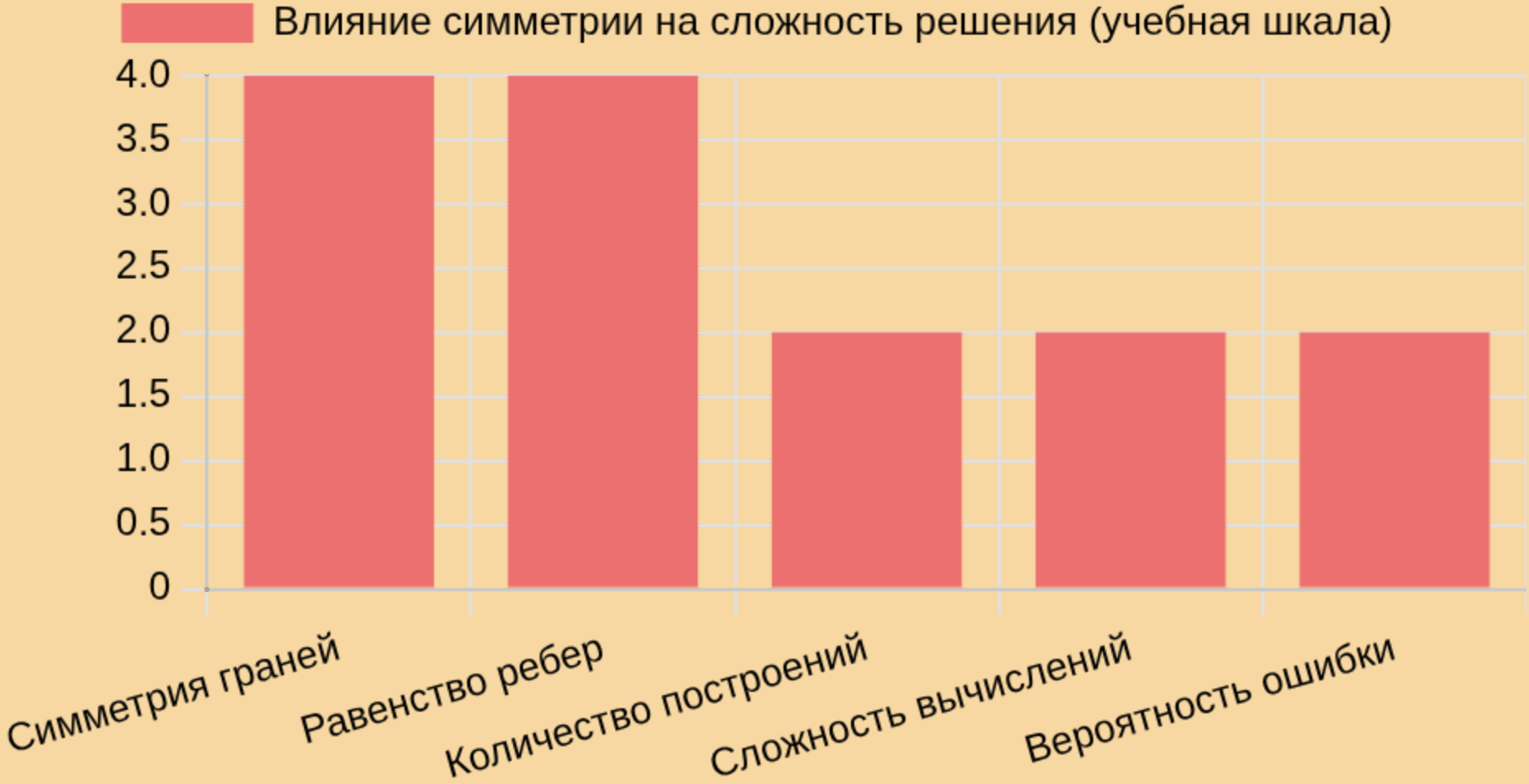
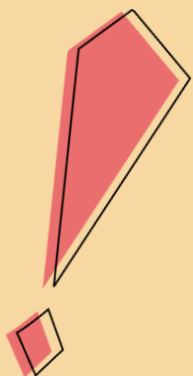
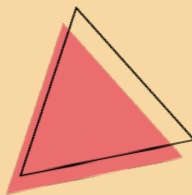
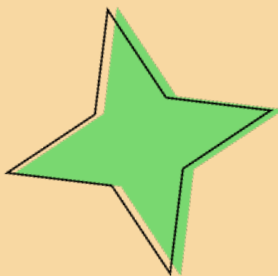


Симметричные и несимметричные случаи в задачах

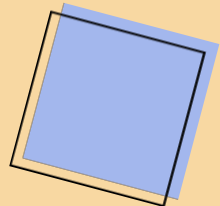


На симметричных моделях элементы повторяются, поэтому часть шагов «сокращается»: меньше разбиений и проверок. В несимметричных задачах приходится учитывать больше индивидуальных зависимостей.

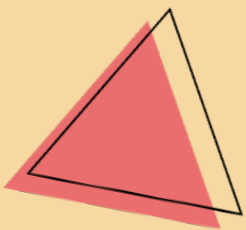
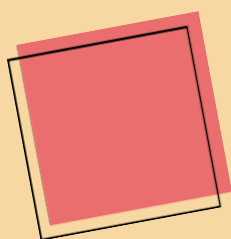
Диаграмма показывает: при росте симметрии снижается вычислительная нагрузка и уменьшается число критических мест, где легко ошибиться. Это делает структуру многогранного угла более предсказуемой.



Условная учебная шкала (оценка по методике решения); точные измерения в данных не приводятся.



Признаки, по которым распознают многогранный угол на чертеже

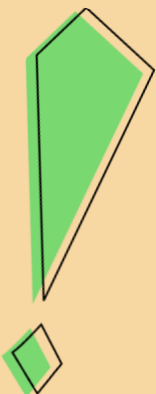
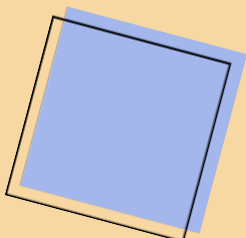
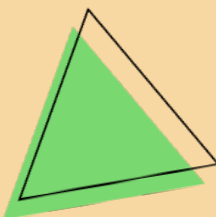


Признак	Значение
Общая вершина нескольких ребер	возможен многогранный угол
Несколько граней сходятся в точке	подтверждает пространственную конфигурацию
Равные боковые ребра	намекает на симметричную модель
Одинаковые грани	указывает на правильность/равенство плоских углов
Сечение через нужные ребра	переход к плоским треугольникам

Таблица помогает последовательно проверить рисунок: сначала находят вершину и прилегающие элементы, затем подтверждают конфигурацию через равенство граней или симметрию.

Распознавание начинается с структуры чертежа: только установив вершину, ребра и грани, переходят к формальным вычислениям и выбирают подходящий способ решения.

Методические наблюдения из практики решения задач по стереометрии (без статистики).

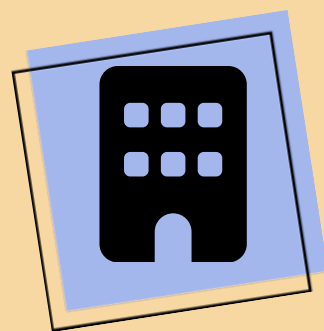


Практическая значимость темы для учёбы и профессий



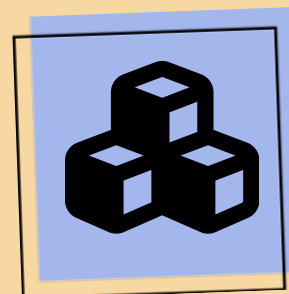
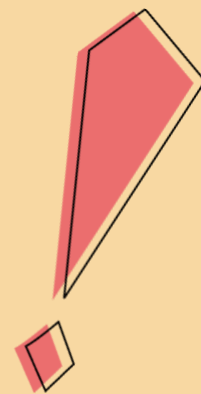
Инженерная геометрия

Многогранные углы нужны при проектировании узлов и пересечений поверхностей: от расчёта направления деталей до проверки геометрии соединений. Тема развивает умение переводить пространство в чертёж.



Архитектура и каркасы

В архитектуре пространственные вершины определяют форму крыш, реберные сети и усиления. Понимание многогранных углов помогает логично работать с сечениями и оценивать ключевые углы конструкций.



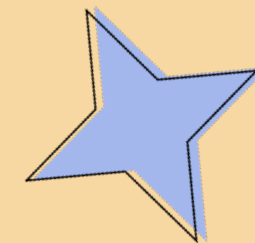
3D-моделирование и моделирование

В компьютерной графике объекты строятся как набор поверхностей, сходящихся в вершинах. Навык мыслить вершинами и гранями облегчает работу с полигональными моделями и анимацией.



Кристаллические формы

Кристаллы имеют упорядоченные вершины и грани, а их «пространственные углы» связаны со строением решётки. Геометрия многогранных углов помогает понимать модели атомных структур.

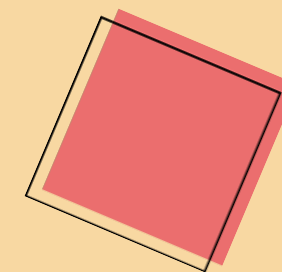
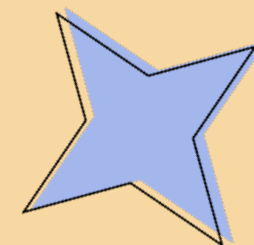
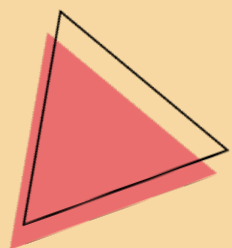
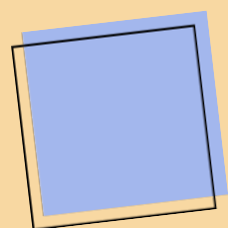
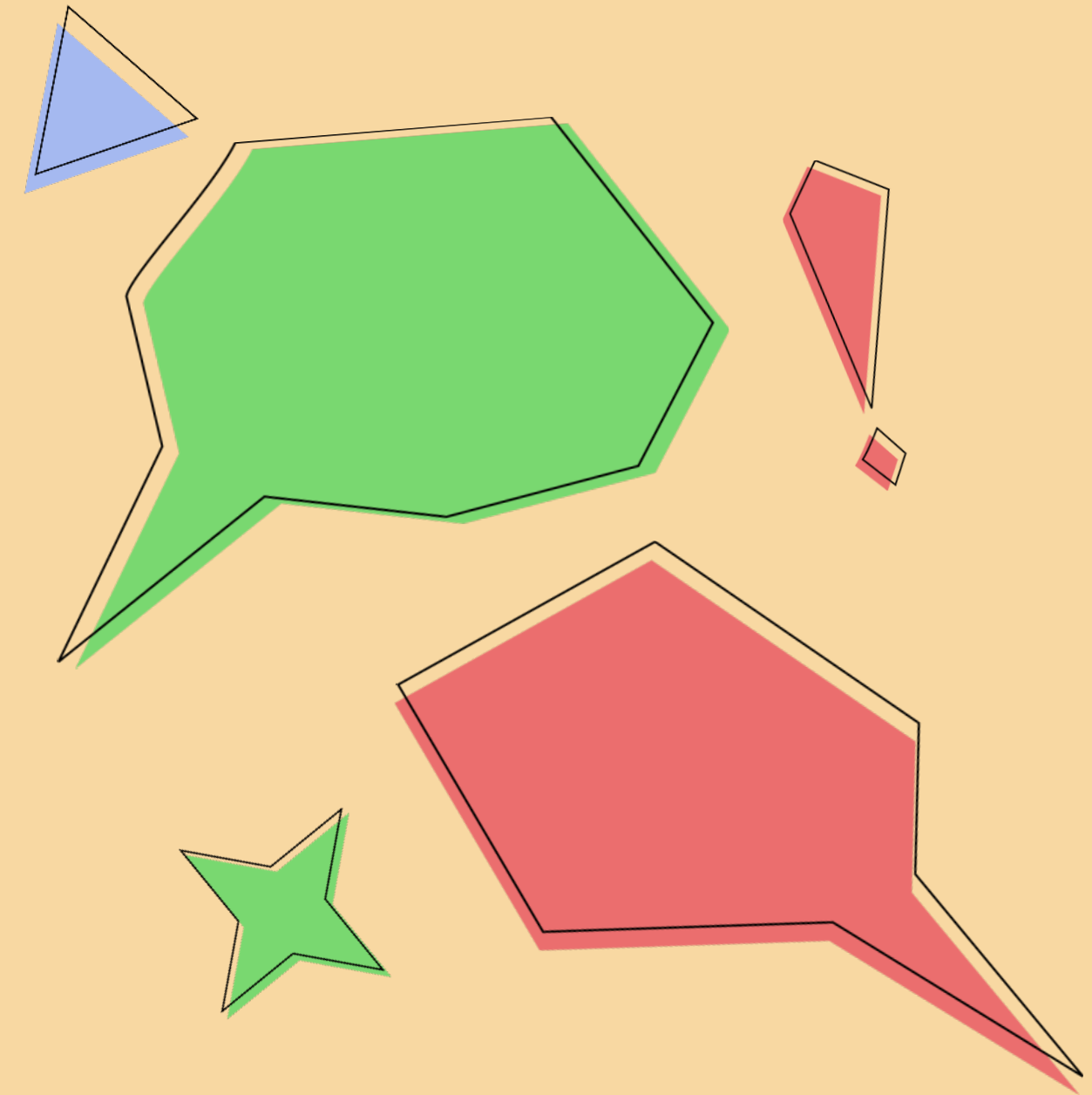


Что помогает уверенно решать задачи по теме

Сначала чётко выделяют вершину и все грани многогранного угла, которые сходятся в этой точке. От этого зависит корректность распознавания, а значит и дальнейшее построение сечения.

Далее выполняют аккуратный чертёж: обозначают известные элементы, проводят нужные линии и фиксируют треугольники в сечении. Чем чище рисунок, тем проще выбрать формулу и избежать подмены объектов.

Полезно применять теорему косинусов к треугольникам и помнить свойства прямоугольных, равнобедренных и равносторонних треугольников. В конце проверяют ответ по геометрическим ограничениям и смыслу задачи.





Многогранный угол как модель пространства

Многогранный угол связывает плоскую и пространственную геометрию: он описывается вершиной, ребрами, гранями и плоскими углами. Решение опирается на сечения, симметрию и тригонометрию, развивая пространственное мышление.

