

Синус и косинус в геометрии: углы, стороны и координаты

Как угол связан с длиной и положением точки?

Зачем в 7 классе знакомятся с синусом и косинусом



Эти понятия связывают треугольники, углы и координатную плоскость. На простых примерах с прямоугольным треугольником и единичной окружностью удобно увидеть, как один угол помогает находить стороны и координаты точки.



Синус и косинус в прямоугольном треугольнике

Синус угла

1

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Это отношение показывает, насколько высокая сторона связана с наклоном треугольника.

Косинус угла

2

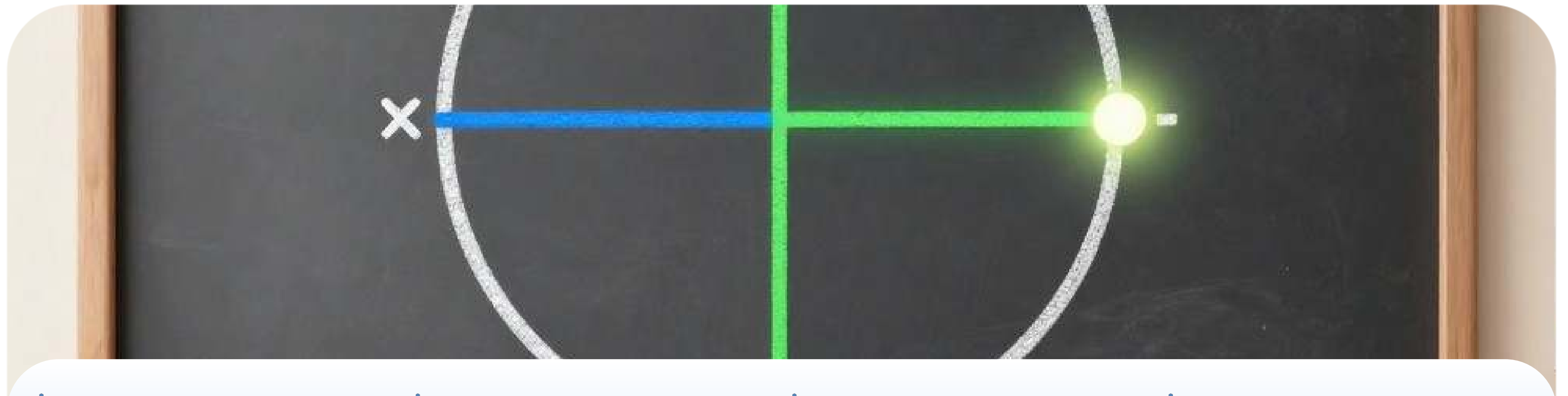
Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Он помогает определить, какую часть гипотенузы составляет горизонтальная сторона при данном угле.

Не зависит от размера

3

Если два прямоугольных треугольника подобны и имеют одинаковый угол, то значения синуса и косинуса совпадают. Поэтому функции зависят от угла, а не от величины самого рисунка.

Единичная окружность и координаты точки :::



+ Координаты точки

На окружности радиуса 1 каждой точке, соответствующей углу α , отвечают координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Так геометрический угол сразу превращается в пару чисел на плоскости.

+ Горизонталь и вертикаль

Косинус показывает положение точки по оси x , а синус — по оси y . Поэтому при движении точки по окружности легко отслеживать изменение обеих координат.

+ Плавное изменение

Когда точка поворачивается по окружности, значения синуса и косинуса меняются постепенно, без скачков. Их величины зависят от того, в какой четверти находится точка.

+ Опорные направления

Углы 0° , 90° , 180° и 270° помогают ориентироваться на окружности. На них особенно удобно видеть, где значения равны нулю, единице или меняют знак.

Значения синуса и косинуса для основных углов



Угол	sin	cos
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

- + Таблица показывает опорные значения, которые чаще всего нужны в школьных задачах.
- + При переходе от 0° к 90° синус растёт, а косинус убывает. Значения для 30° и 60° меняются местами, а угол 45° даёт равные числа.
- Стандартные значения синуса и косинуса для углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90°

Как меняются синус и косинус при увеличении угла

Графики помогают увидеть периодичность: значения повторяются через полный оборот и остаются в пределах от -1 до 1 .

Синус и косинус изменяются плавно и повторяют форму волны, но сдвинуты относительно друг друга по углу.

Типичные значения синуса и косинуса на углах 0° , 90° , 180° , 270° и 360°

Знаки синуса и косинуса по четвертям

Первая четверть

И синус, и косинус положительные. Здесь точка находится в правой верхней части плоскости, поэтому обе координаты имеют знак плюс.

Вторая четверть

Синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным. Точка расположена слева сверху, поэтому вертикальная координата больше нуля, а горизонтальная меньше нуля.

Третья четверть

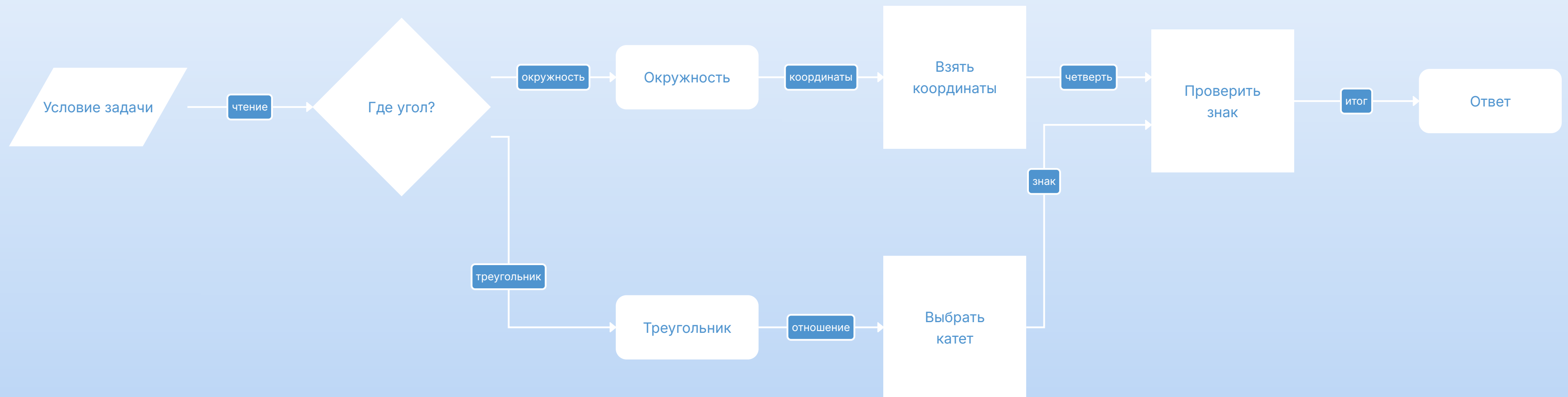
В третьей четверти оба значения отрицательные. Точка находится слева снизу, и это сразу подсказывает отрицательные знаки для обеих координат.

Четвёртая четверть

Косинус положительный, а синус отрицательный. Точка расположена справа снизу, поэтому горизонтальная координата становится положительной, а вертикальная — отрицательной.

Как находят синус и косинус в задаче

Алгоритм помогает выбрать нужную модель и не перепутать отношение сторон или знак ответа.



Формула $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ помогает проверять вычисления и находить неизвестное значение, если известно только одно из двух.

1

показывает, что сумма квадратов координат точки на единичной окружности всегда равна

Следствие теоремы Пифагора для точки на единичной окружности

Синус и косинус в жизни: лестница, тень и наклон :::

Лестница у стены

Если лестница стоит у стены, она образует прямоугольный треугольник с полом и стеной. По известному углу у основания можно найти высоту, на которую поднялась верхняя точка, или расстояние от стены до нижнего конца лестницы.



Тень на земле

Высота дерева или столба часто определяется по длине тени и углу падения солнечных лучей. В такой задаче синус и косинус связывают видимую высоту, горизонтальное расстояние и наклон луча, помогая получить нужную величину без прямого измерения.



Наклон дорожки и крыши

Если дорога идёт вверх или крыша имеет скат, угол наклона можно связать с длиной участка и его подъёмом. Тогда синус показывает вертикальный подъём, а косинус — горизонтальную часть, что удобно для расчётов в реальных ситуациях.



Сравнение значений на ключевых углах

На 30° и 60° особенно заметно, как синус и косинус дополняют друг друга.

Значения плавно меняются от 0 до 1, а у 30° и 60° они меняются местами.

Точные значения $\sin$ и $\cos$ для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90° из школьной тригонометрии.

Опорные пары, которые важно запомнить

- Точные значения $\sin$ и $\cos$ для опорных углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90° .

Угол	$\sin$	$\cos$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

Эти значения удобно использовать как ориентир при решении задач и проверке вычислений.

Пары 30° и 60° взаимно дополняют друг друга, а 45° выделяется равенством $\sin$ и $\cos$.

Типичные ошибки при работе с синусом и косинусом :::



Путают функции

Часто вместо синуса берут косинус или наоборот, поэтому выбирают не тот катет. Полезно сразу отмечать: противолежащий катет связан с синусом, прилежащий — с косинусом.



Не учитывают четверть

На координатной плоскости знак зависит от четверти. Если забыть, где расположен угол, можно получить правильное число с неверным знаком, и ответ станет ошибочным.



Ожидают слишком большие значения

Синус и косинус не выходят за пределы от -1 до 1 . Если в ответе получилось больше единицы или меньше минус единицы, вычисление нужно перепроверить.



Неверно читают рисунок

Иногда угол берут не от той стороны или путают обозначения на чертеже. Важно внимательно смотреть, где отмечен острый угол и какая сторона является гипотенузой.

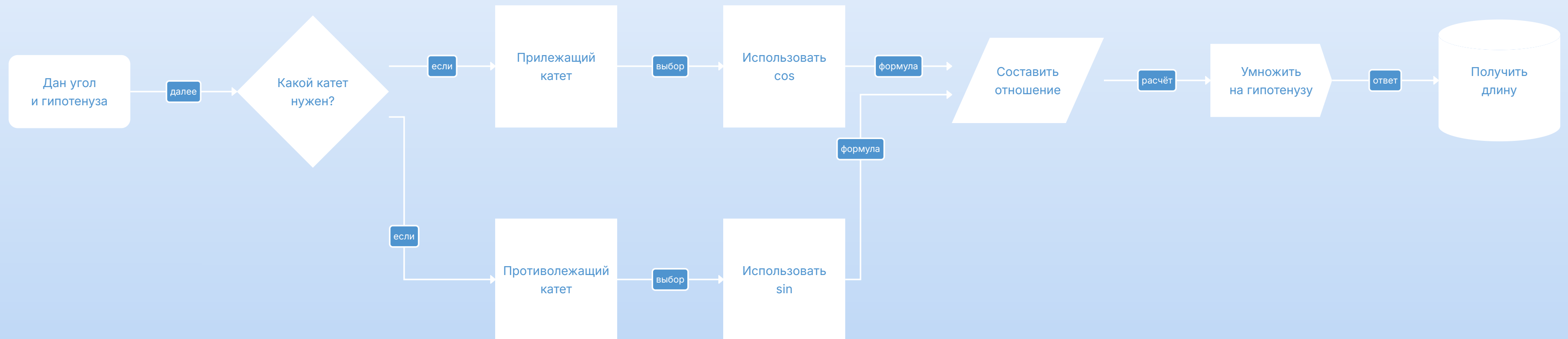


Смешивают единицы

Градусы нельзя подменять другими единицами измерения без указания. Если в задаче дан угол в градусах, то и вычисления нужно вести именно в градусах.

Шаги решения задачи с прямоугольным треугольником

Последовательность действий при нахождении катета по углу и гипотенузе



Волны и повторяющиеся движения

:::



+ Похожая форма

Графики синуса и косинуса выглядят как плавные волны, потому что значения функций постоянно меняются и затем повторяются. Такая форма удобна для описания циклических процессов.

+ Примеры вокруг нас

Подобные изменения встречаются в колебаниях маятника, струны, уровня воды и звуковых сигналов. Во всех этих случаях движение или изменение происходит не один раз, а регулярно.

+ Смысл модели

Синус и косинус помогают не просто рисовать волну, а точно описывать её форму. Поэтому их используют, когда нужно понять, как меняется величина во времени или в пространстве.

Амплитуда и период на графике волны

На рисунке удобно отметить, где волна поднимается выше средней линии и где снова повторяет прежний ход.

Амплитуда показывает высоту отклонения, а период — повторяемость формы; это помогает сравнивать волны одинакового вида.

Схематическая модель волны по свойствам синуса и косинуса, без использования экспериментальных данных.

Где встречаются синус и косинус



Строительство

При расчётах наклона крыши, высоты стены или длины лестницы используют углы и стороны треугольника. Это помогает сделать конструкцию точной и безопасной.



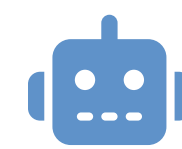
Навигация

В навигации синус и косинус помогают определить направление движения и положение объекта. Они нужны там, где важно связать поворот, расстояние и угол.



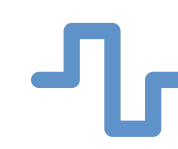
Компьютерная графика

На экране объекты поворачивают, перемещают и размещают по координатам. Тригонометрические функции помогают вычислять новые положения точек после вращения или наклона.



Робототехника

Роботу важно точно знать, куда повернуться и на какое расстояние продвинуться. Синус и косинус помогают описывать движение деталей и траекторию.



Физика

В физике эти функции используют для описания колебаний, волн и периодических процессов. Они особенно полезны при изучении звука, света и движения маятника.

Переход от рисунка к формуле

Такая последовательность помогает не теряться: сначала рисунок, затем координаты, а потом уже формула и проверка ответа.

Геометрия, координаты и алгебра связываются в одну цепочку, поэтому задачу легче понять и проверить.

Схематическая последовательность на основе определения синуса и косинуса на единичной окружности.

Главные факты о синусе и косинусе

1

Определение в треугольнике

В прямоугольном треугольнике синус связан с противолежащим катетом, а косинус — с прилежащим. Оба отношения считают по одной и той же гипотенузе, поэтому размер треугольника не меняет значение.

2

Связь с окружностью

На единичной окружности косинус показывает горизонтальную координату точки, а синус — вертикальную. Поэтому по углу можно определить положение точки без дополнительных построений.

3

Границы значений

Значения синуса и косинуса всегда лежат между -1 и 1 . Это удобно для проверки: если ответ выходит за пределы, значит, в решении допущена ошибка.

4

Что важно помнить

Для 7 класса особенно полезны углы 30° , 45° , 60° и 90° , знаки по четвертям и формула $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Эти опоры помогают решать задачи быстрее.

Синус и косинус: от чертежа к пониманию движения

Синус и косинус помогают читать рисунок, работать с координатами и описывать повторяющиеся процессы. Эти знания станут опорой для более сложных задач в следующих классах.