

Производные элементарных функций

Осваиваем базовые правила дифференцирования.



Для чего нужна производная

Производная показывает, как быстро меняется функция и как ведёт себя её график.



Обозначения и область определения

Основные записи

В учебниках чаще всего используют записи $f'(x)$, y' и dy/dx ; все они обозначают одну и ту же идею — производную функции по переменной x .

1

Проверка области

Перед вычислением обязательно проверяют, где исходная функция определена, потому что производная может отсутствовать в отдельных точках области определения.

2

Дополнительные условия

Для некоторых формул заранее выделяют ограничения: $x > 0$, $x \neq 0$ или использование модуля, если логарифм или дробь требуют уточнения.

3

Границы применимости

Если выражение не имеет смысла в данной точке, говорить о производной нельзя, даже если формула выглядит привычно.

4

Как находить производную

Пошаговая схема помогает не пропустить ни одно правило и проверить ответ.

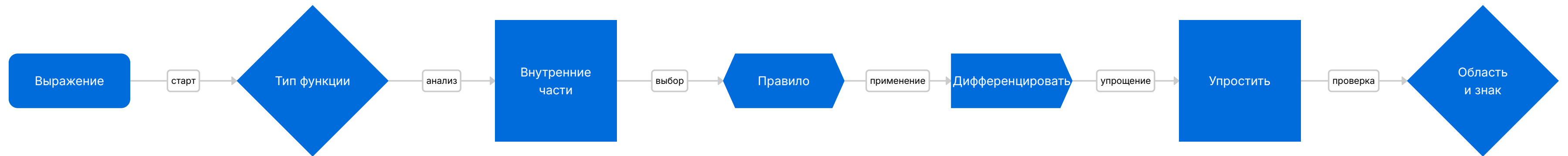


Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная
x	1
x^n	$nx^{(n-1)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$

Таблица собирает самые употребимые формулы, которые нужно узнавать без долгих вычислений.

Большинство производных либо сохраняют вид функции, либо сводятся к простому стандартному шаблону.

Линейность и производная константы

1. Сумма и разность

Если функция состоит из суммы или разности, производную находят по частям: сначала дифференцируют каждое слагаемое, затем собирают результат в одно выражение.

2. Множитель

Постоянный множитель можно вынести за знак производной, что значительно упрощает вычисления и уменьшает число промежуточных действий.

3. Константа

Любая постоянная величина после дифференцирования превращается в ноль, потому что её значение не меняется при изменении x .

4. Пример

Например, для $5x^3 - 2x + 7$ получаем $15x^2 - 2$: степень уменьшается на один, а свободный член исчезает.

Правило степени

Общий шаблон

Для степенной функции правило одинаково работает с целыми, отрицательными и дробными показателями, если выражение определено на рассматриваемой области.

1

Целые и отрицательные степени

Из него сразу следуют типовые ответы: $(x^5)' = 5x^4$ и $(x^{-2})' = -2x^{-3}$, поэтому важно аккуратно переписывать показатель после уменьшения на единицу.

2

Корень как степень

Для корня удобно помнить, что $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$, значит производная равна $1/(2\sqrt{x})$; это помогает быстро переходить от радикала к степени.

3

Экспонента и показательная функция

Сохранение вида

Показательные функции при дифференцировании не меняют свой тип: e^x остаётся e^x , а основание a^x сохраняется, но появляется множитель $\ln a$.

Удобство вычислений

Это делает экспоненту особенно удобной в вычислениях: достаточно помнить базовую формулу и затем применить правило цепочки, если аргумент сложнее.

Типовые примеры

Например, производная $e^{(3x)}$ равна $3e^{(3x)}$, а для 2^x получаем $2^x \ln 2$; здесь работает и стандартная формула, и умножение на производную аргумента.

Это значение важно как универсальная формула для логарифмов и модулей.

$$1/x$$

**появляется в производной
логарифма на всей
области определения**

Четыре базовые формулы помогают быстро узнавать производные тригонометрических функций и не путать знаки при вычислениях.

4

**формулы нужно
держат в памяти
без колебаний.**

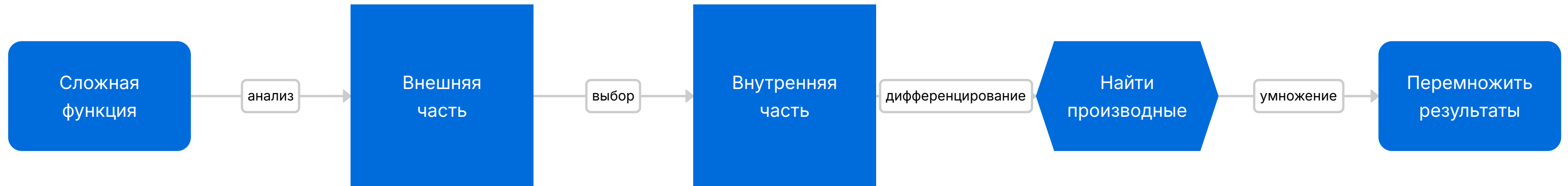
Три обратные тригонометрические производные особенно важны там, где функция задана через ограниченный промежуток значений.

3

основных формулы достаточно для школьных задач.

Правило цепочки

Пошаговый переход от структуры выражения к формуле $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.



В примере появляется один множитель 3 из внутренней функции, поэтому итоговая производная заметно отличается от обычного правила степени.

3
обязательно
появляется при учёте
внутренней функции.

Формула произведения даёт два слагаемых, потому что дифференцируются оба множителя и ни один из них нельзя пропустить.

2
слагаемых нужно
записать
при раскрытии правила.

В формуле частного знаменатель обязательно возводится в квадрат, иначе ответ получается неверным даже при правильных производных числителя.

2

**степень знаменателя
нельзя забывать
в окончательной записи.**

Практика №1

№	Выражение
1	$4x^3 - 7x$
2	e^x
3	$\sin x$
4	$(x^2 + 1)^4$
5	$x \cdot \ln x$

Авторский набор тренировочных заданий

Найдите производные пяти выражений. Оставьте место для записи промежуточных шагов и конечного ответа в каждой строке.

Примеры охватывают линейность, элементарные функции, цепочку и произведение.

Проверка практики №1

1. 1. Линейный многочлен

Для первого выражения применяется правило степени и линейность: производная $4x^3$ равна $12x^2$, а производная $-7x$ даёт -7 . В итоге получаем $12x^2 - 7$.

2. 2. Экспонента

Во втором примере экспонента сохраняет форму при дифференцировании, поэтому ответ сразу равен e^x . Здесь важно не добавлять лишние коэффициенты и не менять показатель.

3. 3. Тригонометрия

Для $\sin x$ используется стандартная таблица производных: результатом становится $\cos x$. Это один из самых узнаваемых переходов, который стоит довести до автоматизма.

4. 4. Составная функция

В четвёртом выражении нужна цепочка: внешняя степень даёт множитель 4, затем производная внутреннего выражения равна $2x$. Поэтому ответ записывается как $4(x^2 + 1)^3 \cdot 2x$.

5. 5. Произведение

В пятом примере действует правило произведения: производная x равна 1, а производная $\ln x$ равна $1/x$. После упрощения получаем $\ln x + 1$.

От формул к уверенным вычислениям

Главная идея темы в том, что сложные производные собираются из нескольких простых правил. Если уверенно знать таблицу, цепочку, произведение и частное, любые школьные примеры становятся предсказуемыми и проверяемыми.