

Область определения и множество значений тригонометрически х функций

Разберём, когда тригонометрические функции имеют смысл и какие ответы они могут давать.



Почему тема важна в 11 классе

Область определения отвечает на вопрос «когда можно считать», а множество значений — «что получится». В тригонометрии это особенно заметно: для одних функций запретов нет, а у $\tan$ и $\cot$ они возникают из-за деления. Это напрямую нужно для уравнений вида $\sin x = a$ и т. п.

1

Поскольку точка лежит на окружности радиуса 1, её координаты по модулю не превосходят 1.
Единичная окружность и геометрическое определение $\sin x$, $\cos x$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены для любых действительных x , а их значения — это ордината и абсцисса точки единичной окружности.

Откуда берутся границы значений $\sin x$ и $\cos x$

- 1 Единичная окружность имеет радиус 1, значит расстояние от центра до любой точки фиксировано. Поэтому координаты точки не выходят за рамки отрезка $[-1; 1]$ по оси абсцисс и по оси ординат.
- 2 Синус принимает максимальное значение 1, когда точка оказывается на верхней полуоси: это соответствует углам вида $\pi/2 + 2\pi k$. Минимум -1 получается в симметричном положении на нижней полуоси.
- 3 Для косинуса «пик» 1 достигается при совпадении точки с правой полуосью: $x = 2\pi k$. Соответствующий минимум -1 достигается, когда точка попадает на левую полуось: $x = \pi + 2\pi k$.
- 4 Эти значения возникают не случайно: они прямо связаны с положениями точек на осях координат. Геометрия объясняет, почему именно -1 и 1 становятся границами допустимых ответов.

Тангенс: область определения и множество значений

1

$\tan x$ задаётся через отношение $\sin x$ к $\cos x$, то есть $\tan x = \sin x / \cos x$. Поэтому функция «ломается» там, где знаменатель равен нулю: $\cos x = 0$.

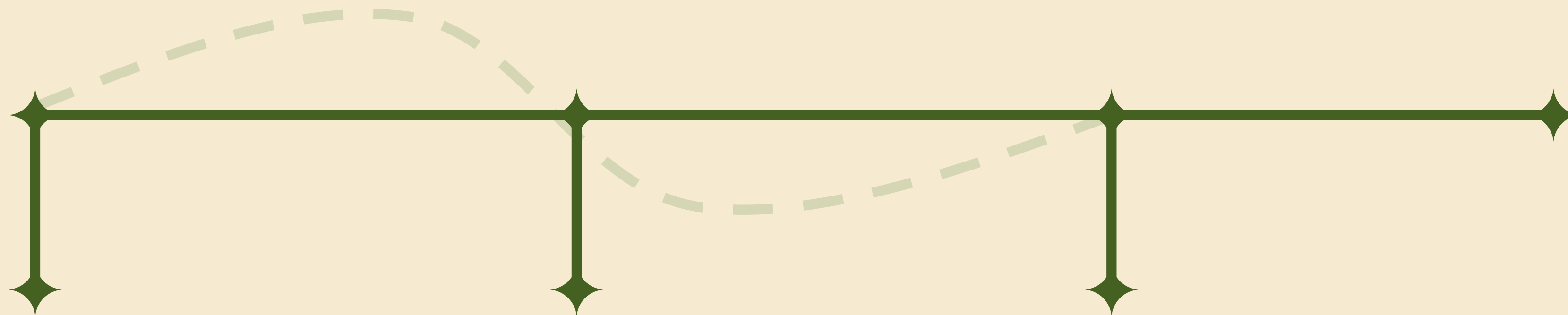
2

Решая $\cos x = 0$, получаем запрещённые точки $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этих значениях вычисление невозможно, а во всех остальных $\tan x$ принимает любые действительные числа.

3

Значит область определения $\tan x$ — это $\mathbb{R}$ без точек $x = \pi/2 + \pi k$. Множество значений равно $\mathbb{R}$, и график имеет вертикальные асимптоты в местах разрыва.

Котангенс: область определения и множество значений



Шаг 1: формула

Котангенс определяется как $\cot x = \cos x / \sin x$. Следовательно, ключевое ограничение возникает при нулевом знаменателе — когда $\sin x$ обращается в ноль.

Шаг 2: область определения

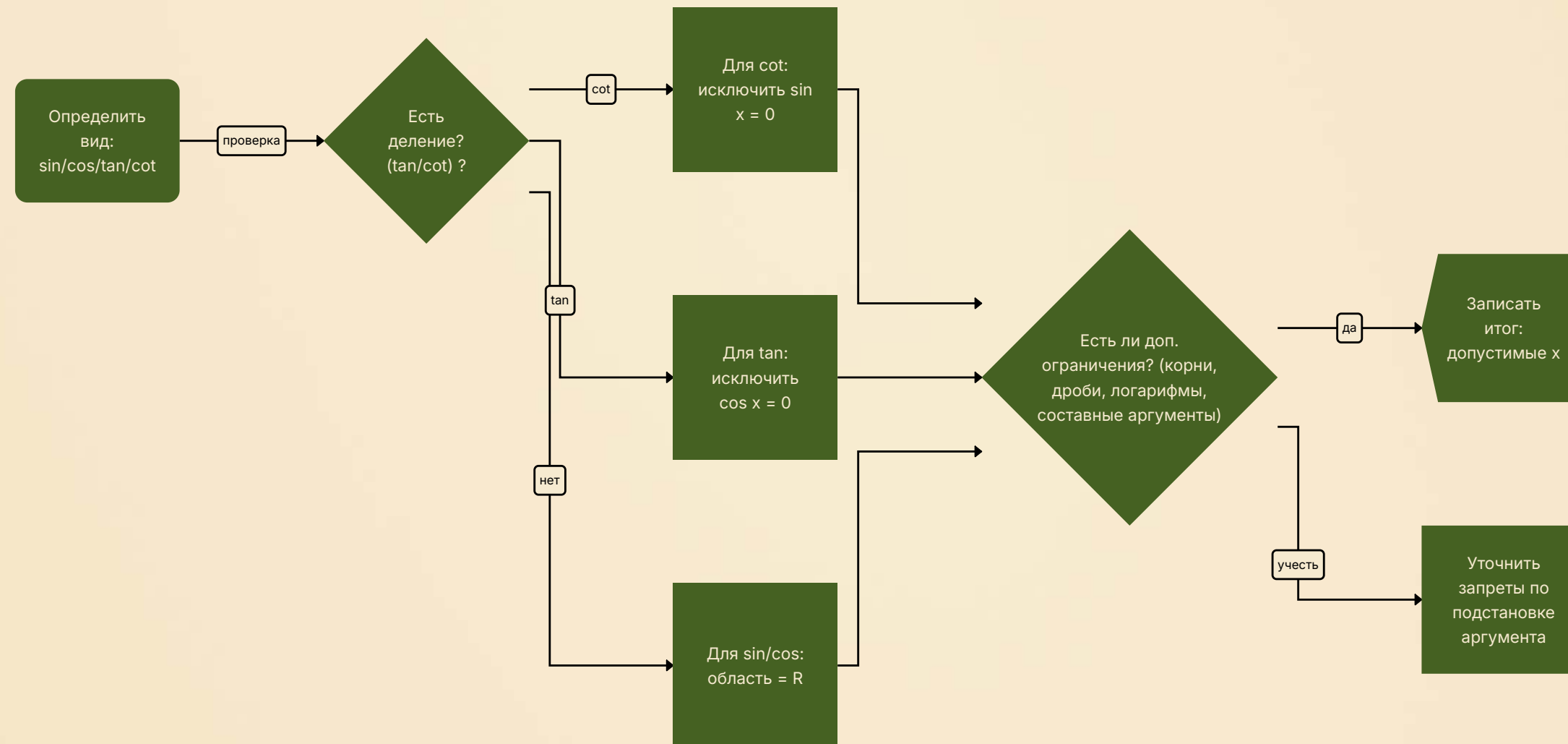
Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и значение $\cot x$ не существует. В остальных точках $\cot x$ можно вычислять без ограничений.

Шаг 3: множество значений и смысл разрывов

Поскольку в оставшихся точках дробь может принимать любые действительные значения, множество значений $\cot x$ равно $\mathbb{R}$. Разрывы на графике появляются там, где знаменатель равен нулю.

Алгоритм нахождения области определения тригонометрической функции

Логика проверки опирается на смысл дробей: нельзя делить на ноль, а также учитывать запреты для сложных выражений.



Сравнение основных тригонометрических функций

Функция	Область определения	Множество значений	Характерные ограничения
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	нет
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	нет
$\tan x$	$\mathbb{R}$ без $\pi/2 + \pi k$	$\mathbb{R}$	исключить $\cos x = 0$
$\cot x$	$\mathbb{R}$ без πk	$\mathbb{R}$	исключить $\sin x = 0$

Ключевое различие — в том, откуда возникают ограничения: только из условий, при которых знаменатель обращается в ноль.

$\sin x$ и $\cos x$ ограничены по значениям, тогда как $\tan x$ и $\cot x$ охватывают все действительные числа, но имеют запрещённые аргументы.

Школьный курс алгебры и начал анализа (11 класс)

Сравнение множества значений тригонометрических функций

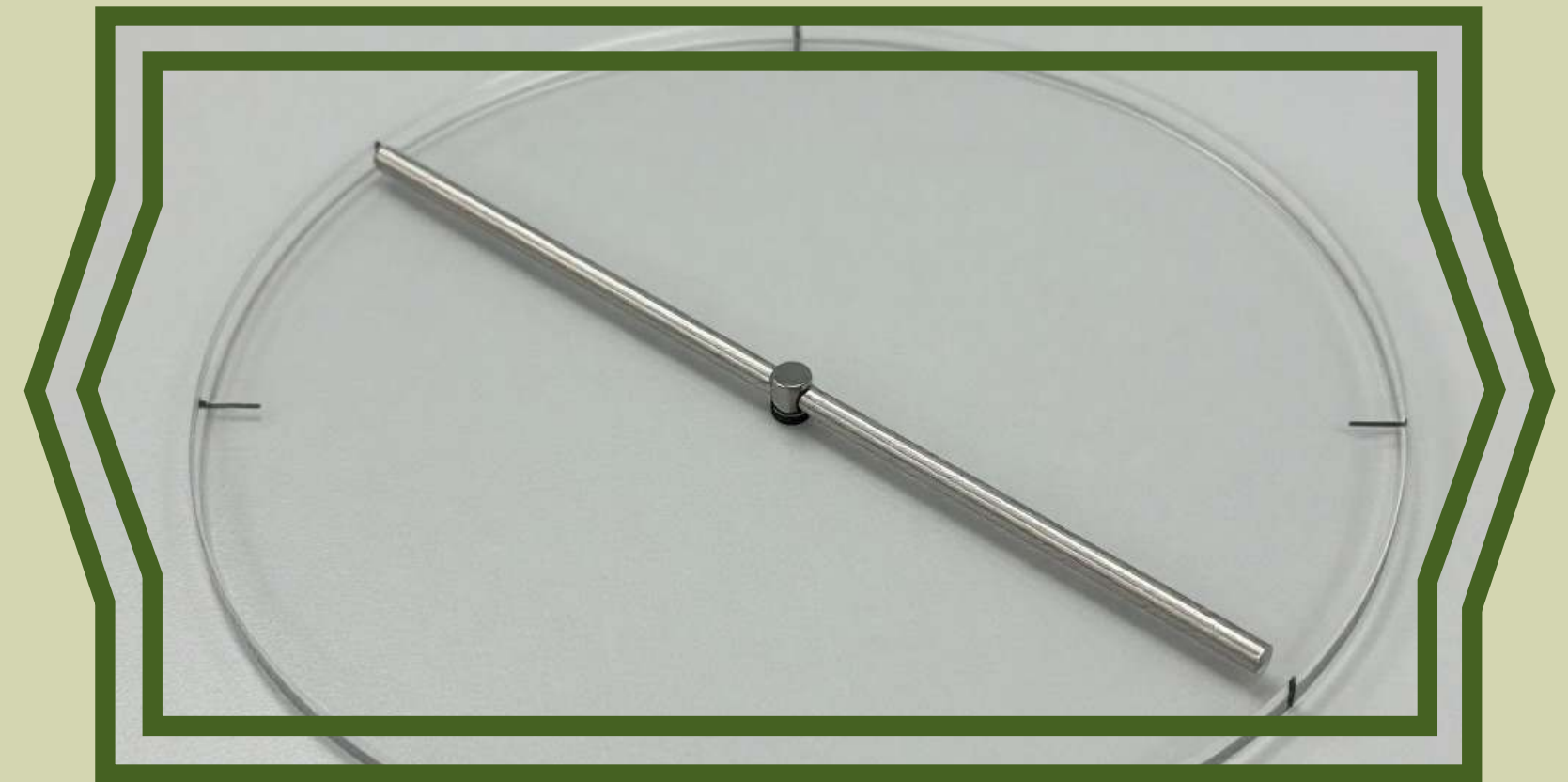


Для $\sin x$ и $\cos x$ видно ограничение сверху и снизу, а у $\tan x$ и $\cot x$ нет фиксированных «потолка» и «дна». Поэтому диапазоны ответов резко различаются при решении уравнений.

Геометрический смысл через единичную окружность объясняет ограниченность синуса и косинуса, а дробная природа $\tan$ и $\cot$ — их неограниченность по значениям.

Единичная окружность и определения тангенса/котангенса

Едини́чная окру́жность как геометрическая модель



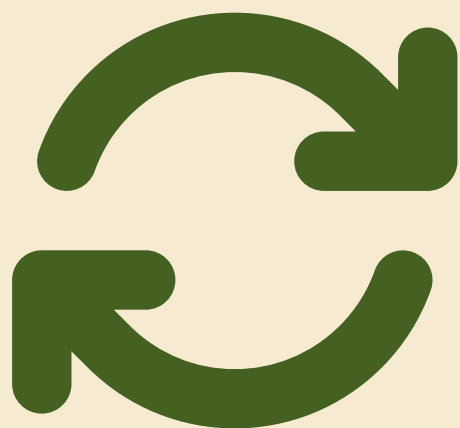
Как читаются $\sin x$ и $\cos x$

На модели единичной окружности отмечают оси координат и положения, соответствующие углам 0 , $\pi/2$, π и $3\pi/2$, а также направление отсчёта. Подписи показывают: $\cos x$ — это горизонтальная координата точки, а $\sin x$ — вертикальная.

Где появляются запрещённые точки для $\tan$ и $\cot$

Разрывы $\tan x$ и $\cot x$ связаны с тем, что в их формулах есть деление. Если нужная координата равна нулю, соответствующее отношение становится невозможным, и на окружности отмечают положения, где значения $\tan$ и $\cot$ не определены.

Периодичность тригонометрических функций



Повторение значений

У $\sin x$ и $\cos x$ значения повторяются через промежуток аргумента 2π , а у $\tan x$ и $\cot x$ — через π . Это позволяет получать множество решений тригонометрических уравнений без повторного вычисления.



Польза в задачах 11 класса

Периодичность не меняет ни область определения, ни множество значений. Она помогает записывать общее решение в виде $x = x_0 + T \cdot k$ и быстрее проверять ответы при подстановке.

Типичные ошибки при определении области и множества значений

- 1 Иногда ученики пытаются «закрыть» для $\sin x$ и $\cos x$ запрещённые значения аргумента, хотя эти функции определены при всех $x \in \mathbb{R}$. Из-за этого лишние ограничения появляются там, где их быть не может.
- 2 У $\tan x$ и $\cot x$ нередко забывают проверить знаменатель: $\tan x = \sin x / \cos x$ и $\cot x = \cos x / \sin x$. Если не исключить точки, где $\cos x$ или $\sin x$ равны нулю, решение станет неверным.
- 3 Распространённая ошибка — смешивать область определения и множество значений. Область отвечает за то, при каких аргументах выражение имеет смысл, а множество значений — какие числа удаётся получить.
- 4 При преобразовании выражений (например, вынесение множителя, замена аргумента) иногда теряются дополнительные ограничения от дробей, корней или логарифмов. Тогда область определения должна быть уточнена заново после всех операций.

Опорные значения тригонометрических функций

1

При $x = 0$ имеем $\sin 0 = 0$ и $\cos 0 = 1$, а $\tan 0 = 0$. Функция $\cot 0$ не определена, потому что её выражение содержит деление на $\sin x$, равный нулю.

2

При $x = \pi/2$ синус равен 1, а косинус обращается в 0: $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$. В этой точке $\tan(\pi/2)$ не существует, но $\cot(\pi/2) = 0$.

3

При $x = \pi$ получаем $\sin \pi = 0$ и $\cos \pi = -1$, а также $\tan \pi = 0$. Котангенс в этой точке не определён, так как знаменатель $\sin x$ снова равен нулю.

Поведение функций возле запрещённых точек



В окрестности точки $x = \pi/2$ функция $\tan x$ меняет знак между соседними промежутками, а сама вертикальная асимптота повторяется через каждое π .

Данные показывают, что внутри промежутков функция определена, а в запрещённой точке происходит разрыв. Такая периодичность и даёт структуру графика.

Школьный курс алгебры и начал анализа, раздел о тригонометрических функциях (теоретические свойства).

Как преобразование аргумента меняет область определения



1. Запись преобразованной функции

Сначала фиксируют исходное выражение и форму преобразования аргумента: x заменяют на $ax+b$. Уже на этом шаге становится ясно, появятся ли новые запрещённые точки и насколько они сместятся.



2. Проверка базовой функции

Далее определяют тип: $\sin$, $\cos$, $\tan$ или $\cot$. Для $\sin$ и $\cos$ область определения остаётся $\mathbb{R}$, а для $\tan$ и $\cot$ нужно исключить значения, где соответствующий знаменатель обращается в ноль.



3. Окончательная подстановка ограничений

Завершают работу подстановкой преобразованного аргумента: запрещённые точки находят из условий вида $\cos(ax+b)=0$ или $\sin(ax+b)=0$. Итог записывают как область определения для исходной функции.

Запрещённые значения аргумента

В таблице собраны условия, при которых тригонометрические функции не определены, и типичные примеры запрещённых точек.

Ограничения возникают только из-за деления на ноль: для $\tan$ запрещает $\cos x$, а для $\cot$ запрещает $\sin x$.

Формулы и определения тригонометрических функций, школьный курс математики 11 класса.

Функция	Условие	Запрещённые точки
$\sin x$	—	нет
$\cos x$	—	нет
$\tan x$	$\cos x=0$	$x=\pi/2+\pi k$
$\cot x$	$\sin x=0$	$x=\pi k$

Связь с геометрией и реальными процессами



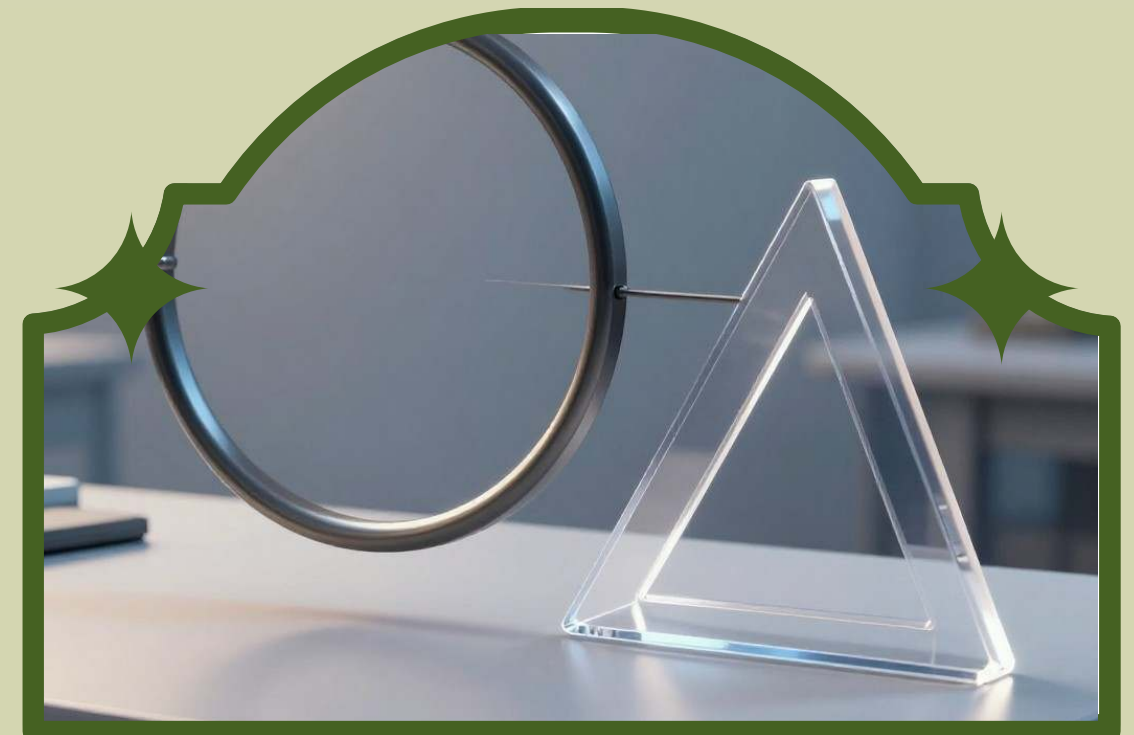
Маятник: почему всё возвращается

Амплитуда колебаний меняется по синусоидальному закону, и движение повторяет себя через постоянный промежуток времени. Точка на «траектории» задаёт одновременно координаты и направление. Такая связь делает формулу наглядной, как рисунок в тетради и реальный маятник в лаборатории.



Солнечный свет и волны: ритм на графике

Освещённость, уровень сигнала или высота положения объекта во времени могут колебаться периодически. Если посмотреть на значения, график то приближается к максимуму, то уходит в минимум, повторяя структуру. Тригонометрия помогает переводить наблюдения в компактные формулы.

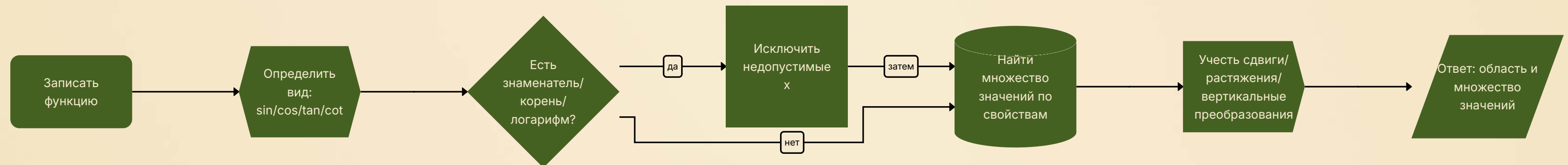


Наклон и угол: от окружности к треугольнику

В геометрии $\sin$ и $\cos$ задают координаты точки на единичной окружности, поэтому их легко связывать с проекциями. А $\tan$ и $\cot$ выражают наклон и соотношения сторон в прямоугольных треугольниках. Из-за этого угловые задачи решаются без догадок.

Алгоритм определения области и множества значений

Логическая схема проверки условий смысла и применения свойств базовых функций.



2

Вертикальный сдвиг влияет на значения, которые функция принимает на всём допустимом наборе аргумента.
Примеры преобразований функции в школьном курсе математики 11 класса.

Для $y = \sin x + 2$ область определения остаётся $\mathbb{R}$, а множество значений смещается вверх и становится $[1; 3]$.



Тригонометрия становится точной, когда вы различаете область и значения

$\sin x$ и $\cos x$ определены при всех действительных x и дают только значения из $[-1; 1]$. $\tan x$ и $\cot x$ принимают любые действительные значения, но не определены при делении на ноль. Понимание этих различий помогает решать уравнения и проверять ответы.