

Функции: язык зависимостей в математике

Функции помогают увидеть зависимость
в изменениях.

$1 \div 2$

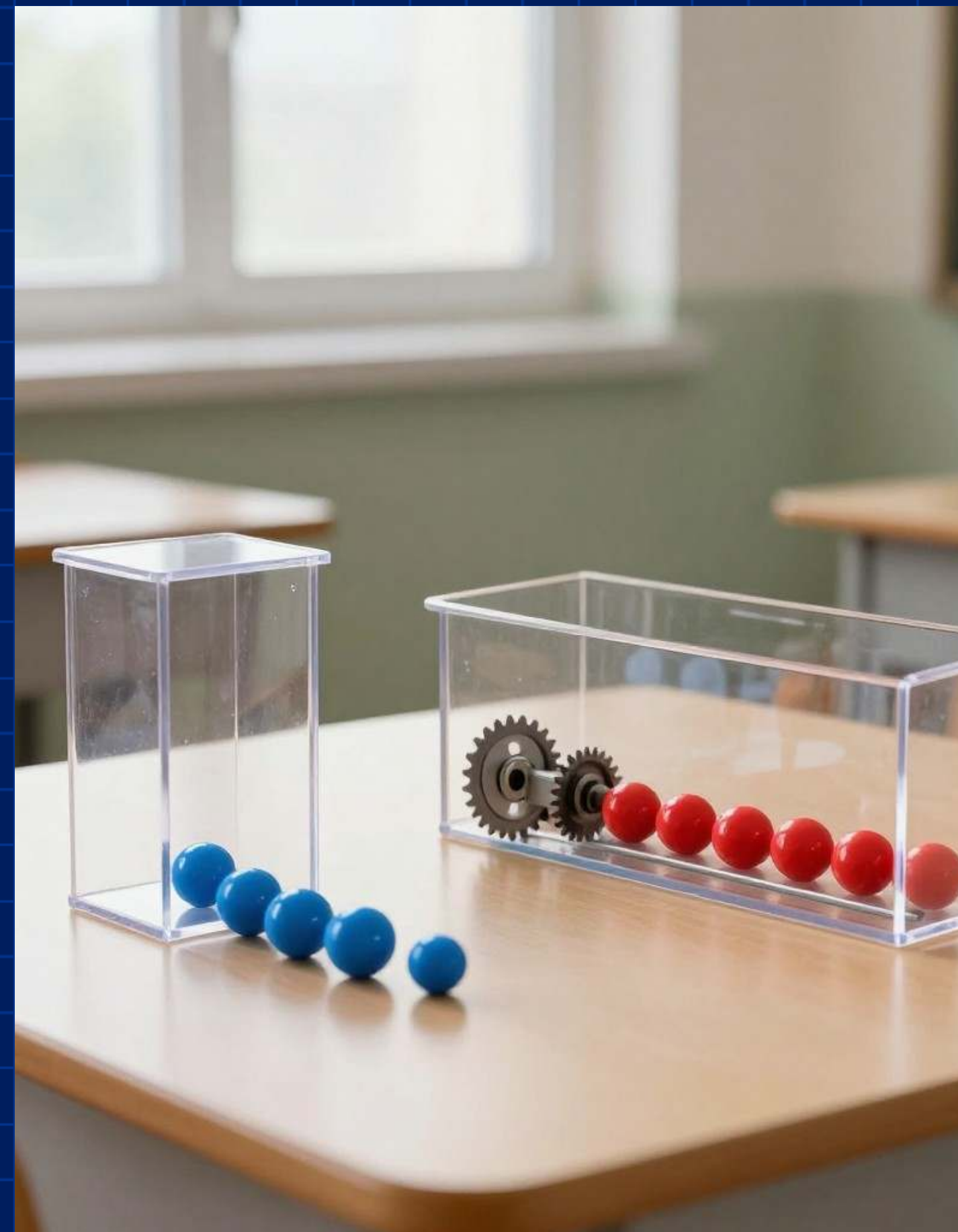
$\log$

8



Зачем изучают функции

Функции встречаются в задачах про цену, время, путь и температуру. Они учат читать зависимости, работать с графиками и понимать, как меняется одна величина при изменении другой.



Зависимость величин в жизни



Покупки в магазине

Когда покупают несколько одинаковых товаров, общая стоимость зависит от количества. Меняется число предметов – меняется и сумма оплаты. Такая связь удобна для описания формулой или таблицей.

Дорога и время

Если автобус едет дольше, он проходит большее расстояние. Здесь путь связан со временем движения. По такой зависимости легко сравнивать разные моменты поездки и строить график.

Изменение уровня воды

Уровень воды в реке или стакане может меняться из-за дождя или наполнения. Одна величина влияет на другую, поэтому связь можно представить как функцию.

Однозначность результата

Для функции важно, чтобы одному значению x соответствовало только одно значение y . Иначе правило становится неоднозначным и уже не описывает функцию.

$$x^2 + 4x - 8$$



Определение функции

1

Главное правило

Функция задаёт правило соответствия: каждому x она ставит в соответствие одно значение y . Это основная идея, на которой строятся таблицы, формулы и графики.



2

Почему бывают исключения

Если для одного и того же x получаются два разных y , такую зависимость нельзя считать функцией. Однозначность результата – обязательный признак.



3

Простой пример

Пример $y=2x$ показывает обычную функцию: для любого x вычисляется ровно один ответ. Значит, зависимость можно записать, проверить и изобразить на графике.



Ключевые обозначения

1

log



$f(x)$

Аргумент x

Аргумент — это значение x , которое подставляют в правило. От него зависит результат, поэтому именно x выбирают первым, а потом находят соответствующее значение функции.

Значение функции

Значение функции обозначают буквой y или записью $f(x)$. Это число получается после подстановки аргумента и показывает результат действия правила.

Запись и пример

Запись $y=f(x)$ читается как «игрек равно эф от икс». Например, при $f(x)=x+3$ и $x=2$ получаем $f(2)=5$.

2

x

Сравнение способов задания функции

Способ	Что показывает	Когда удобен
Формула	Правило	Вычисления
Таблица	Пары x и y	Сравнение
График	Изменение	Чтение

Школьное представление о способах задания функции

Одна и та же зависимость может быть записана по-разному. Формула помогает считать, таблица – сравнивать значения, а график – видеть изменение сразу.

Три формы дополняют друг друга: формула задаёт правило, таблица фиксирует значения, график показывает картину целиком.

Таблица значений функции

x	-1	0	1	2
y	0	1	2	3

Пример функции $f(x)=x+1$ из школьного курса

Для функции $f(x)=x+1$ подставляют несколько значений аргумента и считают результат. Так получают таблицу, по которой затем удобно строить график.

При увеличении x на 1 значение y тоже увеличивается на 1; точки таблицы можно перенести на координатную плоскость.

Координатная плоскость и точки

Оси координат

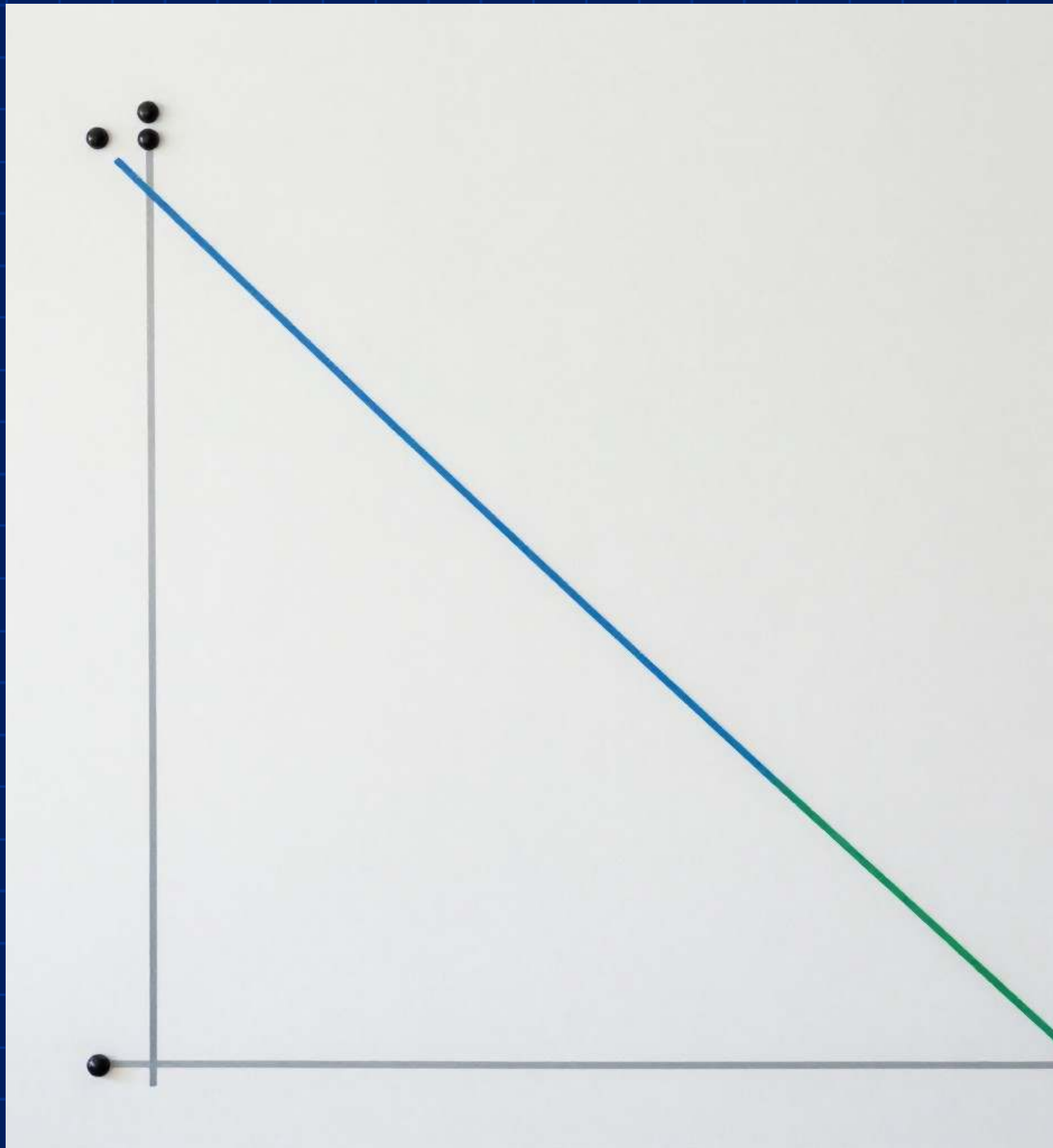
График строят на координатной плоскости. Горизонтальная ось показывает x , вертикальная — y . По ним удобно находить положение каждой точки и сравнивать значения.

Запись точки

Каждая точка записывается как $(x; y)$. Сначала называют значение по горизонтали, потом — по вертикали. Такой порядок важен для правильного чтения и построения графика.

Точки на прямой

Для функции $f(x)=x+1$ точки $(0; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; 3)$ лежат на одной прямой. Это помогает увидеть зависимость не только по таблице, но и на рисунке.



Как читать график по значениям x и y

1 Найти y по x

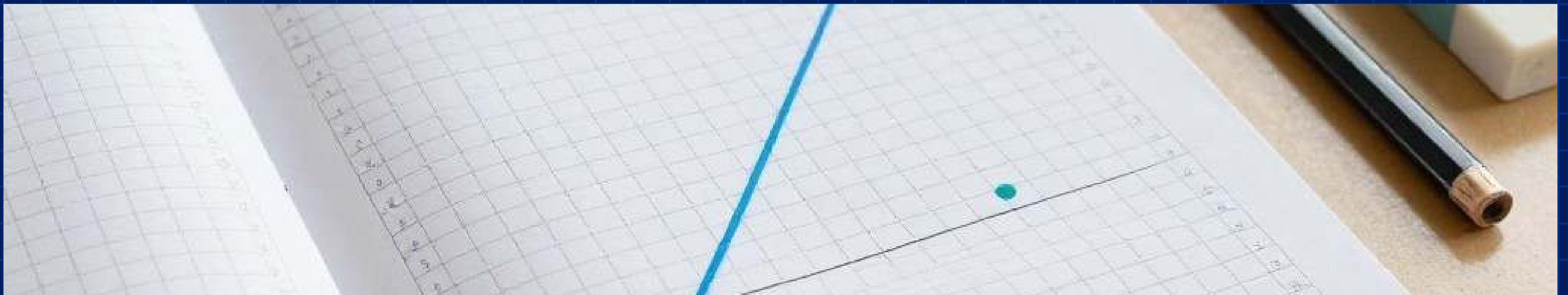
Сначала выберите известное x и найдите на оси нужное положение. Затем мысленно поднимитесь до линии графика и прочитайте соответствующее значение y .

2 Найти x по y

Если задано значение y , проведите через него горизонтальную линию до пересечения с графиком. После этого опуститесь вниз и определите подходящее x .

3 Работа на примере

На примере удобно взять $x=2$: по графику находят $y=3$. Такой же приём помогает проверять ответы и читать зависимости без вычислений.





На одном вертикальном значении график функции не может иметь несколько точек.

1

точка на каждой вертикали



Свойство графика функции в школьном определении



Для функции важно, чтобы каждое значение аргумента давало ровно один результат; иначе правило перестаёт быть функцией.

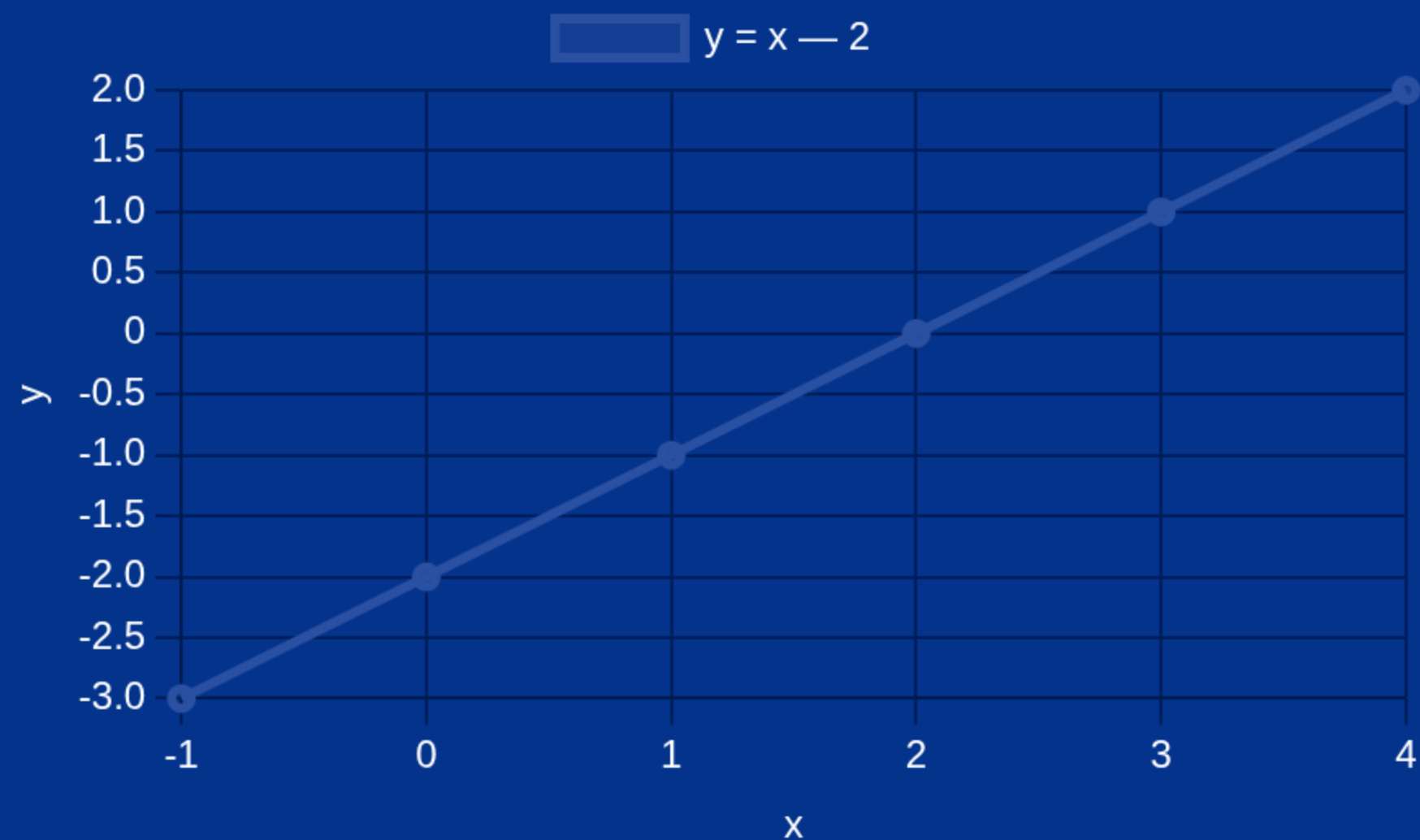
2

**разных y для одного x уже
нарушают правило.**



Определение функции в школьном курсе математики

Нули функции и пересечение с Ox

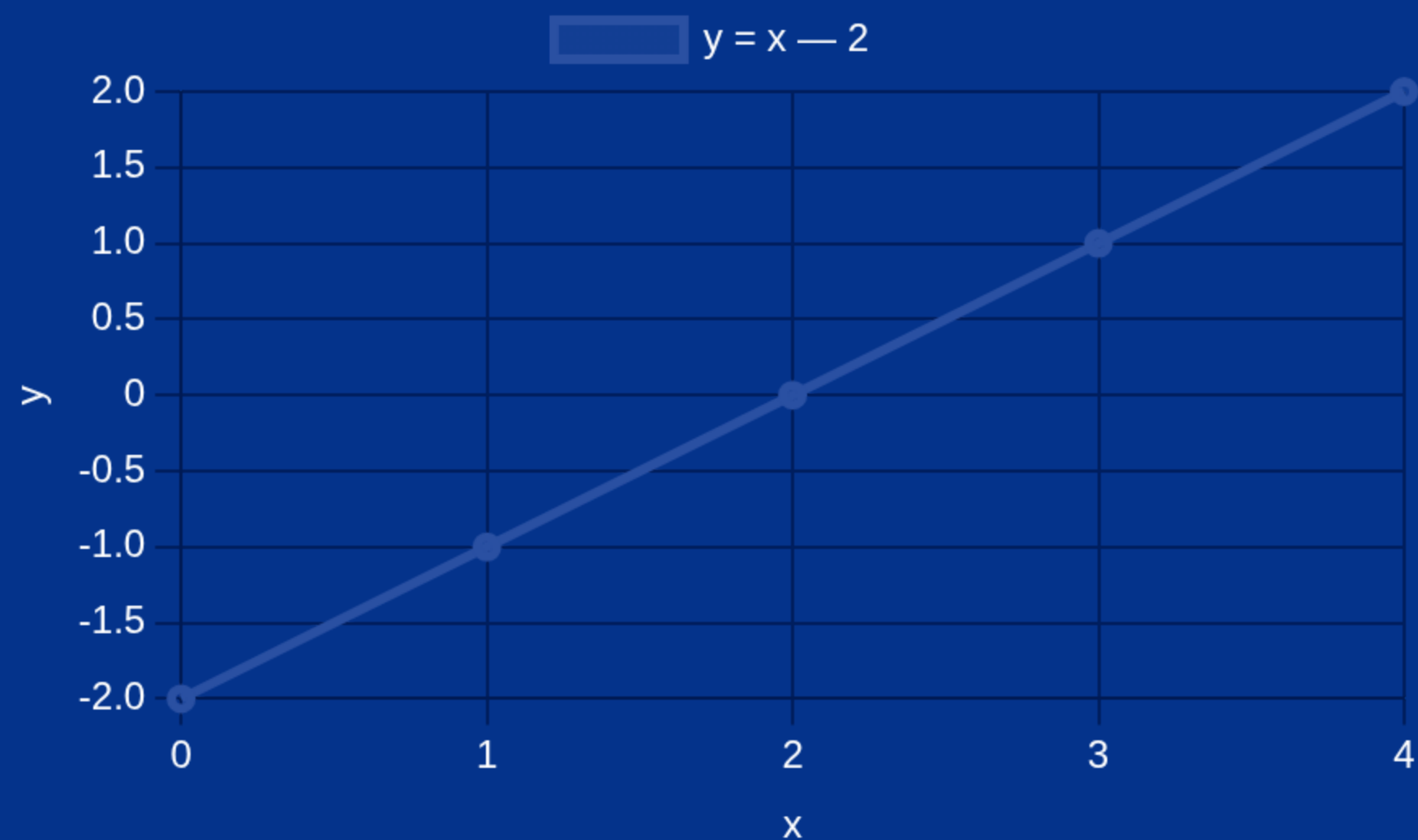


Учебный пример: функция $y = x - 2$

Точка пересечения с осью Ox показывает, при каком значении аргумента значение функции становится нулевым.

График пересекает ось Ox в точке $x=2$, значит нуль функции равен 2.

Знак функции на графике

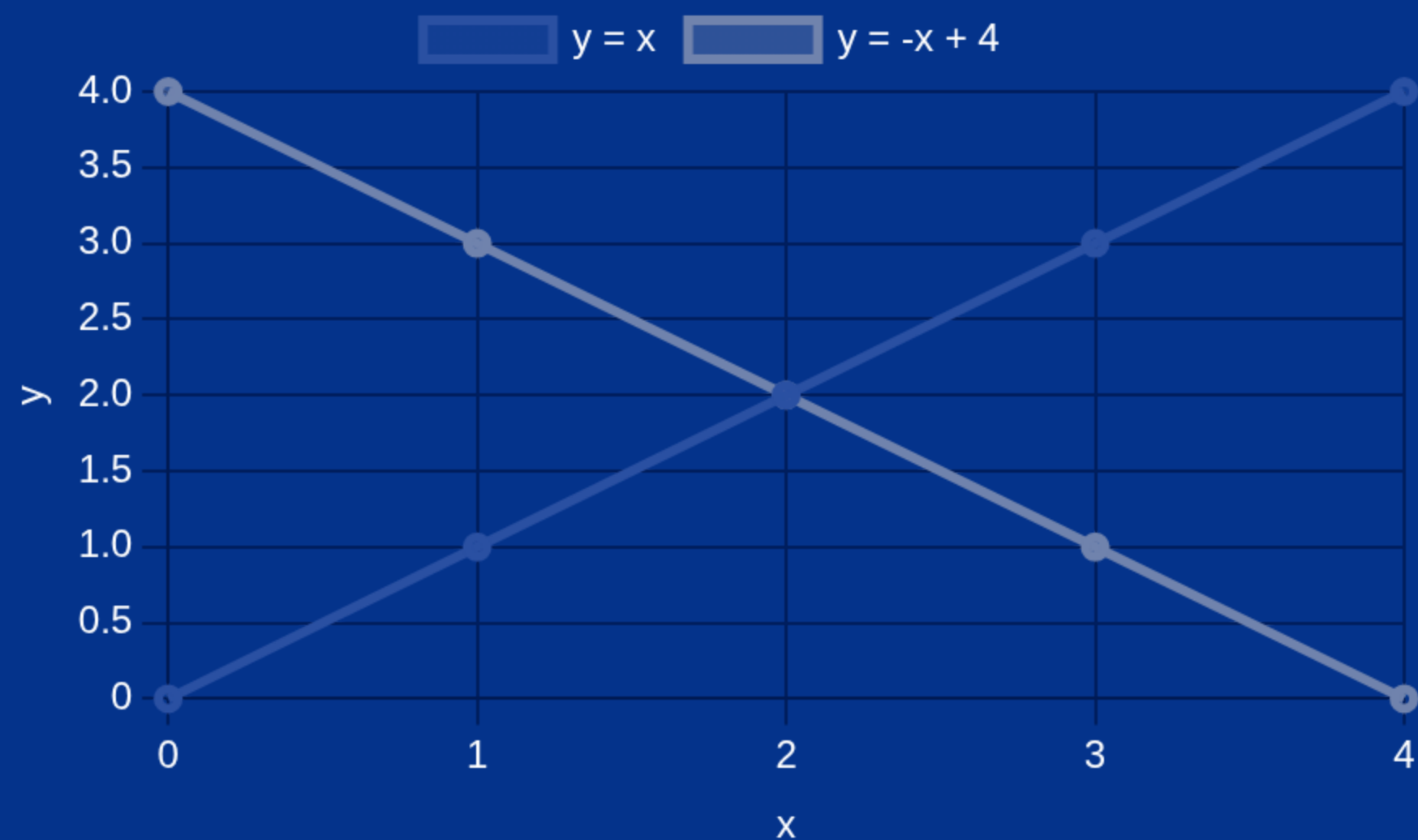


Учебный пример: функция $y = x - 2$

Знак функции удобно проверять по положению графика относительно оси Ox : достаточно сравнить каждую точку с линией нулевого уровня.

Слева от точки пересечения значения отрицательные, справа — положительные, а на оси Ox функция обращается в ноль.

Возрастание и убывание

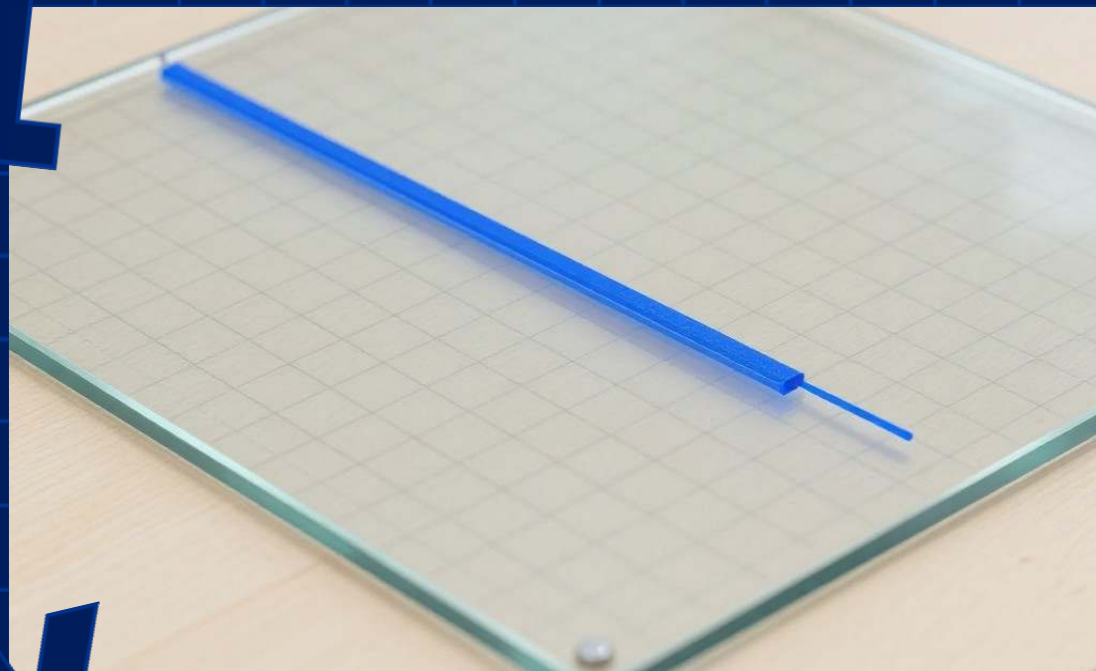


Сравнение учебных функций $y = x$ и $y = -x + 4$

Сравнивая графики слева направо, легко увидеть, где значение функции увеличивается быстрее, а где, наоборот, уменьшается.

Первая прямая возрастает, вторая убывает; направление графика сразу показывает характер изменения функции.

Сравниваем три графика



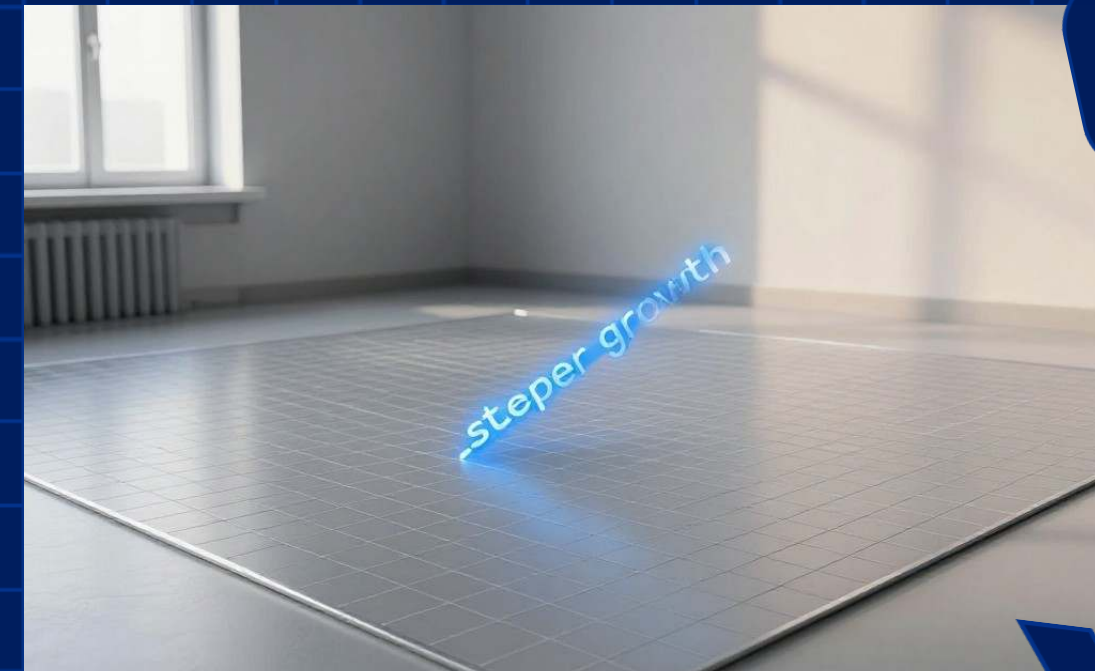
Ровная диагональ

График $f(x)=x$ идёт по диагонали через начало координат. Каждое увеличение x на единицу даёт такое же увеличение y , поэтому линия выглядит ровной и симметричной относительно привычного шага по клеткам.



Сдвиг вверх

У $f(x)=x+2$ тот же наклон, но вся прямая поднята выше. Это удобно видеть на одной плоскости: каждому x соответствует значение, которое на два больше, чем y первой функции.



Более крутой рост

График $f(x)=2x$ растёт быстрее, чем $f(x)=x$. При одинаковом x значения y становятся больше вдвое, поэтому линия выглядит более крутой и заметно отрывается от первой прямой.

Линейная функция $y=kx+b$

1

Коэффициент k

Число k показывает наклон прямой и темп изменения функции. Если k положительно, график идёт вверх слева направо; если k отрицательно, линия опускается.

2

Свободный член b

Число b задаёт точку пересечения с осью Oy . Оно показывает значение функции при $x=0$ и помогает быстро понять, где проходит прямая на плоскости.

3

Как читать формулу

Запись $y=kx+b$ объединяет оба смысла: направление и сдвиг. Если $b=0$, прямая проходит через начало координат, а при $k=0$ получается горизонтальная линия.



Как построить график по точкам

Пошаговое построение по формуле $y=2x+1$ на нескольких значениях x .



Таблица значений

x	y
0	2
1	4
2	6
3	?

Мини-кейс по условию презентации

Таблица помогает быстро проверить значения функции и подготовиться к построению графика без лишних вычислений.

По таблице видно, что функция возрастает; при $x=3$ получится $y=8$, а ноль функции лежит левее показанных значений.

Главные ошибки и как их избежать



Путают координаты

Путаница между x и y приводит к неверным точкам на графике. Полезно сначала читать ось аргумента, а затем искать соответствующее значение функции.



Неверный график

Не каждую линию можно считать графиком функции. Если одна вертикаль пересекает рисунок в двух точках, для одного x получаются два значения y .



Забывают ограничения

Ограничения по x нельзя игнорировать: например, в выражении $1/x$ значение $x=0$ недопустимо. Сначала проверяют область определения, потом строят график.



Считывают неточно

Значения на графике читают только по осям и сетке, а не «на глаз». Небольшая неточность в отсчёте легко меняет ответ и делает вывод ошибочным.



Что важно запомнить

Функции помогают описывать зависимость величин и читать её по формуле, таблице и графику. Если помнить про x , y , область определения, нули и знак, задачи становятся понятнее и короче.

$\sin$

1

tg

ctg

$\cos$

