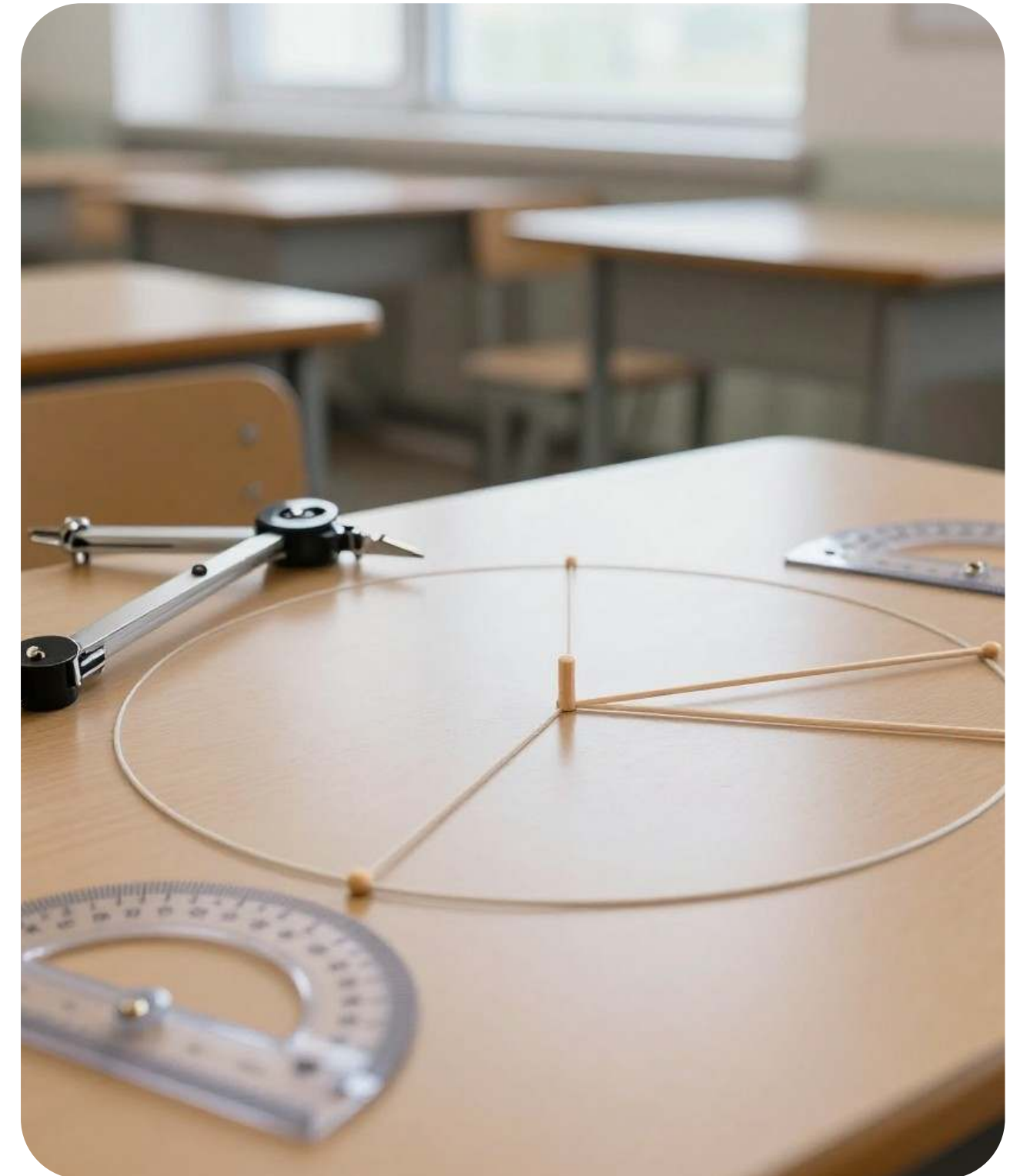




Вычисление длины дуги окружности

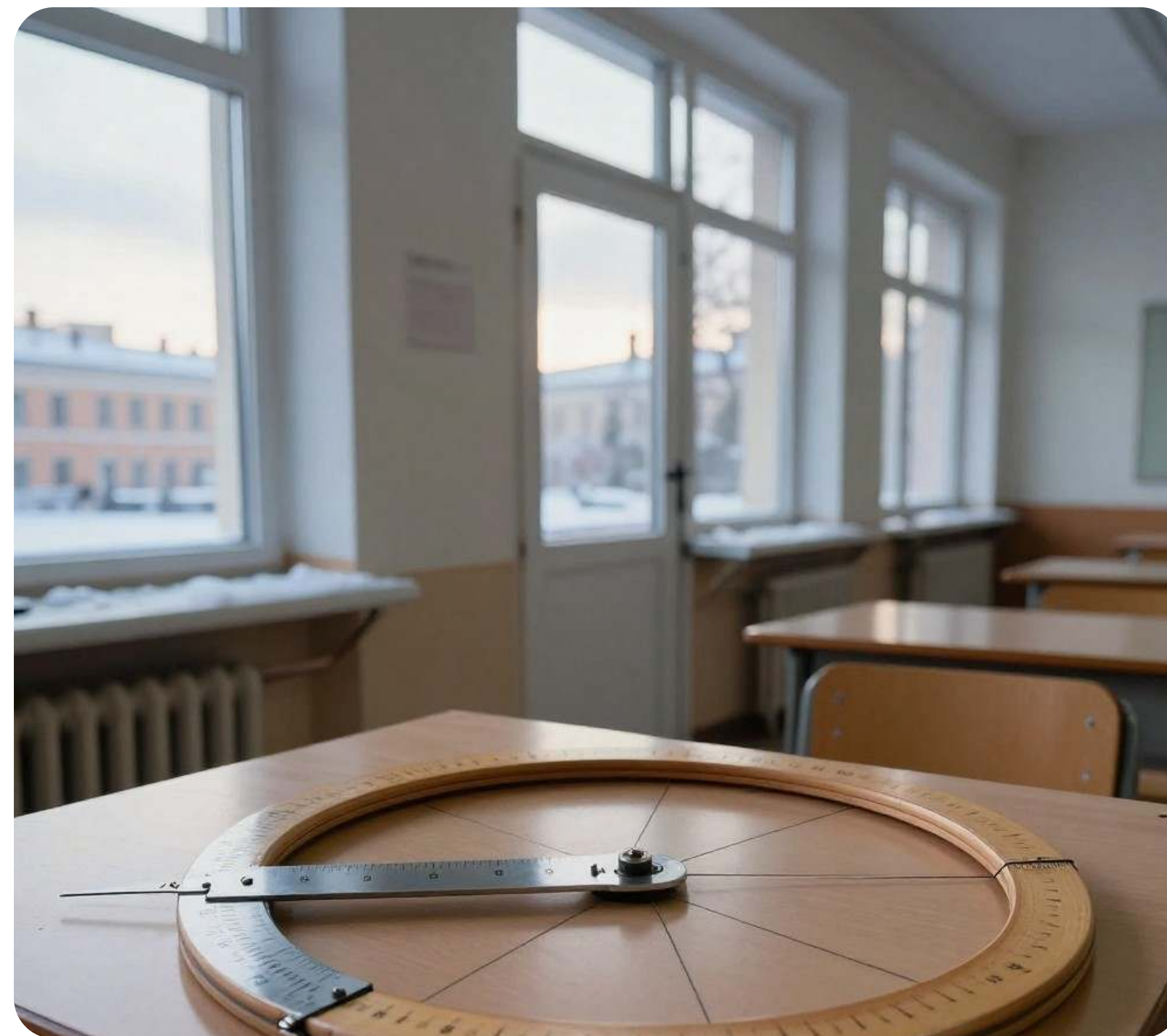
Как найти длину части окружности по углу и радиусу?



Зачем находить длину дуги



Дуга окружности помогает связывать углы, пропорции и размеры круга. Это одна из базовых задач геометрии 9 класса, которая встречается в построениях, секторах круга и расчетах частей окружности.



Что называют дугой окружности



Часть окружности

Дуга — это участок линии окружности между двумя заданными точками. Именно он рассматривается в задаче, когда нужно найти не весь круг, а только его часть.



Роль угла

Размер дуги определяет центральный угол, опирающийся на нее. Чем больше этот угол, тем большую часть окружности занимает дуга и тем длиннее она становится.



Одна окружность — разные дуги

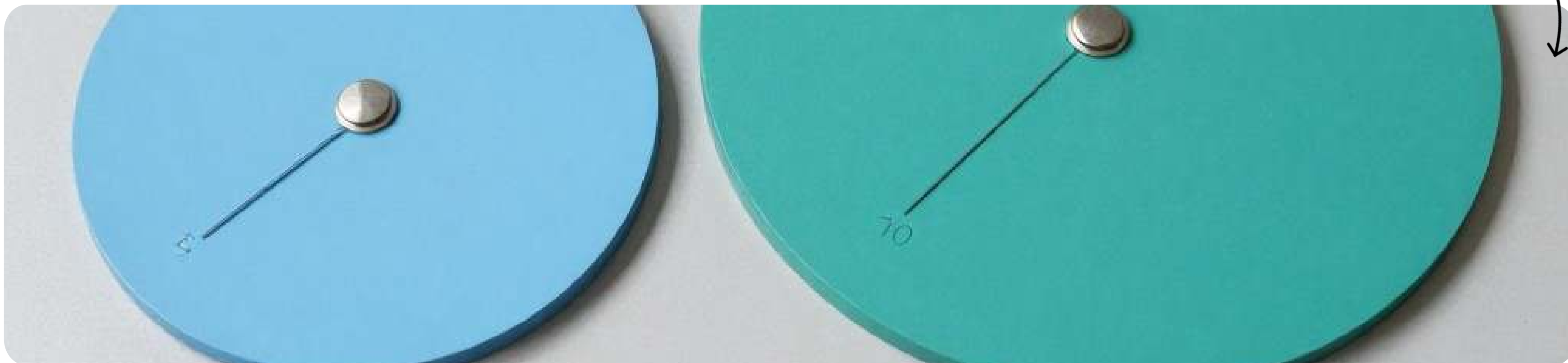
При одинаковом центральном угле дуга на большой окружности получается длиннее, чем на маленькой. Поэтому для вычислений всегда важно знать еще и радиус.



Связь с окружностью

Длина дуги зависит от длины всей окружности. Если известна доля круга, можно найти и соответствующую часть его периметра, не измеряя дугу напрямую.

Радиус, диаметр и влияние размера окружности



Что такое радиус

Радиус — это расстояние от центра окружности до любой точки на ней. Он задает размер круга и входит в формулы для вычисления длины дуги.

Что такое диаметр

Диаметр проходит через центр окружности и равен двум радиусам. Если известен диаметр, сначала находят радиус, а уже потом подставляют его в формулу.

Почему размер важен

При одном и том же угле дуга на окружности радиуса 10 см вдвое длиннее, чем на окружности радиуса 5 см. Значит, длина дуги прямо зависит от радиуса.

Что отмечают на схеме

На рисунке удобно показать центр, два радиуса и выделенную дугу между ними. Такая схема помогает увидеть, какие элементы окружности участвуют в решении задачи.

Формулы и обозначения



Запись	Когда используют	Смысл
$l = 2\pi R \cdot \alpha / 360^\circ$	угол в градусах	часть окружности
$l = R\varphi$	угол в радианах	прямая связь
$C = 2\pi R$	длина окружности	полный круг

Формулы длины дуги и окружности из школьного курса геометрии

Одна и та же зависимость записывается разными способами в зависимости от единиц угла.

Все записи описывают одну ситуацию: длина дуги равна доле от полной окружности, но выбор формулы зависит от формы записи угла.

Формула длины дуги через градусы



01

Часть полного круга

Если угол дан в градусах, длина дуги находится как часть длины всей окружности. Формула $l = 2\pi R \cdot \alpha / 360^\circ$ показывает, какую долю круга занимает дуга.

02

Смысл дроби

Число $\alpha / 360^\circ$ означает отношение данного угла к полному обороту. Поэтому при увеличении угла дуга растет пропорционально, а сама формула остается одной и той же.

03

Половина и четверть

При $\alpha = 90^\circ$ получается четверть окружности, при $\alpha = 180^\circ$ — половина, а при $\alpha = 360^\circ$ — вся окружность. Это удобно проверять по смыслу ответа.

04

Когда применять

Такую запись используют, если в условии угол задан в градусах. Тогда не нужно переводить его в другую меру, достаточно аккуратно подставить значения в формулу.

Формула длины дуги через радианы



Короткая запись

Когда угол измеряется в радианах, используют формулу $l = R\varphi$. Она короче градусной записи и сразу связывает радиус с длиной дуги без дополнительных действий.



Почему это удобно

Радианная мера связана с длиной дуги напрямую, поэтому вычисления становятся проще. В задачах с радианами не требуется делить на 360 и искать долю круга.



Опорные значения

Если $\varphi = \pi$, дуга равна половине окружности. При $\varphi = \pi/2$ получается четверть окружности, а при $\varphi = 2\pi$ — вся окружность.

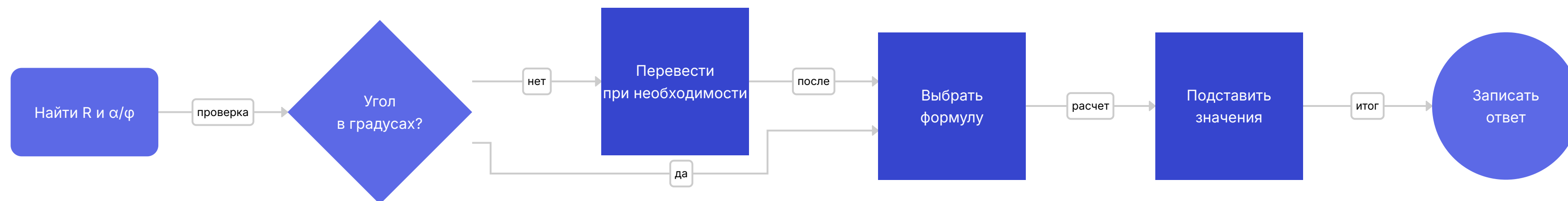


Где применяется

Эта формула особенно полезна в тех задачах, где угол уже записан в радианах. Тогда ответ находится быстрее, а преобразований между единицами почти не требуется.

Как решать задачи на длину дуги

Последовательность действий помогает не перепутать формулу, единицы измерения и ответ.

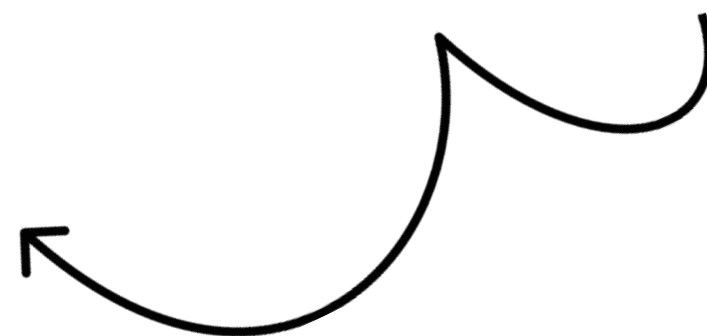


Как длина дуги зависит от величины угла

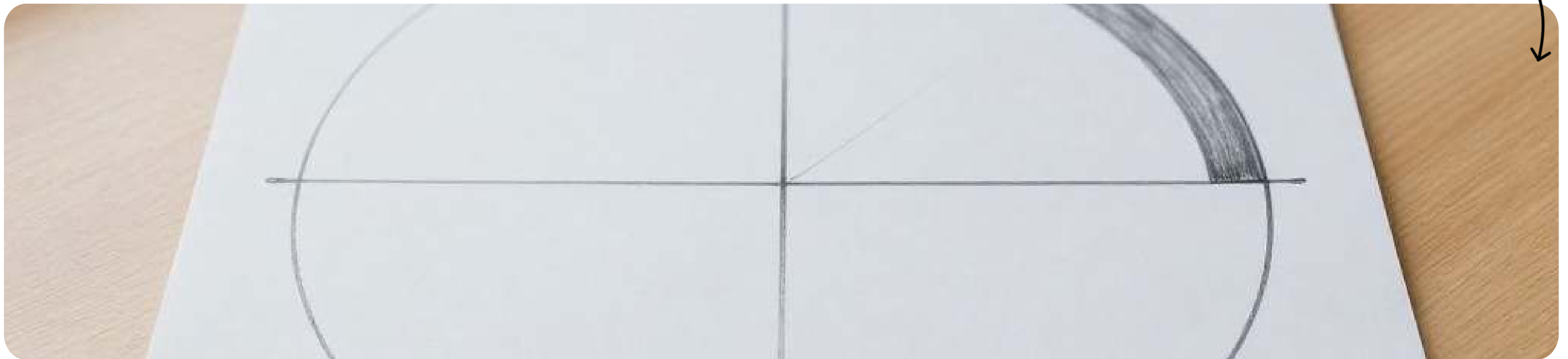
Для построения взят фиксированный радиус 4 см. Значения рассчитаны по формуле $l = \frac{2\pi R \cdot \alpha}{360^\circ}$ и показывают рост длины вместе с углом.

График подтверждает прямую пропорциональность: при увеличении угла длина дуги растет в той же доле.

Расчет по формуле длины дуги при $R = 4$ см



Пример вычисления для радиуса 6 см и угла 60°



Подставляем данные

Используем формулу $l = 2\pi R \cdot \alpha / 360^\circ$. При $R = 6$ см и $\alpha = 60^\circ$ получаем $l = 2\pi \cdot 6 \cdot 60 / 360$, то есть $l = 2\pi$ см.

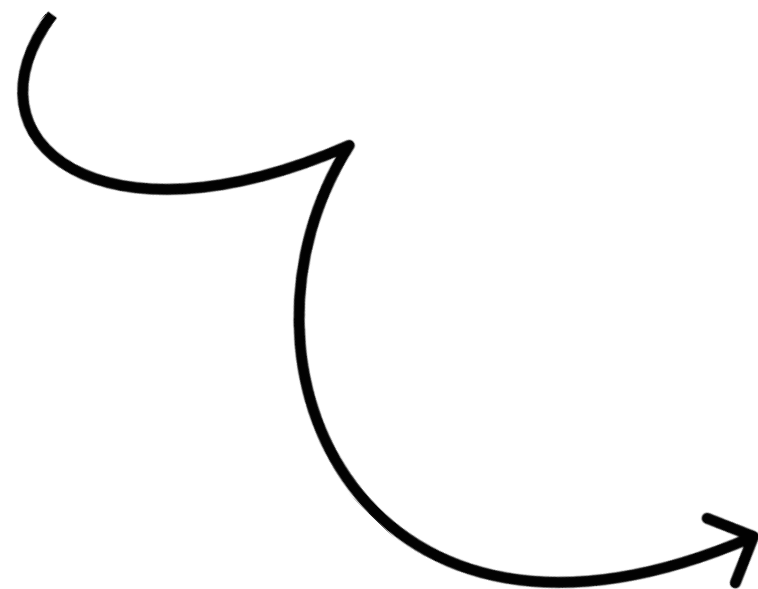
Что означает ответ

Полученная дуга составляет одну шестую часть окружности. Это легко увидеть по углу 60° , который равен одной шестой полного оборота в 360° .

Проверяем результат

Число 2π см подходит по смыслу: дуга короче половины окружности и длиннее маленького участка. На схеме можно выделить центр, два радиуса и саму дугу.

Радианная запись сразу даёт длину дуги без перевода угла в градусы и без деления на 360.



6π см

Именно такой длины будет дуга при радиусе 8 см и угле $3\pi/4$.

Вычисление по формуле $l = R\varphi$ при $R = 8$ см и $\varphi = 3\pi/4$

Сравнение углов в градусах и радианах



Градусы	Радианы
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π
270°	$3\pi/2$

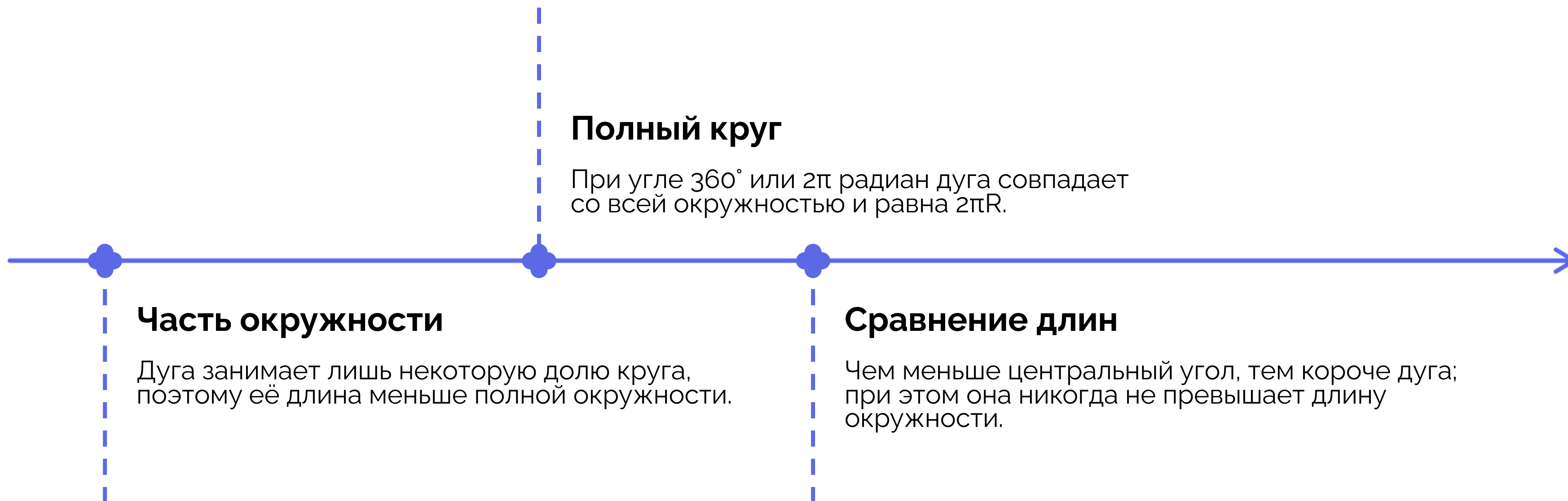
Таблица показывает, что одна и та же дуга может быть записана в двух формах без изменения результата.

Если угол переведён верно, обе формулы дают одинаковую длину дуги; меняется только запись угла.

Соответствие градусной и радианной меры угла



Связь длины дуги с длиной окружности

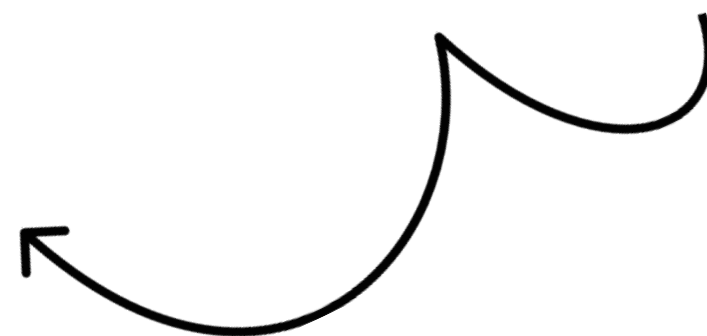


Доли окружности и соответствующие углы

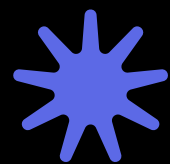
Чем больше доля круга, тем больше длина дуги и тем шире центральный угол сектора.

Пропорция между частью окружности и углом остаётся постоянной: четверть, половина, три четверти и полный круг соответствуют стандартным углам.

Геометрическая модель частей окружности



Типичные ошибки при вычислении длины дуги



01 Путают радиус и диаметр

В формулу подставляют диаметр вместо радиуса и получают удвоенное значение. Перед вычислением нужно внимательно определить, какая величина дана в условии.

02 Смешивают единицы угла

Градусы иногда используют вместо радиан или наоборот. Из-за этого выбирают неверную формулу, поэтому сначала всегда проверяют запись центрального угла.

03 Неправильно делят на 360

При градусной мере забывают, что дуга — это часть всей окружности. Ошибка в дроби сразу искажает ответ и делает его неверным.

04 Забывают единицы длины

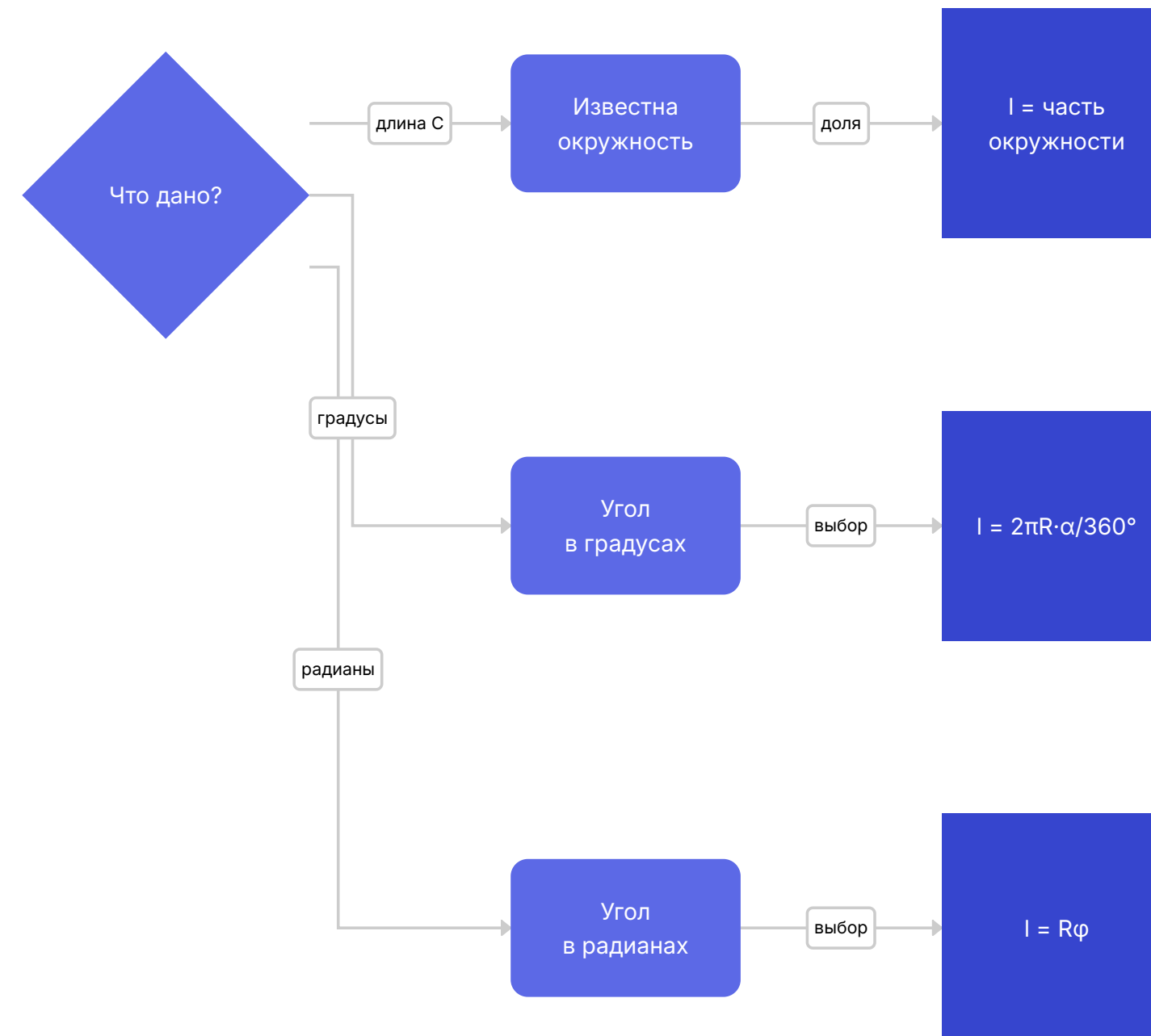
В ответе обязательно указывают сантиметры, метры или миллиметры. Без единиц измерения результат выглядит незавершённым и считается оформленным неправильно.

05 Не проверяют разумность ответа

Полезно сравнить найденную длину с длиной всей окружности. Если дуга больше полного круга, значит, в решении допущена ошибка.

Как выбрать формулу для длины дуги

Схема показывает выбор по виду центрального угла и известным данным задачи.



Где в жизни встречается дуга окружности



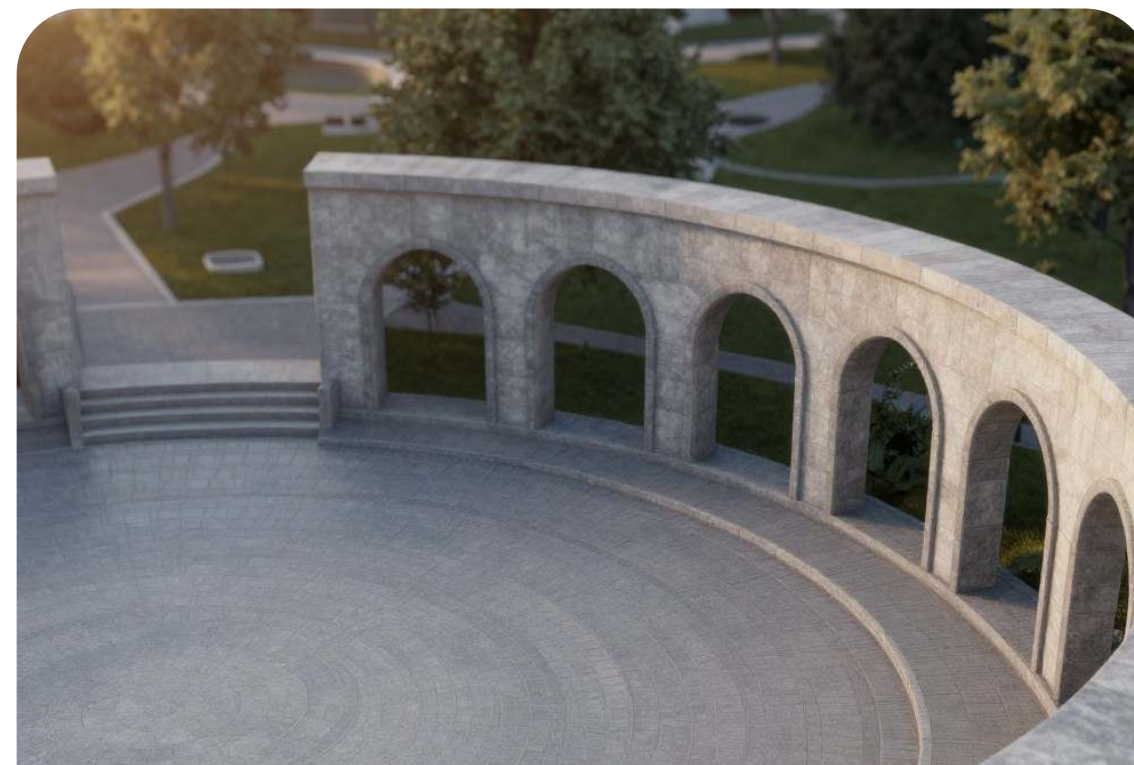
Часы и стрелки

На циферблате стрелка за час проходит часть окружности, а не весь круг. По этому пути удобно объяснять, как центральный угол связан с длиной дуги и почему важна доля полного оборота.



Колесо в движении

Когда колесо катится, одна точка на его крае описывает дугу. Такие ситуации помогают увидеть, что длина пути зависит от размера колеса и величины поворота.



Арки и дорожки

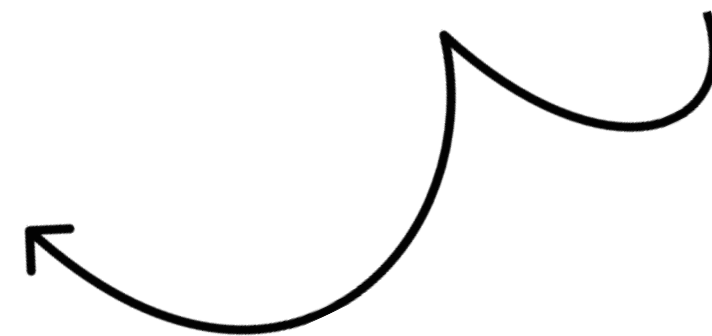
В архитектуре и на планах парков часто встречаются округлые арки и круговые дорожки. В этих задачах обычно ищут не всю окружность, а только её видимую часть.

Зависимость длины дуги от радиуса при одном угле

Во всех трёх случаях угол одинаковый, поэтому меняется только масштаб окружности.

При постоянном угле длина дуги растёт прямо пропорционально радиусу: чем больше окружность, тем длиннее её часть.

Расчёт по формуле $l = 2\pi R \cdot 60^\circ / 360^\circ$



Памятка для решения задач на уроке



01

Найди данные

Сначала выпиши радиус и центральный угол из условия. Если один из них задан косвенно, переведи текст задачи в удобную математическую запись.

02

Проверь единицы угла

Посмотри, дан ли угол в градусах или радианах. От этого зависит выбор формулы и способ дальнейших вычислений.

03

Выбери формулу

Для градусов используй $l = 2\pi R \cdot \alpha / 360^\circ$, а для радиан — $l = R\varphi$. Если известна вся окружность, можно найти нужную долю.

04

Вычисли аккуратно

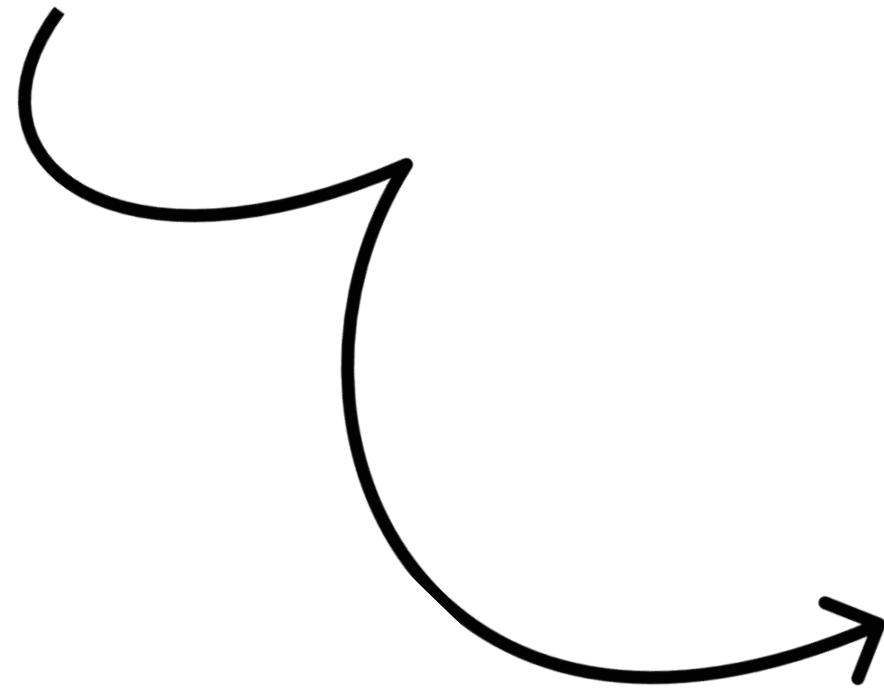
Подставь значения без спешки, соблюдая порядок действий. После вычисления обязательно сократи дроби и упрости выражение, если это возможно.

05

Сделай проверку

Сравни ответ с длиной всей окружности и запиши единицы измерения. Это помогает заметить ошибку и оформить решение завершённо.

Дуга окружности: формула, смысл, применение



Длина дуги определяется радиусом и центральным углом, а вычислять её можно по формуле в градусах или в радианах. Это простой инструмент для решения геометрических задач и проверки ответов.

