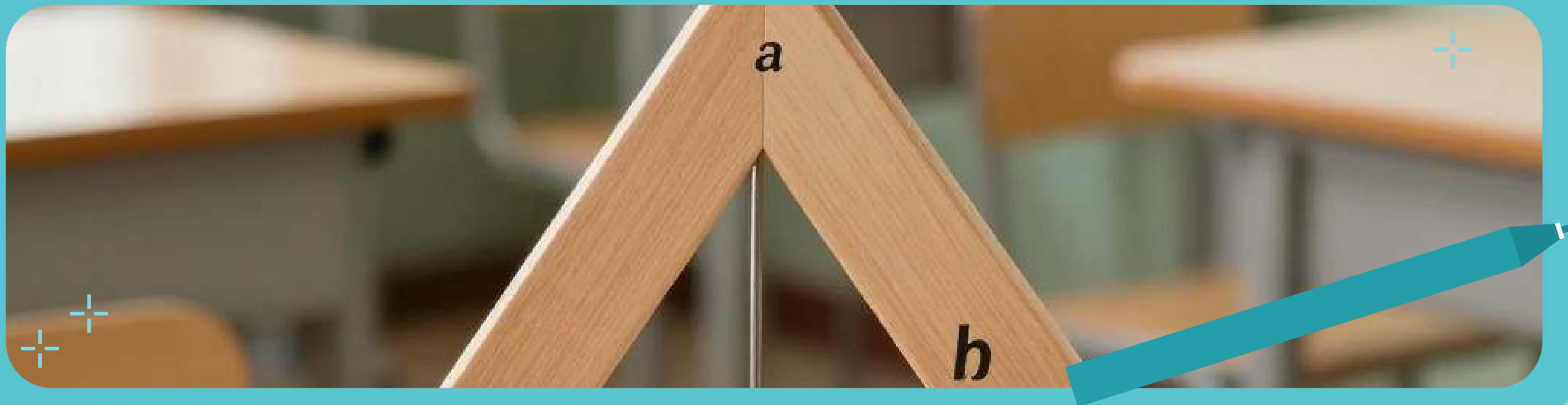


Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Катеты a , b , гипотенуза c , высота h и проекции p , q : выводим формулы через подобие.



Почему это изучают именно в 9 классе

В 9 классе метрические соотношения связывают признаки подобия треугольников и теорему Пифагора. Они позволяют вычислять неизвестные элементы, имея минимальные данные. Формулы работают только в прямоугольном треугольнике и опираются на обозначения a , b , c , h , p , q .



Элементы фигуры и что они обозначают



Прямой угол

В прямоугольном треугольнике один угол равен 90° , поэтому катеты образуют «угол-полку», а гипотенуза лежит напротив. Именно это условие запускает все дальнейшие связи.



Катеты и гипотенуза

Катеты обозначают a и b , а гипотенузу — c . Высота проводится к гипотенузе, поэтому удобно сразу мысленно «разделять» c на части и сравнивать длины.



Высота h к гипотенузе

Высота h опускается из прямого угла на гипотенузу и образует два малых прямоугольных треугольника. Она помогает получать формулы без измерения всех сторон.



Проекции p и q

Точка падения высоты делит гипотенузу на два отрезка: p и q . Проекции катетов на гипотенузу соответствуют этим отрезкам и напрямую участвуют в формулах.



Одна схема — много выводов

Чертёж с обозначениями a , b , c , h , p и q используют во всех задачах по теме. Главное — помнить: формулы действуют только для прямоугольного треугольника.



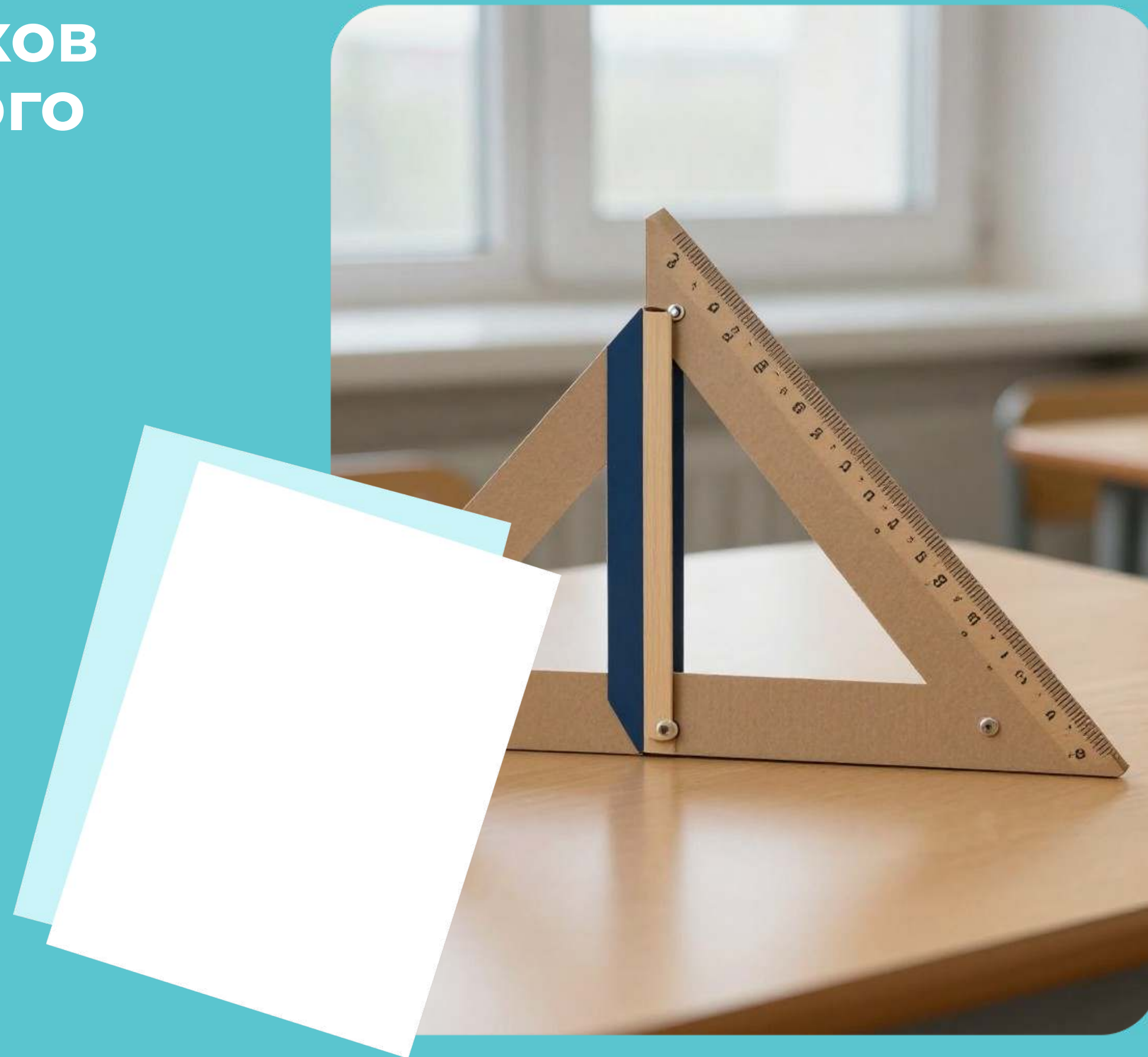
Подобие треугольников внутри прямоугольного треугольника

Два малых треугольника

Высота h к гипотенузе делит исходный треугольник на два меньших прямоугольных треугольника. У каждого из них сохраняются те же острые углы, что и у исходного, значит треугольники подобны.

Как появляется система формул

Из подобия следует пропорциональность соответствующих сторон, а значит появляются метрические соотношения. Обычно на схеме одновременно отмечают прямой угол, высоту h и отрезки p и q , чтобы сразу видеть структуру выводов.



Первое метрическое соотношение для катетов

Квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета: $a^2 = c \cdot p$. Это работает, потому что катет и проекция связаны через подобие треугольников, возникающих после проведения высоты.

Аналогично второй катет подчиняется формуле $b^2 = c \cdot q$. Если вы знаете c и p , то сразу находите a , а затем вычисляете q и переходите к b . Тригонометрия не нужна.

Важно помнить область применения: все соотношения справедливы только для прямоугольного треугольника, где высота опущена на гипотенузу. И p , q — именно отрезки, на которые поделена гипотенуза высотой.



Произведение $p \cdot q$ определяет квадрат высоты. Поэтому высота «зависит» от того, как гипотенуза разбита на части: одинаковая сумма не всегда даёт одинаковый h .

Школьная геометрия: метрические соотношения в прямоугольном треугольнике (вывод через подобие треугольников).

$$h^2 = p \cdot q$$

Зная проекции p и q ,
МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ ВЫСОТУ
напрямую.

Третье метрическое соотношение для гипотенузы

Гипотенуза равна сумме двух отрезков, на которые её делит высота: $c = p + q$. Это самое простое соотношение, но оно запускает расчёты остальных величин.

Когда известны p и q , сначала находят c . После этого катеты и высоту уже проще вычислять по формулам $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ и $h^2 = p \cdot q$, не запутываясь в последовательности.

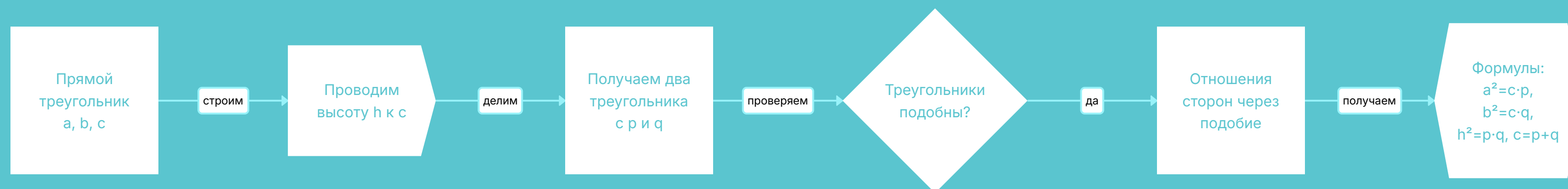
Понимание $c = p + q$ помогает не только считать, но и проверять себя: если получилась гипотенуза, сумма проекций должна совпадать с ней. Несовпадение — сигнал ошибки.

Эту связь удобно использовать в задачах, где на рисунке заданы отрезки p и q , а стороны треугольника нужно восстановить. Тогда формулы превращаются в понятный пошаговый план.



Цепочка вывода метрических соотношений

Прямоугольный треугольник: проведение высоты → подобие → формулы



Связь с формулой площади

Площадь прямоугольного треугольника можно записать как $S = ab/2$. Здесь a и b — катеты, поэтому способ удобен, когда катеты известны и нужно получить площадь без дополнительных шагов.

Та же площадь выражается иначе: $S = ch/2$, потому что высота h опущена на гипотенузу c . Если известны c и h , этот вариант помогает быстрее найти S , не вычисляя катеты.

Приравнивая два выражения, получаем $ab = ch$. Это равенство связывает катеты, гипотенузу и высоту в одной записи и работает как дополнительная проверка вычислений.



Основные формулы темы в одной таблице



Формула	Что находится	Какие известны элементы
$c = p + q$	c	p, q
$a^2 = c \cdot p$	a	c, p
$b^2 = c \cdot q$	b	c, q
$h^2 = p \cdot q$	h	p, q
$ab = ch$	проверка	a, b или c, h

Обобщение метрических соотношений для прямоугольного треугольника (как в школьном курсе).

Формулы связывают стороны, высоту и проекции через гипотенузу и её разбиение на p и q .

Все ключевые величины выражаются через гипотенузу, её отрезки p, q и высоту h , поэтому достаточно правильно выбрать формулу по данным в задаче.

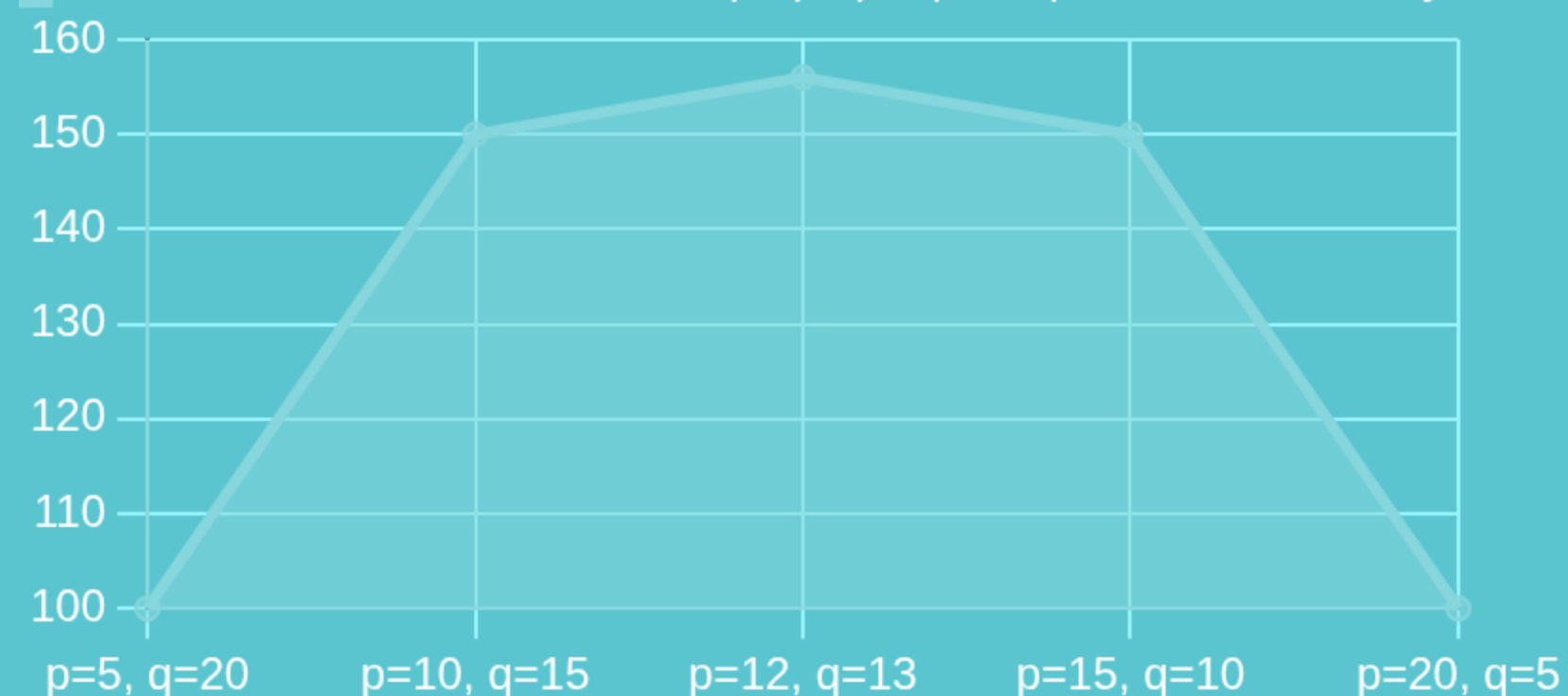


Изменение отрезков p и q при фиксированной гипотенузе

При $c = 25$ выполняется $q = 25 - p$, поэтому зависимость q от p — линейная. Высота связана через $h^2 = p \cdot q$, значит h растёт, когда произведение $p \cdot q$ становится больше.

Из таблицы видно: при сильной неравности отрезков p и q произведение меньше, поэтому высота ниже. Максимум получается при более близких значениях p и q .

Зависимость высоты h от выбора p при фиксированной гипотенузе $c =$



Расчёты для фиксированной гипотенузы $c = 25$ см по формулам $q = c - p$ и $h^2 = p \cdot q$; значения выбраны для наглядности.

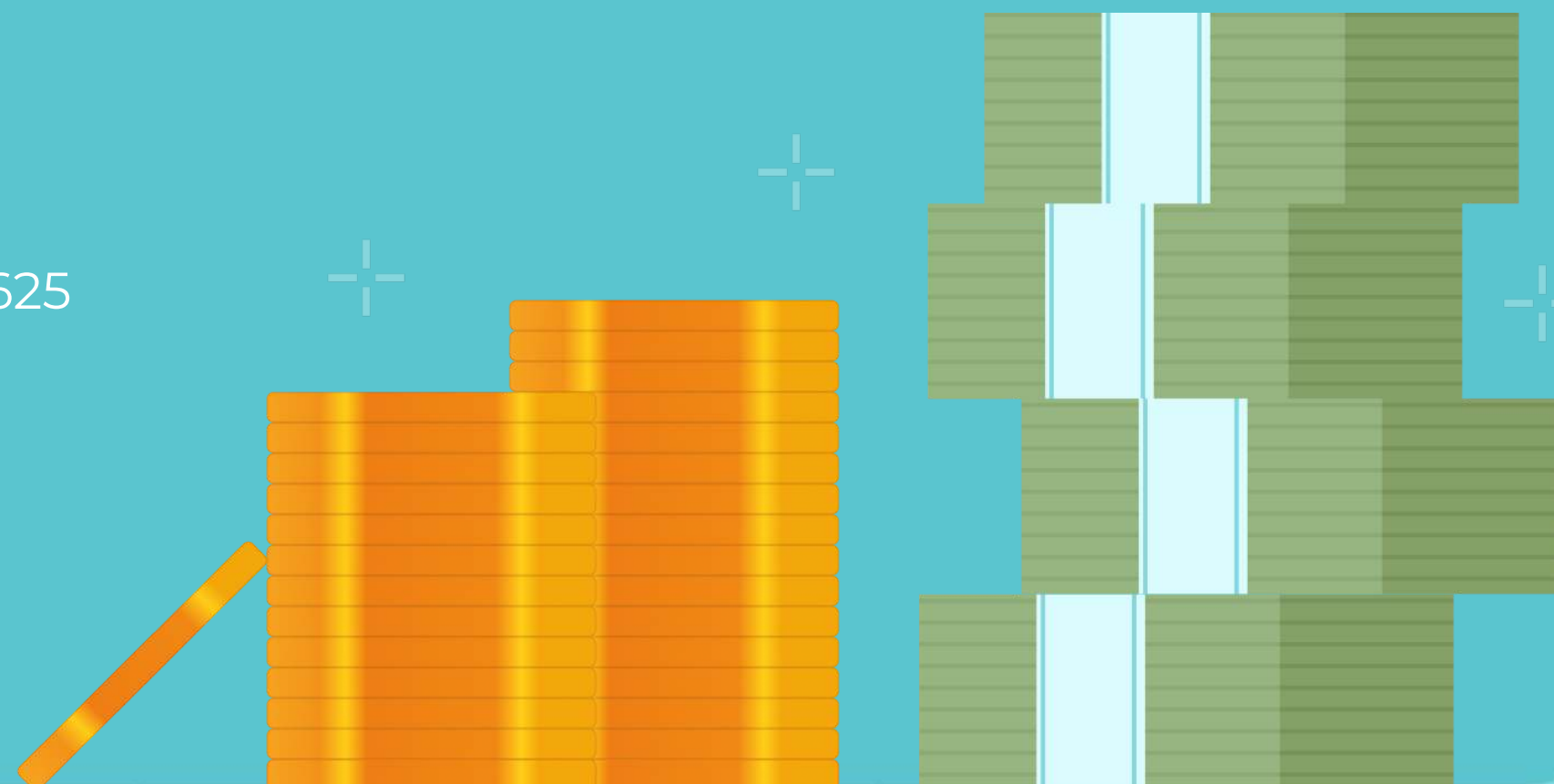


Пример вычисления катета по проекции

Дано: $c = 25$ см и $p = 9$ см. По соотношению $a^2 = c \cdot p$ получаем $a^2 = 25 \cdot 9 = 225$, значит $a = 15$ см. Отрезок p является проекцией катета a .

Далее на гипотенузе остаётся второй отрезок: $q = c - p = 25 - 9 = 16$ см. Тогда $b^2 = c \cdot q = 25 \cdot 16 = 400$, поэтому $b = 20$ см.

Проверка по теореме Пифагора: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$. Значит, вычисления катетов согласуются с геометрией прямоугольного треугольника.



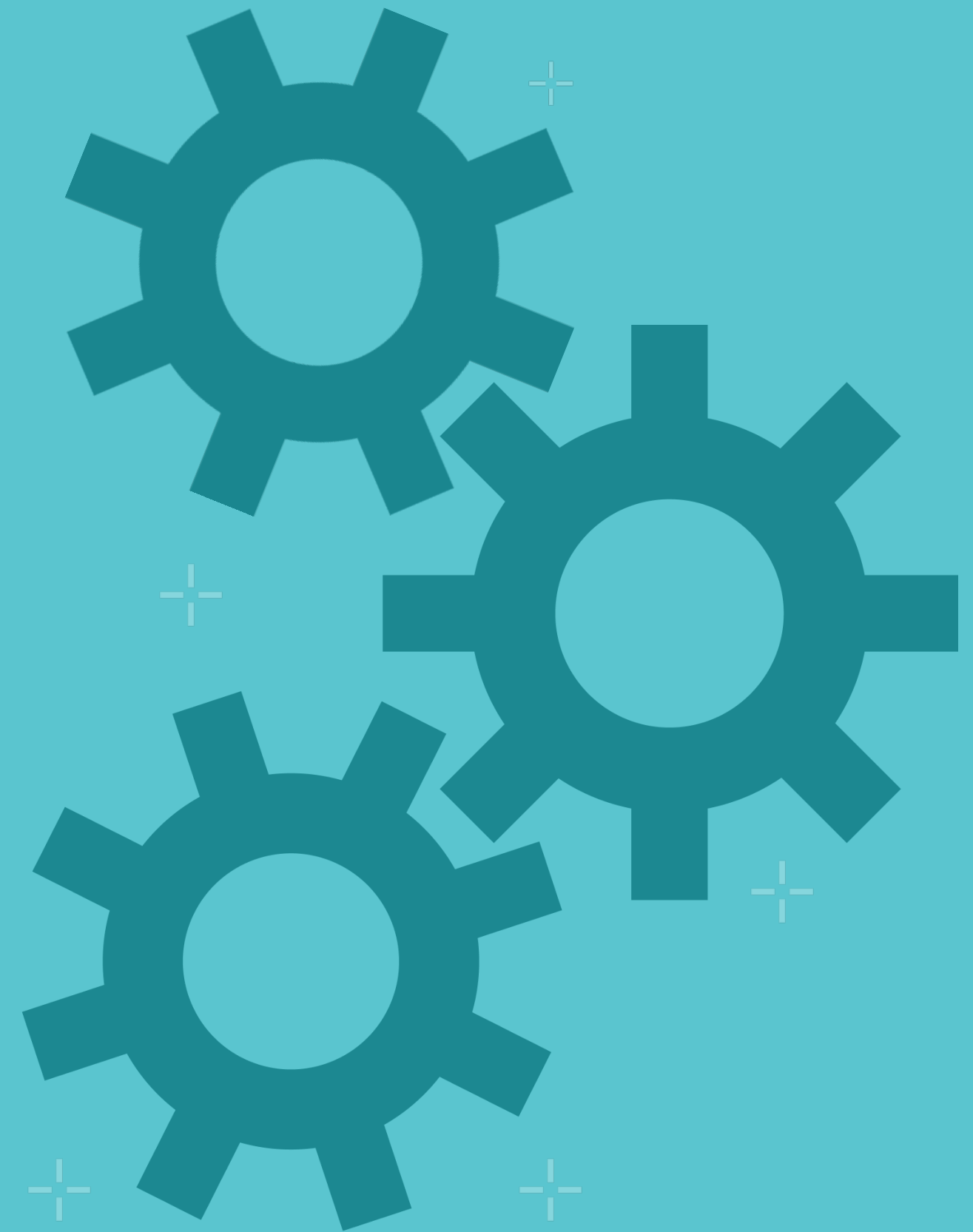
Пример вычисления высоты и проверка площади

Пусть $p = 6$ см и $q = 24$ см. Тогда высота к гипотенузе находим по формуле $h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{6 \cdot 24} = 12$ см.

Гипотенуза равна сумме отрезков: $c = p + q = 6 + 24 = 30$ см. Теперь можно использовать высоту и длину гипотенузы для проверки другими способами.

Площадь найдём как $S = ch/2$: $S = 30 \cdot 12 / 2 = 180$ см². Это выражение напрямую использует высоту к гипотенузе.

Проверим через катеты. По $a^2 = c \cdot p$: $a^2 = 30 \cdot 6 = 180$, значит $a = 15$ см; по $b^2 = c \cdot q$: $b = 24$ см. Тогда $S = ab/2 = 15 \cdot 24 / 2 = 180$ см², результат совпадает.



Геометрический смысл проекций катетов

Что означает проекция

Проекция катета на гипотенузу показывает, какую «часть» гипотенузы задаёт этот катет в системе подобных треугольников. Поэтому отрезки p и q ведут себя как координаты, через которые связываются все остальные величины.

Почему появляются p и q

Если мысленно провести высоту h из прямого угла, то получатся два меньших прямоугольных треугольника. Их подобие исходному объясняет, почему формулы всегда содержат произведения и суммы p и q .



Типичные ошибки в задачах на метрические соотношения



Путаница катёта и его проекции

Вместо a и p подставляют одинаковые обозначения или меняют их местами. Важно различать катеты a , b и отрезки p , q на гипотенузе, полученные от высоты.



Неверная формула для высоты

Часто записывают $h^2 = c \cdot p$, хотя верно $h^2 = p \cdot q$. Проверьте, какие именно два отрезка на гипотенузе перемножаются, прежде чем извлекать корень.



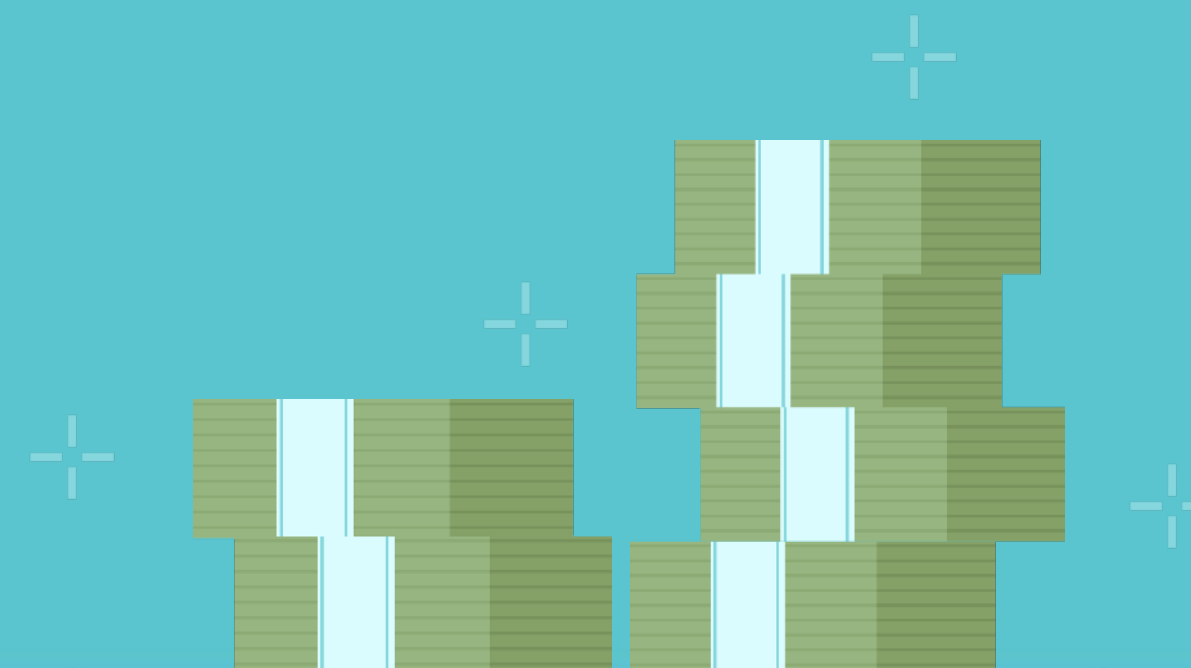
Забыли, что $c = p + q$

Если не вспомнить связь между гипотенузой и её отрезками, невозможно корректно найти второй отрезок. Любой расчёт обычно начинается с того, что $q = c - p$ или $p = c - q$.



Нет проверки: что дано и что нужно найти

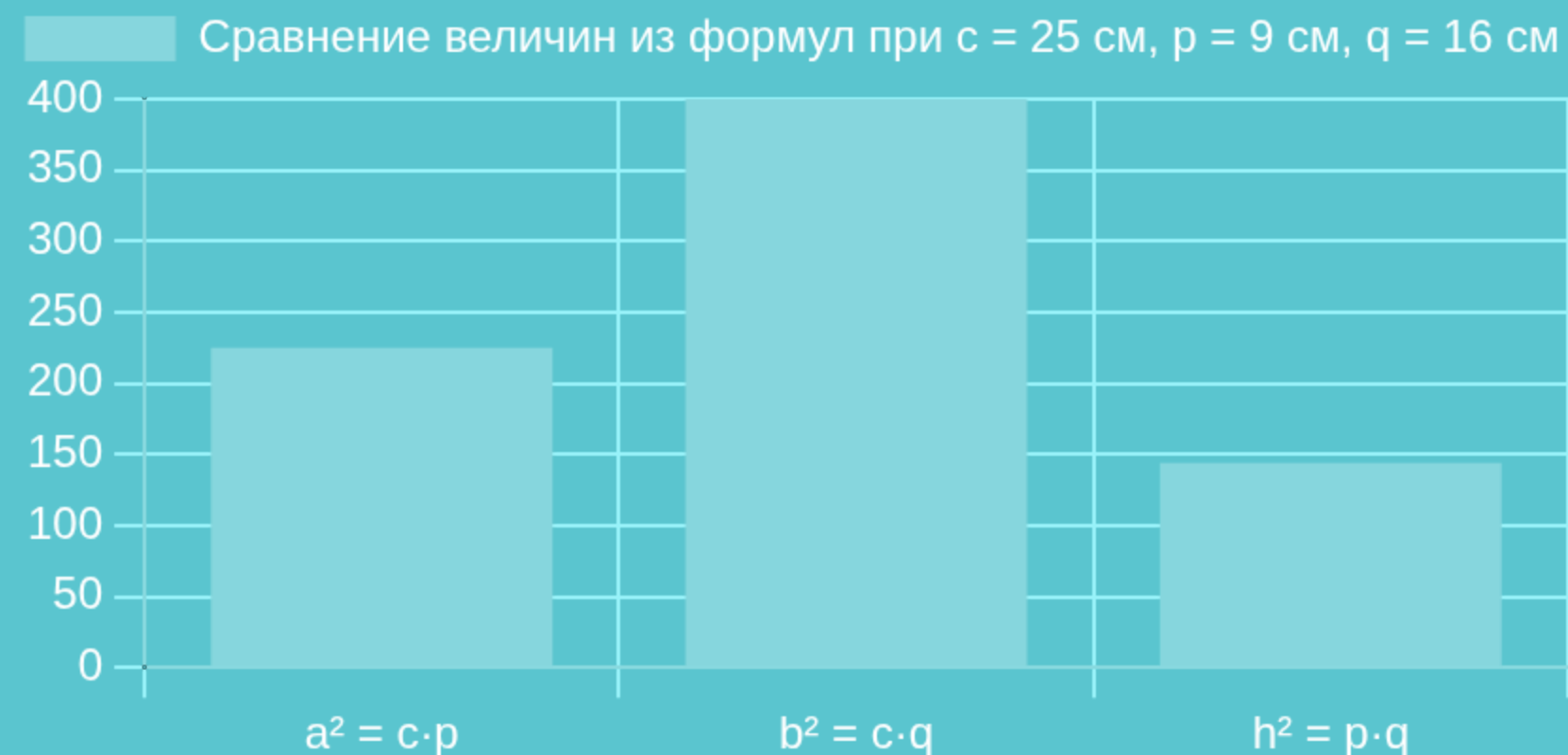
После подстановки чисел легко выбрать «не ту» неизвестную формулу. Сравните требуемую величину (a , b , h , p или q) с формулой: тогда ошибка выбора сразу станет заметнее.



Сравнение зависимостей между элементами треугольника

Для высоты используется только произведение двух отрезков $p \cdot q$, а для катетов — произведение c с одним из отрезков. Поэтому масштабы на диаграмме отличаются.

Диаграмма подчёркивает правило запоминания: катёты «подключают» всю гипотенузу, а высота зависит лишь от распределения p и q на ней.



Пример рассчитан по формулам $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$, $h^2 = p \cdot q$ при $c = 25$ см, $p = 9$ см, $q = 16$ см; значения получены вычислением.



Связь с другими темами геометрии

Метрические соотношения опираются на теорему Пифагора и признаки подобия треугольников. С их помощью высота к гипотенузе превращается из «дополнительной линии» в точный инструмент вычислений.

Формулы площади треугольника связывают катеты с произведением s и h . Поэтому равенство $ab = ch$ работает не как отдельный факт, а как продолжение общих геометрических идей.

В итоге прямоугольный треугольник рассматривается как система взаимосвязанных величин: стороны, высота и проекции не существуют по отдельности. Это делает задачи на вычисление более понятными и управляемыми.



Где применяются эти формулы

Условие с высотой

Нужно найти высоту к гипотенузе по длинам отрезков p и q , которые часто получаются после построений на чертеже.

Отрезки на гипотенузе

Если известны гипотенуза c и один отрезок, например p , катет вычисляют через $a^2 = c \cdot p$ или $b^2 = c \cdot q$ без использования тригонометрии.

Проверка результата

Получив стороны, удобно проверить вычисления через формулу площади: $S = ab/2$ и $S = ch/2$. Совпадение двух площадей подтверждает правильность.

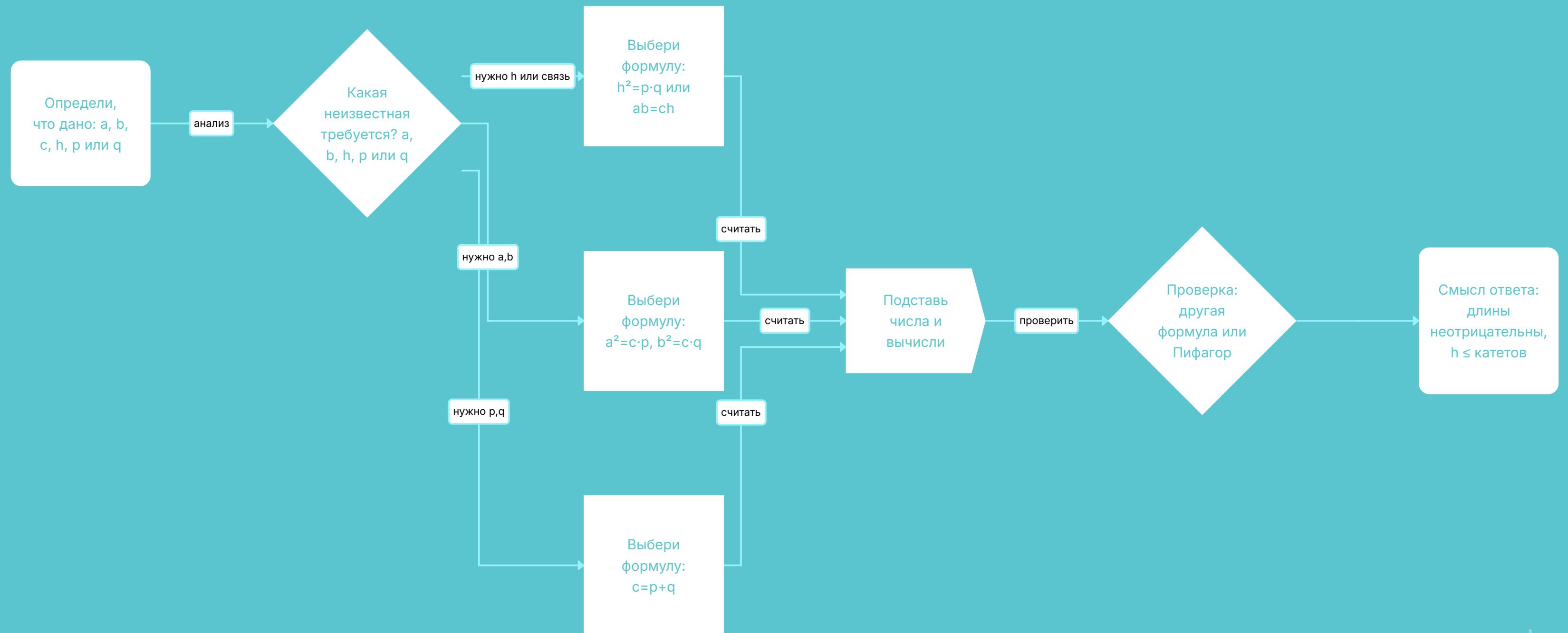
Модели и схемы

Формулы помогают строить геометрические модели в задачах и черчении, когда измерить напрямую нельзя, а можно получить часть данных через подобные треугольники.



Алгоритм решения задач по теме

Пошаговая схема выбора формулы и проверки ответа



Связь, которая ускоряет решения



Метрические соотношения прямоугольного треугольника основаны на подобии трёх треугольников и связывают катеты, гипотенузу, высоту и проекции. Формулы $c=p+q$, $a^2=c \cdot p$, $b^2=c \cdot q$, $h^2=p \cdot q$ и $ab=ch$ делают вычисления быстрыми, а проверки по площади и Пифагору помогают не ошибиться.