

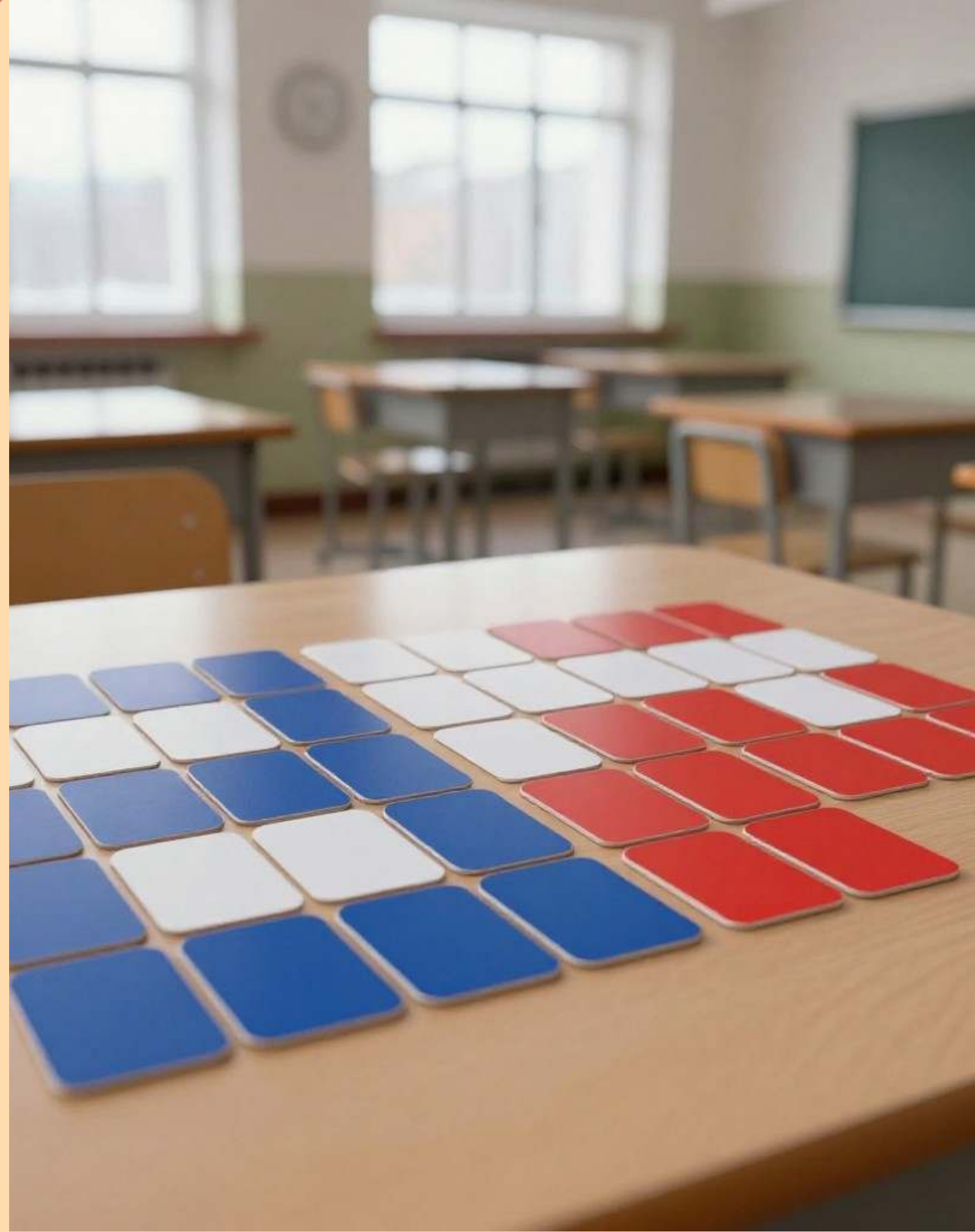


Размещения в комбинаторике: как считать упорядоченные выборки

Считаем варианты, когда порядок действительно важен.

Где размещения встречаются в алгебре 9 класса

Размещения — одна из главных тем комбинаторики. Она помогает научиться считать варианты выбора, видеть роль порядка и применять факториал, перестановки и сочетания в школьных задачах.



Что такое размещение из n по k

Упорядоченный выбор

Размещение из n по k означает выбор k различных элементов из n , где важен не только состав, но и порядок расположения выбранных элементов.

Разные результаты

Если меняется хотя бы один элемент или их последовательность, получается другое размещение. Поэтому АВ и ВА считаются разными вариантами, хотя набор одинаковый.

Без повторений

В обычных размещениях один объект используют не более одного раза. Это удобно для задач, где каждый выбор должен быть уникальным и не может повторяться.



Почему порядок важен

Места различаются

Когда есть несколько мест, каждый участник занимает конкретную позицию. Если А и Б поменяются местами, ответ меняется, потому что меняется распределение по позициям.

Один набор — разные итоги

Для трёх учеников и двух мест возможны шесть вариантов. Набор участников один и тот же, но перестановка по местам даёт новый результат.

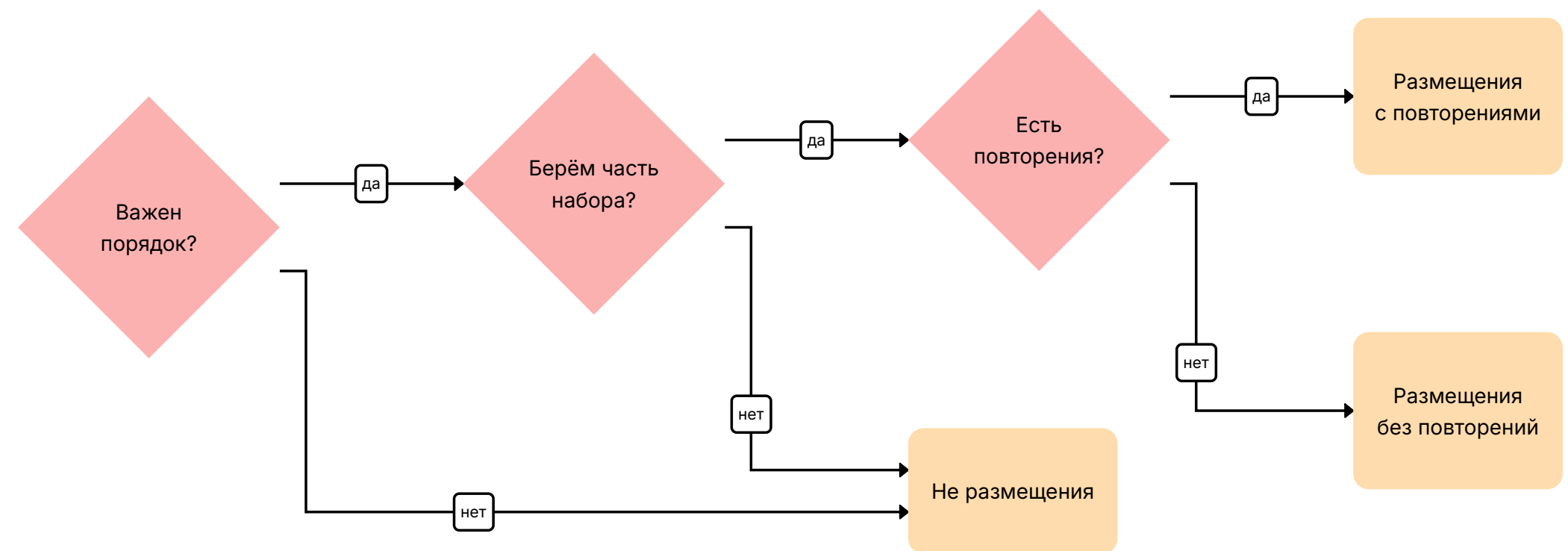
Главный вывод

При размещении важно смотреть не только на выбранные объекты, но и на их порядок. Именно он делает одинаковый набор элементов разными ответами.



Как распознать задачу на размещения

Проверяем условия задачи по шагам: порядок, часть набора, повторения и роли.



Как быстро растёт число размещений

Даже при одном и том же n увеличение k резко расширяет число вариантов, поэтому полный перебор быстро становится неудобным.

Каждый новый шаг добавляет множитель, и рост становится очень быстрым. Формула заменяет долгий ручной подсчёт.

Рассчитано по формуле $A(n, k) = n! / (n-k)!$



Формула размещений без повторений

Основная запись

01

Обычные размещения считают по формуле $A(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Она подходит, когда выбирают k различных объектов из n и порядок имеет значение.

Первое место

02

Сначала можно выбрать любой из n объектов. Для первого места есть n возможностей, потому что ни один элемент ещё не использован.

Дальнейшие места

03

После каждого выбора число вариантов уменьшается на один: $n-1$, затем $n-2$ и так далее, пока не заполнятся все k позиций.

Пример расчёта

04

Если нужно выбрать 3 объекта из 7, получаем $A(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Удобно считать не по формуле сразу, а через последовательное умножение.

n	k	Запись	Результат
4	2	4·3	12
5	3	5·4·3	60
7	4	7·6·5·4	840

Примеры вычисления размещений без повторений

В таблице показано, как формула работает на разных значениях n и k.

Чем больше k, тем длиннее произведение и тем быстрее растёт ответ. Это хорошо видно уже на небольших числах.

Размещения без повторений: где применяется модель



Рассадка по местам

Если каждому человеку отводится своё место, важны и состав участников, и их порядок. После выбора одной позиции количество свободных вариантов уменьшается.



Роли в команде

Когда нужно назначить капитана и помощника, один и тот же набор людей даёт разные варианты из-за разных ролей. Порядок назначения становится существенным.



Призовые места

На соревнованиях первое, второе и третье места различаются. Поэтому один и тот же список призёров можно расположить несколькими способами, и каждый будет отдельным результатом.



Коды из разных символов

Если символы не повторяются, каждый следующий выбор ограничен оставшимися вариантами. Так удобно считать пароли или коды, где повторение запрещено условием.

10000

вариантов даёт
четырёхзначный код
из десяти цифр, если цифры
можно повторять.

Когда повторения разрешены, число вариантов резко увеличивается. Для кодов и паролей это особенно заметно: одинаковые символы могут встречаться несколько раз.

Рассчитано по формуле n^k для $n=10$ и $k=4$

Сравнение вариантов при повторениях и без повторений

Разрешение повторений заметно расширяет выбор, особенно в кодах и паролях, где одинаковые цифры не запрещены.

Если повторения допустимы, число вариантов резко возрастает; при одинаковых условиях оно почти вдвое больше.

Формулы комбинаторики: $A(n, k) = n! / (n-k)!$, n^k .

Чем размещения отличаются от перестановок

Выбор части набора

Размещение используют, когда из n объектов берут только k . Перестановка рассматривает весь набор целиком, поэтому в ней участвуют все элементы без исключения.

Связь с формулой

У размещений формула зависит от двух чисел: $A(n, k) = n! / (n-k)!$. Когда k становится равным n , она превращается в обычный факториал $n!$.

Пример с местами

Если шесть учеников распределяют на три места, это размещение. Если те же шесть учеников рассаживают на шесть мест, получается перестановка, потому что используется весь набор.

Чем размещения отличаются от сочетаний

01

Сначала смотрим на порядок

В сочетаниях порядок не влияет на ответ: набор из двух учеников считается одним вариантом, даже если их поменять местами.

Роли меняют задачу

Если одному ученику дают роль старшего, а другому помощника, порядок уже важен. Тогда одинаковая пара даёт разные результаты, и задача становится размещением.

02

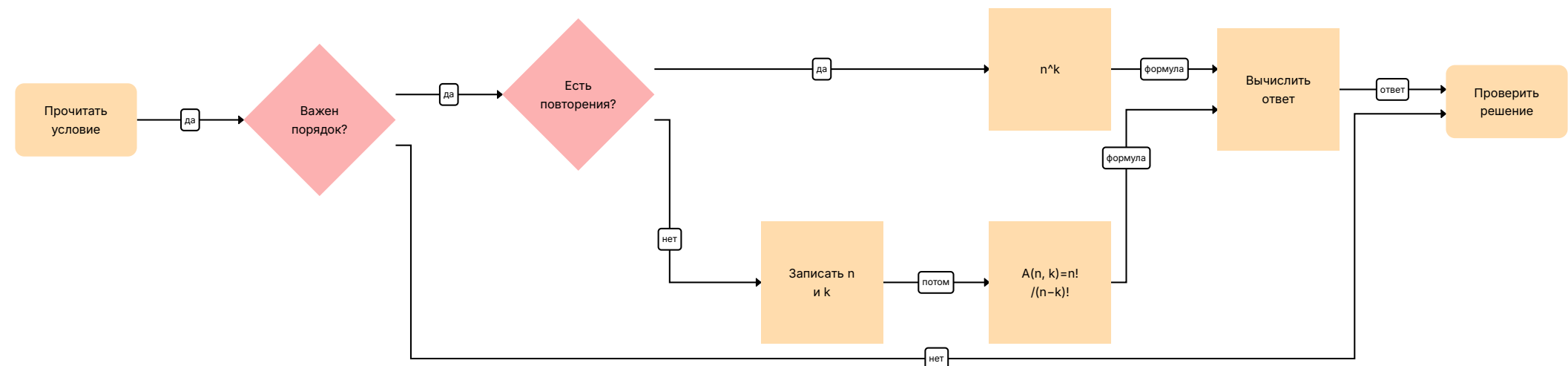
03

Проверка на примере

При одинаковых обязанностях двух дежурных из четырёх учеников считают сочетания. При разных обязанностях тех же двух учеников считают размещения, потому что варианты различаются по месту и роли.

Как решать задачи на размещения

Пошаговая схема выбора формулы по условиям задачи



Размещения, перестановки и сочетания: сравнение

Сравнение помогает быстро выбрать нужную формулу и не перепутать, нужно ли учитывать порядок.

Главное различие — в том, учитывается ли порядок и берётся ли весь набор или только его часть.

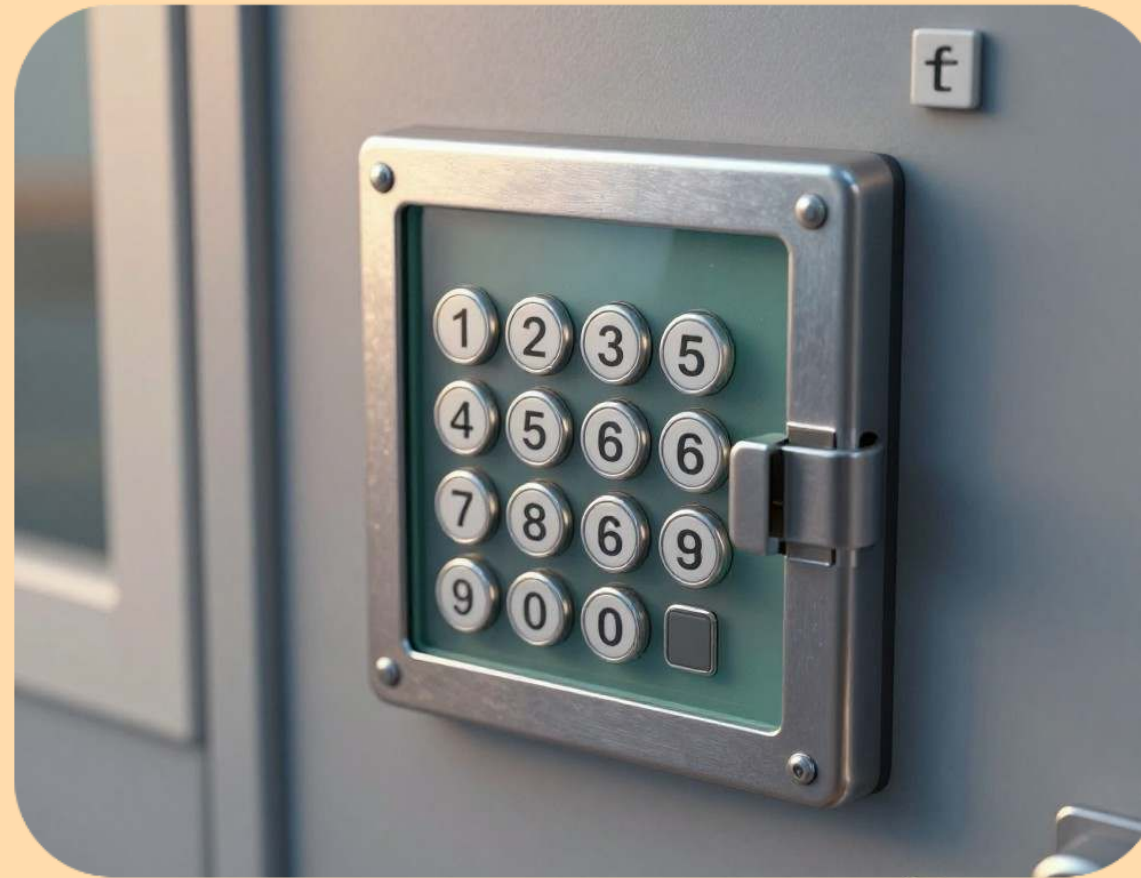
Понятие	Порядок	Формула
Размещение	важен	$A(n, k)$
Перестановка	важен	$n!$
Сочетание	не важен	$C(n, k)$

Размещения в повседневной жизни



Пьедестал победителей

На соревнованиях важны не только участники, но и их места. Первое, второе и третье место образуют разные варианты, потому что порядок награждения меняет результат. Именно поэтому такие задачи удобно считать размещениями.



Код на замке

Когда человек вводит цифровой код, каждая позиция важна отдельно. Если разрешены повторяющиеся цифры, вариантов становится очень много, даже если сам код короткий. В этом случае комбинаторика помогает оценить сложность подбора.



Книги и сцена

На полке книги можно расставить по-разному, а на школьной сцене определить очередность выступлений. В обоих случаях порядок создаёт новые варианты, хотя набор участников или предметов остаётся тем же.

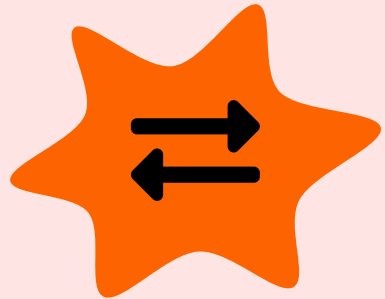
Примеры из жизни и число вариантов

Даже небольшое увеличение числа позиций резко меняет результат, потому что каждая следующая позиция умножает количество возможностей.

Наибольшее значение здесь даёт код с повторениями: отсутствие запрета на одинаковые цифры значительно увеличивает число вариантов.

Формулы комбинаторики: $A(8,3)$, 10^4 , $A(7,5)$.

Типичные ошибки при решении задач на размещения



Путают с сочетаниями

Иногда выбирают формулу без проверки порядка. Если перестановка выбранных объектов меняет ответ, это не сочетание, а размещение.



Считают весь набор

Частая ошибка — применять факториал для всех n объектов, хотя по условию нужно выбрать только k . Тогда ответ получается завышенным.



Не замечают повторения

Нужно отдельно проверять, разрешено ли использовать один и тот же объект несколько раз. От этого зависит выбор между $A(n, k)$ и n^k .



Не делают проверку

Полезно мысленно поменять выбранные элементы местами. Если результат изменился, порядок важен, значит задачу следует решать через размещения.

Обозначение	Что значит	Формула
$A(n, k)$	без повторений	$n! / (n-k)!$
n^k	с повторениями	повторения разрешены
$n!$	факториал	$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Ключевые формулы и обозначения темы

Эти записи нужно знать, чтобы быстро распознавать тип задачи и выбирать верную формулу.

Формула зависит от двух признаков: учитывается ли порядок и допускаются ли повторения.

Размещения — это порядок в выборе

Тема показывает, как из набора объектов получить упорядоченные варианты и не запутаться в подсчёте. Если помнить про порядок, повторения и нужную формулу, задачи решаются быстро и уверенно.