

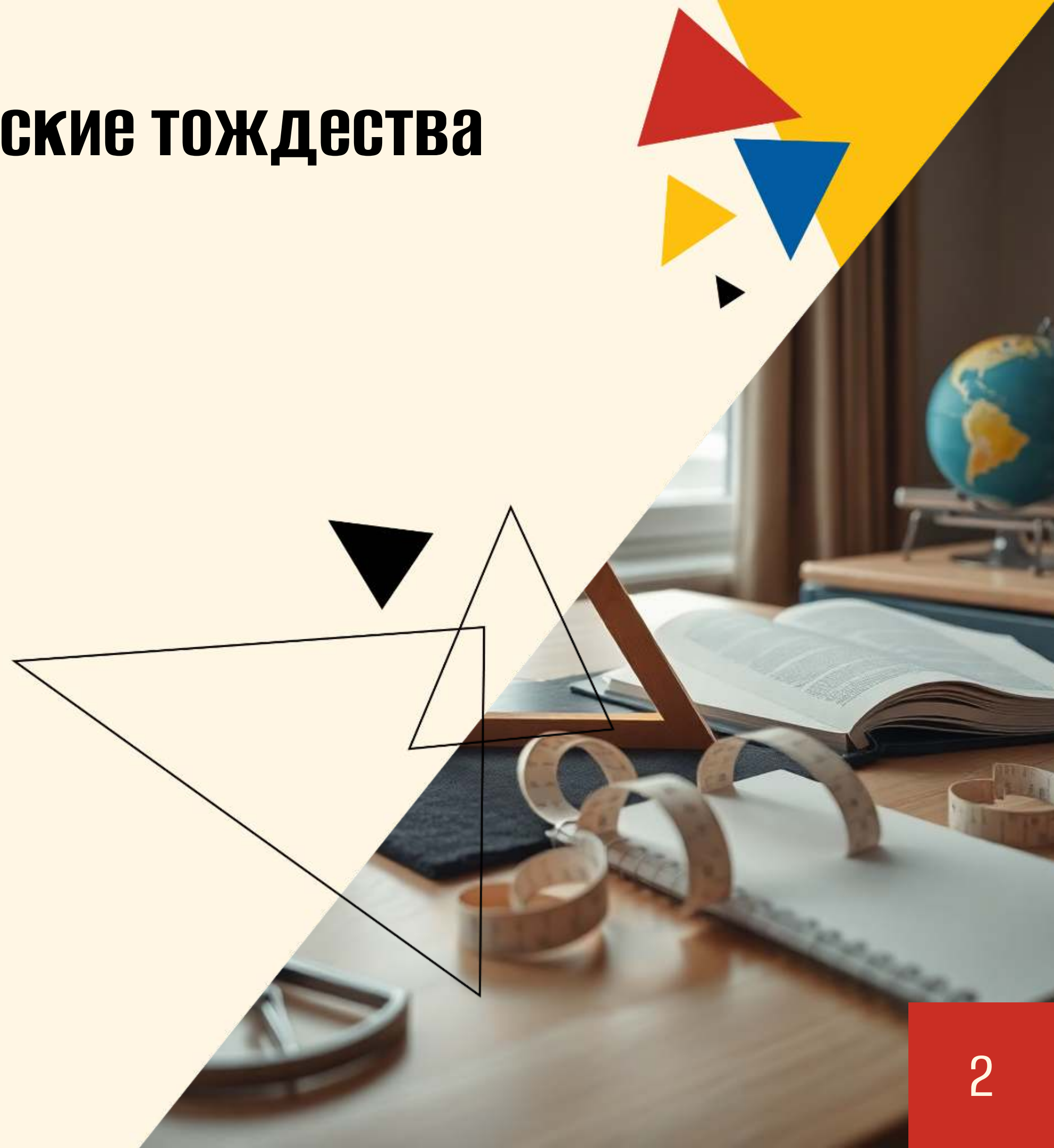
Тригонометрические тождества: основные связи между функциями

Тождества помогают превращать сложные выражения в простые и удобные.



Зачем изучать тригонометрические тождества в 10 классе

Эти формулы связывают геометрию, алгебру и функции, поэтому становятся основным инструментом для преобразования выражений, доказательства равенств и решения тригонометрических уравнений.



Едини́чная окру́жность как источник основных формул

1 Координаты точки

На единичной окружности каждая точка, соответствующая углу α , имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Это позволяет сразу связать геометрический образ угла с тригонометрическими функциями.

2 Основное тождество

Поскольку точка лежит на окружности радиуса 1, расстояние до центра постоянно. Отсюда следует равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, которое работает при любом значении угла.

3 Тангенс через синус и косинус

Если $\cos \alpha \neq 0$, то $\operatorname{tg} \alpha$ определяется как отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$. Такая запись удобна для преобразований, когда нужно выразить одну функцию через другую.

4 Котангенс через координаты

Если $\sin \alpha \neq 0$, то $\operatorname{ctg} \alpha$ равен отношению $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$. Эта формула особенно полезна при сокращении дробей и переходе к единой системе функций.

5 Связь всех функций

Эти соотношения показывают, что основные тригонометрические функции не изолированы. Они выводятся из одной геометрической модели и постоянно используются совместно в вычислениях и доказательствах.



Основные тригонометрические тождества и их смысл

Ключевые формулы помогают переходить от одной функции к другой и упрощать выражения.

Главная опора — основное тождество; остальные формулы позволяют выражать tg и ctg через $\sin$ и $\cos$.

Формула	Условие	Смысл
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	любое α	основа преобразований
$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	$\cos \alpha \neq 0$	переход к $\sin$, $\cos$
$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$	$\sin \alpha \neq 0$	переход к $\sin$, $\cos$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$	$\cos \alpha \neq 0$	удобно для дробей

Знаки тригонометрических функций по четвертям

I четверть

В первой четверти координатной плоскости все основные тригонометрические функции положительны. Это самая удобная область для начальных вычислений и проверки результатов.

II четверть

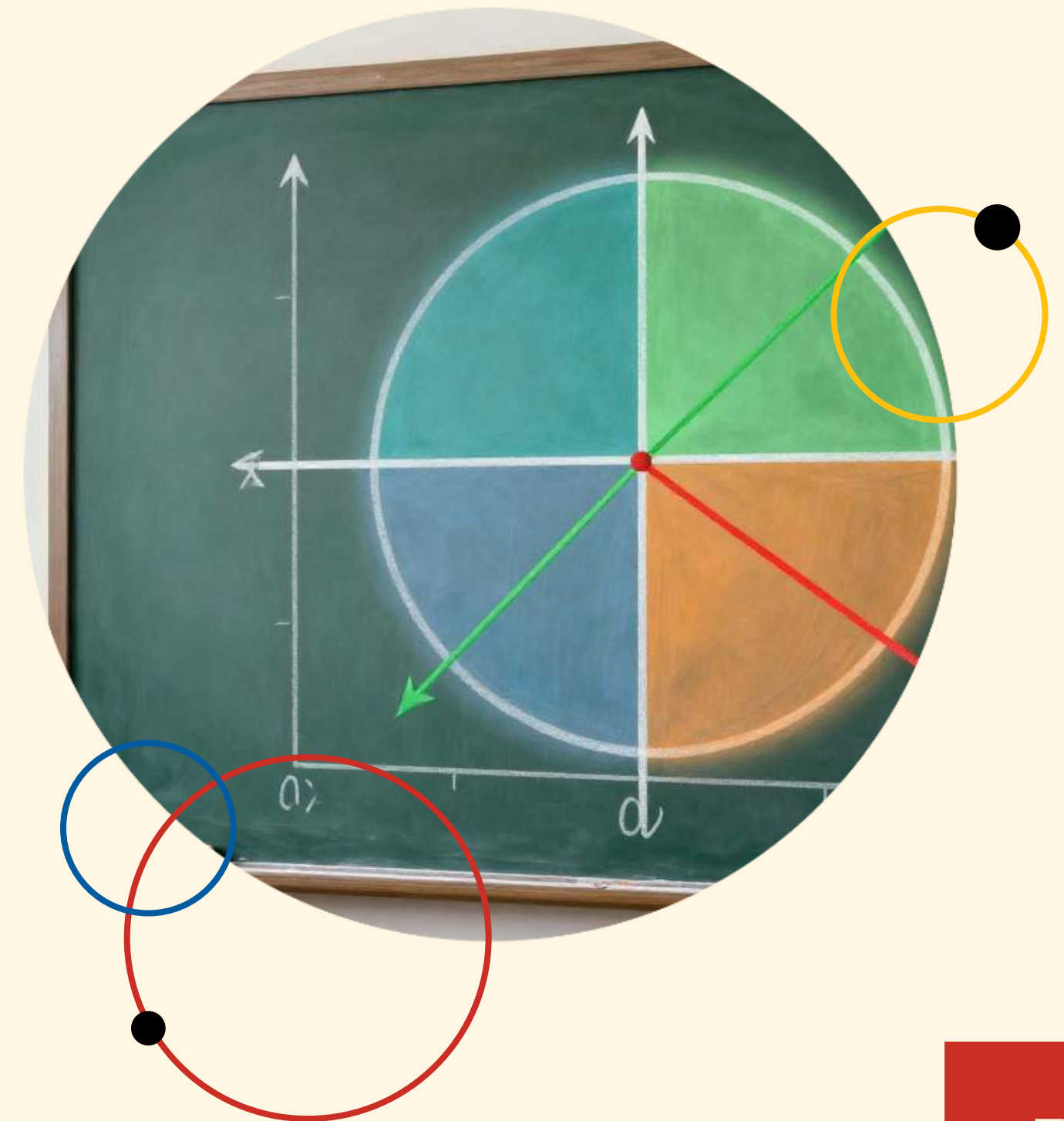
Во второй четверти положителен только синус, потому что ордината точки на единичной окружности остаётся положительной, а абсцисса становится отрицательной.

III четверть

В третьей четверти положительными оказываются тангенс и котангенс, поскольку синус и косинус имеют одинаковый знак и их отношение становится положительным.

IV четверть

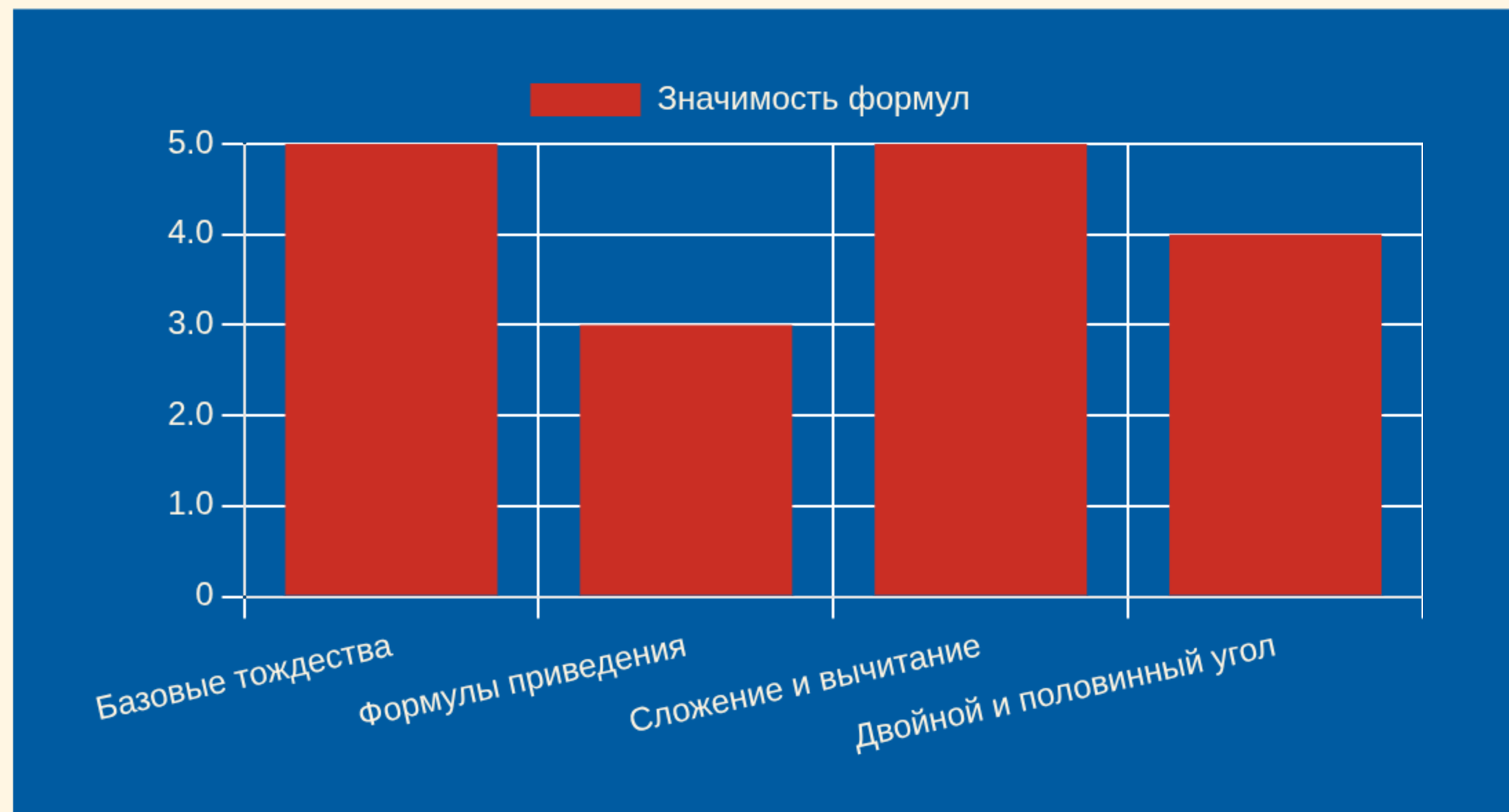
В четвёртой четверти положителен только косинус: точка расположена ниже оси Ox , но правее оси Oy , поэтому абсцисса положительна, а ордината отрицательна.



Основные группы формул тригонометрии

Разные группы формул решают разные задачи: одни дают фундамент, другие ускоряют вычисления в нестандартных углах и многошаговых преобразованиях.

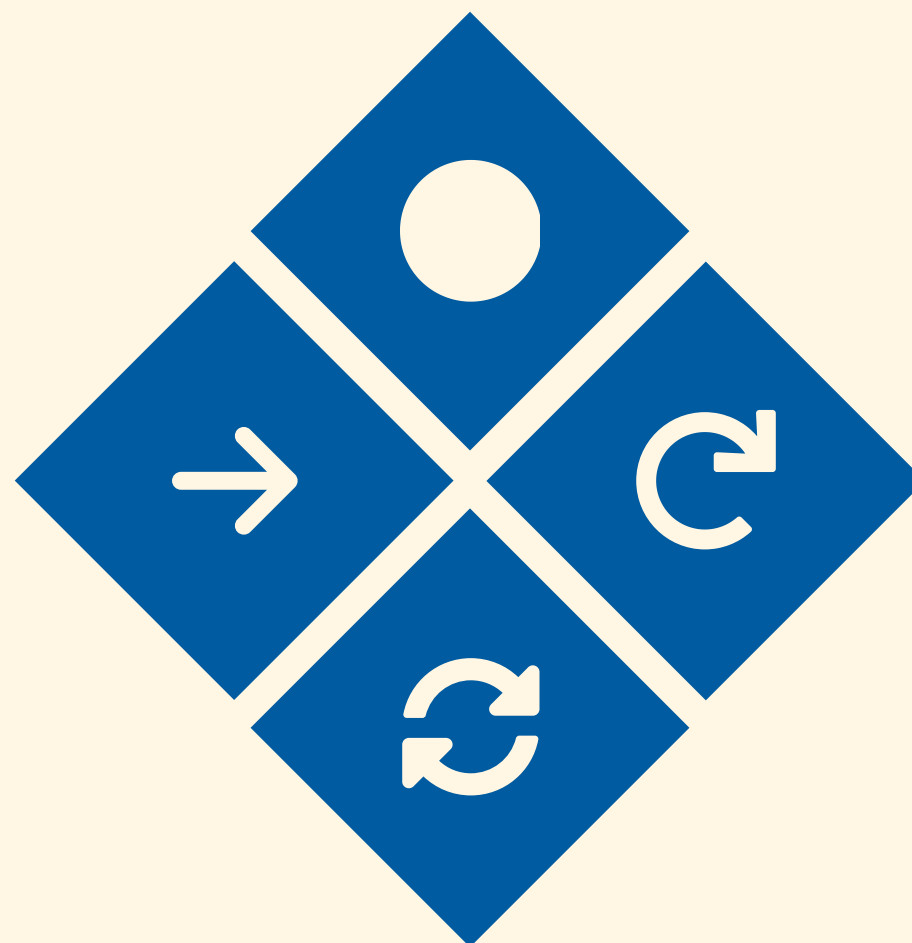
На практике чаще всего опираются на базовые тождества и формулы сложения, а формулы приведения делают вычисления для неострых углов значительно короче.



Формулы приведения для углов 90° , 180° , 270° и 360°

Формулы для $360^\circ \pm \alpha$ опираются на периодичность. Они возвращают значение к исходному углу, поэтому позволяют сокращать вычисления и проверять результаты через повторяемость функций.

Полный оборот



Сдвиг на 90°

Углы вида $90^\circ \pm \alpha$ часто приводят к смене функций: синус может перейти в косинус, а тангенс — в котангенс. Одновременно нужно внимательно отслеживать знак.

Сдвиг на 270°

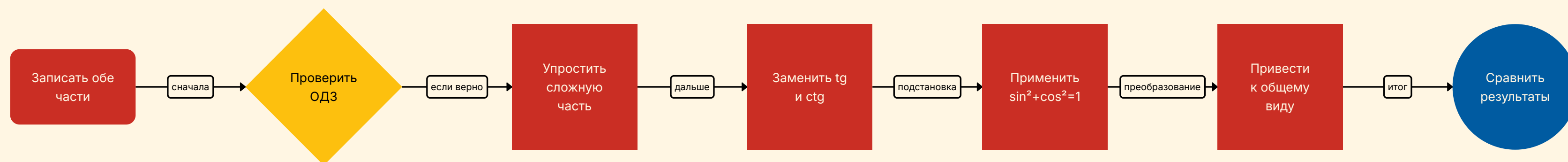
Углы $270^\circ \pm \alpha$ удобны при работе с отрицательными ординатами и абсциссами. Здесь особенно важно помнить, какая функция становится положительной, а какая отрицательной.

Поворот на 180°

Для выражений вида $180^\circ \pm \alpha$ значения функций обычно сохраняют тип, но меняют знак. Это помогает быстро вычислять значения без повторного обращения к окружности.

Как доказывать тригонометрическое тождество

Последовательность преобразований помогает избежать лишних шагов и ошибок в области допустимых значений.



Формулы сложения и вычитания углов

1 Синус суммы и разности

Формула $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ позволяет раскрывать сумму или разность углов через произведения. Она особенно полезна при преобразовании выражений и доказательстве равенств.

2 Косинус суммы и разности

Для косинуса действует правило $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$. Здесь важно помнить смену знака, которая делает формулу отличной от записи для синуса.

3 Тангенс суммы и разности

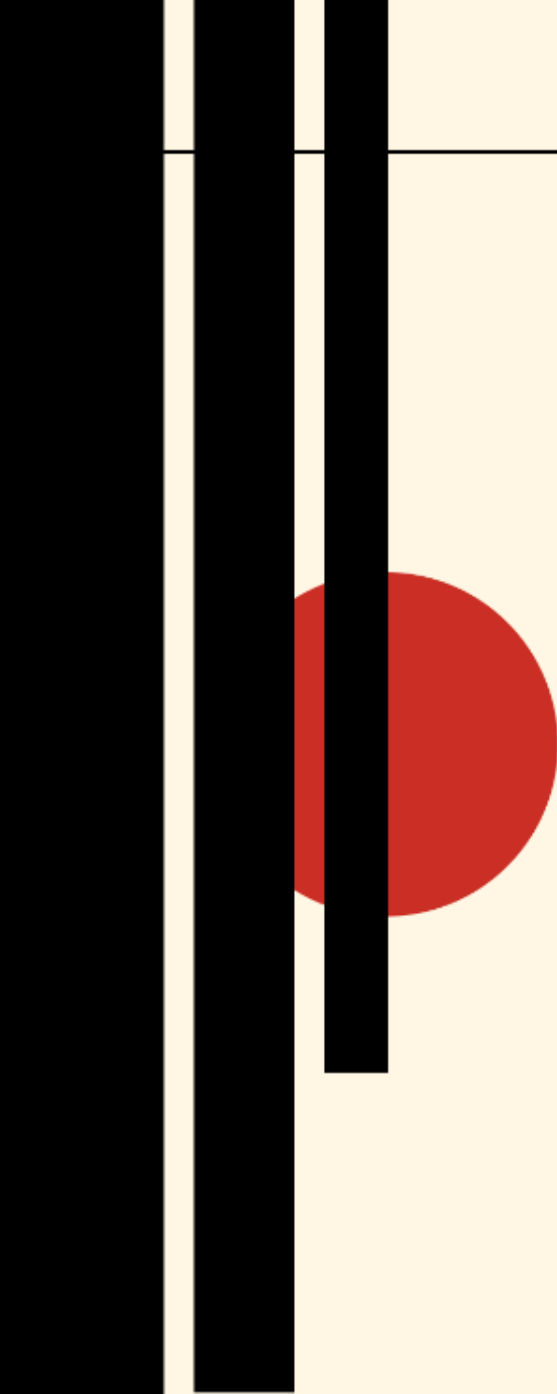
Формула $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) / (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$ удобна для уравнений и сокращения дробей. Её применяют только при существовании выражения в знаменателе.

Формулы двойного угла

Эти записи помогают переходить между функциями, упрощать выражения и получать удобный вид для уравнений.

Одна и та же величина может быть записана несколькими способами, что делает формулы двойного угла гибким инструментом преобразования.

Функция	Формула	Применение
$\sin 2\alpha$	$2\sin \alpha \cos \alpha$	упрощение
$\cos 2\alpha$	$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	преобразования
$\cos 2\alpha$	$2\cos^2\alpha - 1$	выражение через $\cos$
$\operatorname{tg} 2\alpha$	$2\operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$	решение уравнений



Ключевые формулы дают быстрый переход к значениям половинного угла без лишних вычислений.

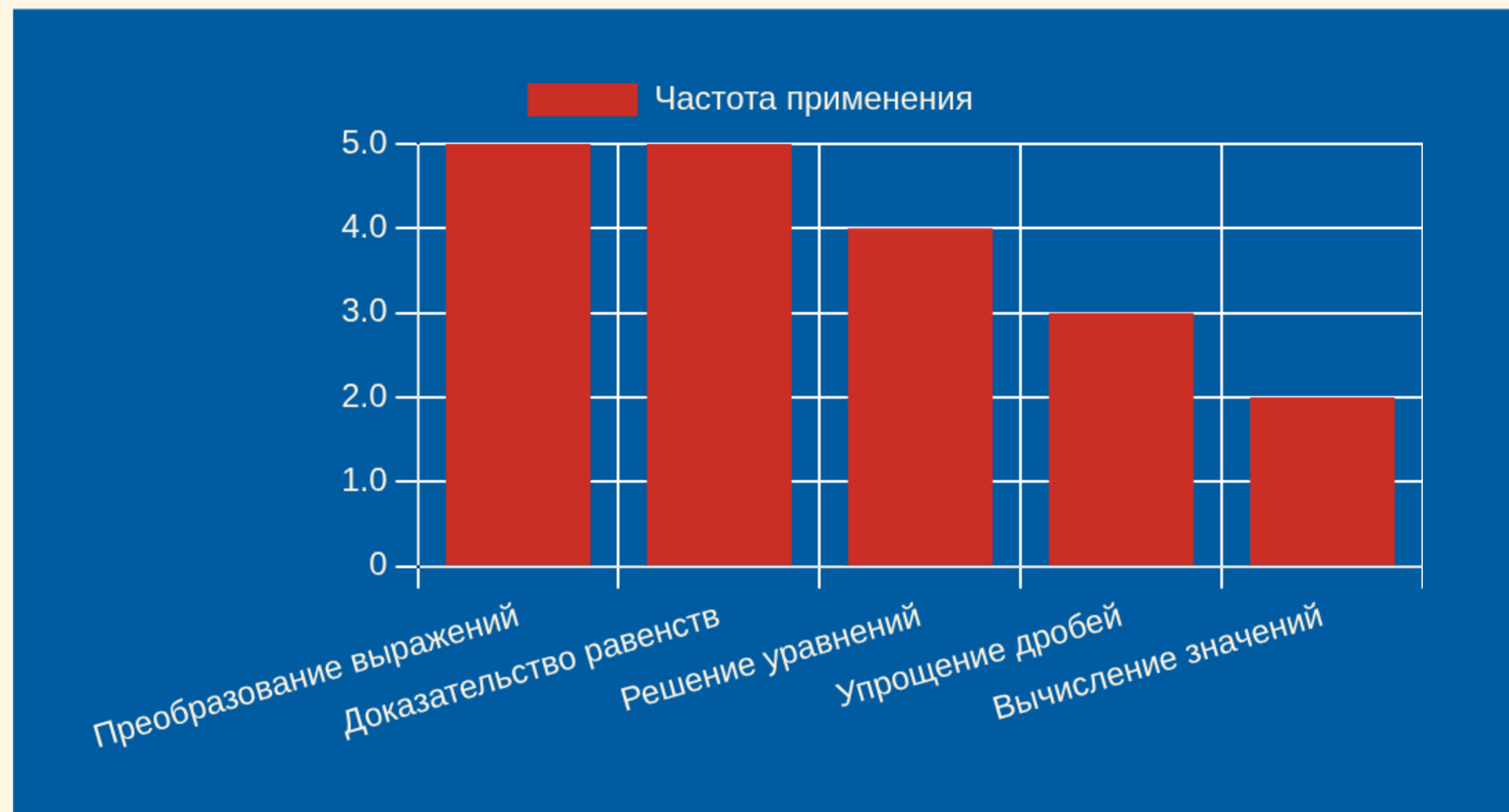
2

**формулы позволяют
выразить синус и косинус
половинного угла через
косинус исходного угла.**

Какие тригонометрические тождества чаще всего встречаются в задачах

На практике чаще всего приходится одновременно использовать несколько формул, поэтому важнее всего уверенно владеть базовыми преобразованиями.

Лидируют преобразования и доказательства, а прикладные вычисления встречаются реже и обычно опираются на те же базовые связи.



Типичные ошибки при работе с тригонометрическими тождествами

Неучтённая ОДЗ

При сокращении дробей и замене выражений часто забывают проверить, где знаменатель обращается в ноль. Из-за этого в решение могут попасть лишние корни или недопустимые преобразования.

Неверный знак

В формулах приведения особенно легко ошибиться со знаком, если не учитывать четверть угла. В результате верная формула применяется к неправильной области, и итоговое выражение искажается.

Путаница в тождествах

Частая ошибка — смешивать тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ с неверной записью $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Эти выражения не равны, поэтому подстановка приводит к грубому нарушению решения.

Сокращение без проверки

Даже если алгебраически выражение выглядит сокращаемым, нужно сначала убедиться, что общий множитель не равен нулю. Иначе преобразование становится некорректным и может изменить множество решений.



Как используют тождества при решении уравнений

3. Алгебраические преобразования

После этого используют основное тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, выносят общий множитель и разлагают выражение на множители.

1. Запись уравнения

Сначала выписывают исходное тригонометрическое уравнение и сразу определяют область допустимых значений, чтобы исключить недопустимые переходы уже на первом шаге.

2. Приведение к одной функции

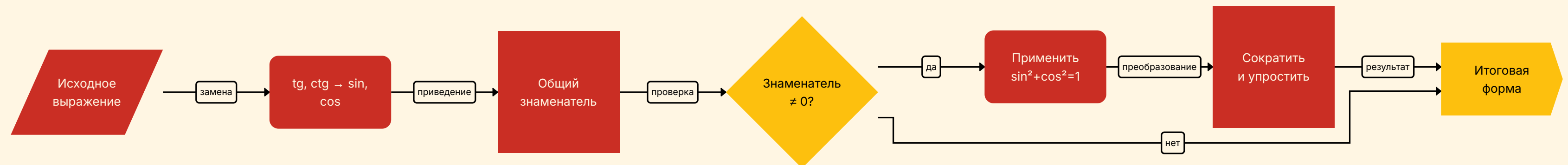
Затем заменяют tg и ctg через $\sin$ и $\cos$ или переносят все слагаемые к одной стороне, чтобы получить более удобную для преобразований форму.

4. Проверка корней

В конце находят значения углов на единичной окружности и обязательно проверяют их подстановкой, чтобы отобрать только допустимые решения.

Преобразование выражений с tg и ctg

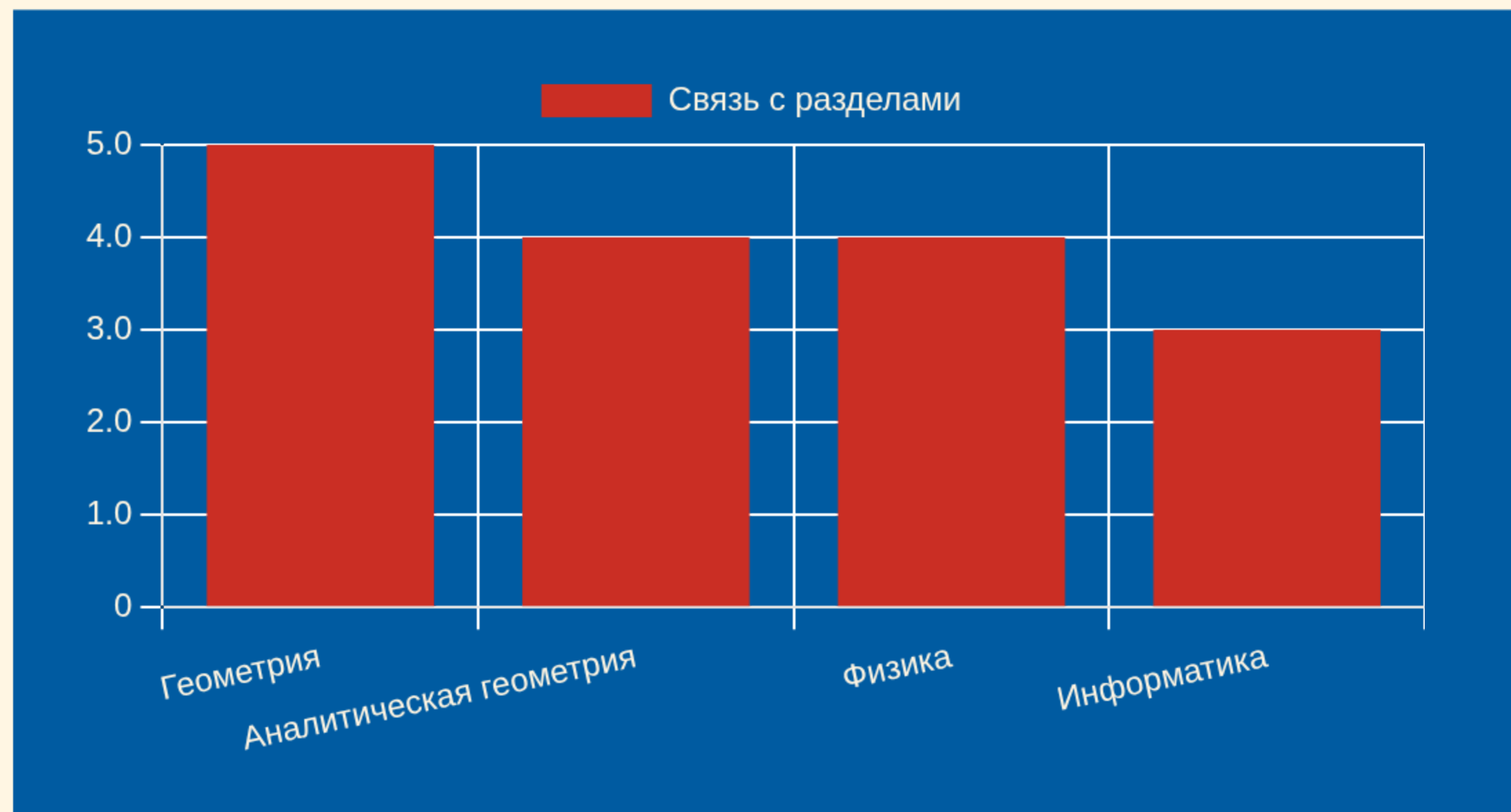
Последовательность преобразования дробных тригонометрических выражений с учётом области допустимых значений



Связь тригонометрических тождеств с другими разделами математики

Связи темы выходят далеко за рамки алгебры: тождества помогают описывать форму, движение, координаты и повторяющиеся процессы.

Наиболее тесная связь прослеживается с геометрией и координатными методами, но прикладная значимость заметна и в физике, и в информатике.



Исторический и прикладной контекст тригонометрии

1 От практических задач

Тригонометрия возникла из потребностей астрономии, навигации и измерения расстояний, где требовались точные способы описывать углы и взаимное положение объектов.

4 Технологии навигации

В GPS-навигации тригонометрические идеи помогают определять положение, а в робототехнике — рассчитывать траектории, повороты и ориентацию механизмов.

2 От таблиц к формулам

По мере развития математики отдельные вычислительные приёмы были объединены в систему формул, а тождества стали надёжным инструментом для преобразований и проверок.

5 Сигналы и изображения

В обработке сигналов и компьютерной графике тождества позволяют компактно представлять колебания, создавать анимацию и точно воспроизводить геометрию движения.

3 Вычисления и модели

Сегодня тригонометрические связи используют там, где нужно описывать повторяющиеся процессы, строить модели движения и находить значения по известным параметрам.



Минимальный набор формул для уверенной работы

Эти формулы чаще всего нужны в школьных преобразованиях и помогают быстро переходить от одной записи к другой.

Базовое тождество и формулы суммы углов образуют ядро темы; остальные записи дополняют их и закрывают большинство типовых задач.

Формула	Применение
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	основа преобразований
$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	замена функций
$\sin(\alpha \pm \beta)$	сумма и разность
$\cos(\alpha \pm \beta)$	сумма и разность
$\sin 2\alpha$	двойной угол
$\cos 2\alpha$	двойной угол

Как тригонометрические тождества связаны с графиками функций

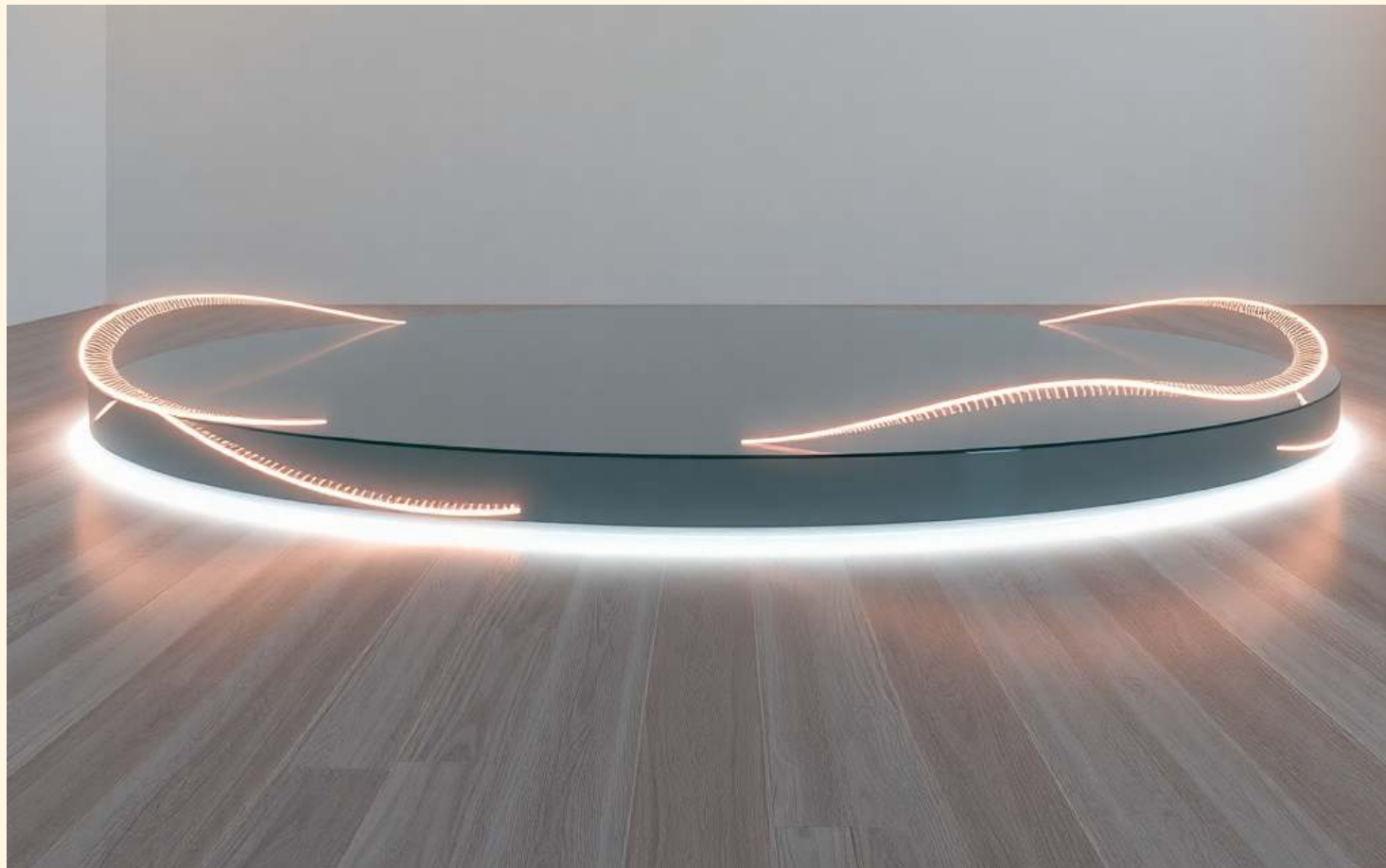
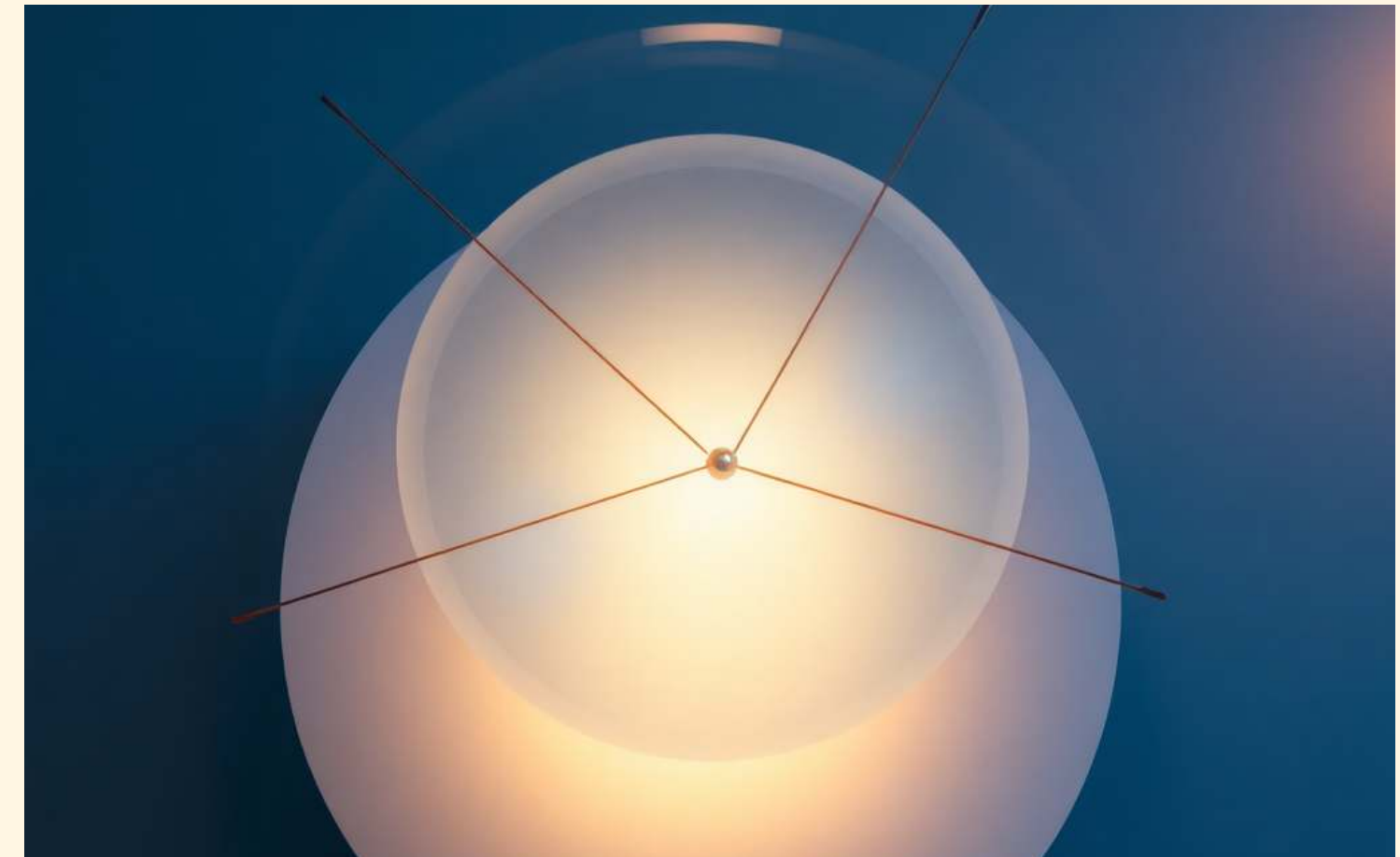


График как отражение периодичности

Графики синуса и косинуса наглядно показывают повторяемость значений, одинаковую амплитуду и сдвиг по горизонтали на четверть периода. По ним легко увидеть, как одна функция превращается в другую при изменении аргумента.



Единичная окружность за графиком

Тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ связывает графики с геометрией: любая точка на единичной окружности сохраняет постоянное расстояние до центра. Поэтому координаты точки меняются, а их квадратная сумма остаётся неизменной.

Тригонометрические тождества — язык преобразований

Они связывают геометрию, алгебру и графики функций в единую систему. Чем увереннее вы владеете базовыми формулами, тем легче упрощать выражения и решать задачи.