

Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Как представить любой пространственный вектор через три заданных направления и найти его координаты.

Место темы в геометрии 11 класса



Этот раздел стереометрии продолжается в 10–11 классах и опирается на понятия коллинеарности, компланарности, координат вектора и линейной зависимости. Он нужен для задач про параллельность, перпендикулярность, углы, расстояния и объёмы, когда геометрия становится системой уравнений.

Что означает разложить вектор

Вектор a раскладывается по векторам b, c, d , если его можно записать как $a = x \cdot b + y \cdot c + z \cdot d$. Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Коэффициенты показывают вклад каждого базисного вектора: «сколько раз» и «в каком направлении» он участвует в построении a . Отсюда разложение связывает векторную запись с количественными вычислениями.

Когда b, c, d некопланарны, разложение становится единственным. Это означает, что одинаковый вектор a нельзя получить по-разному, используя те же три направления.

Некомпланарные векторы и их свойство

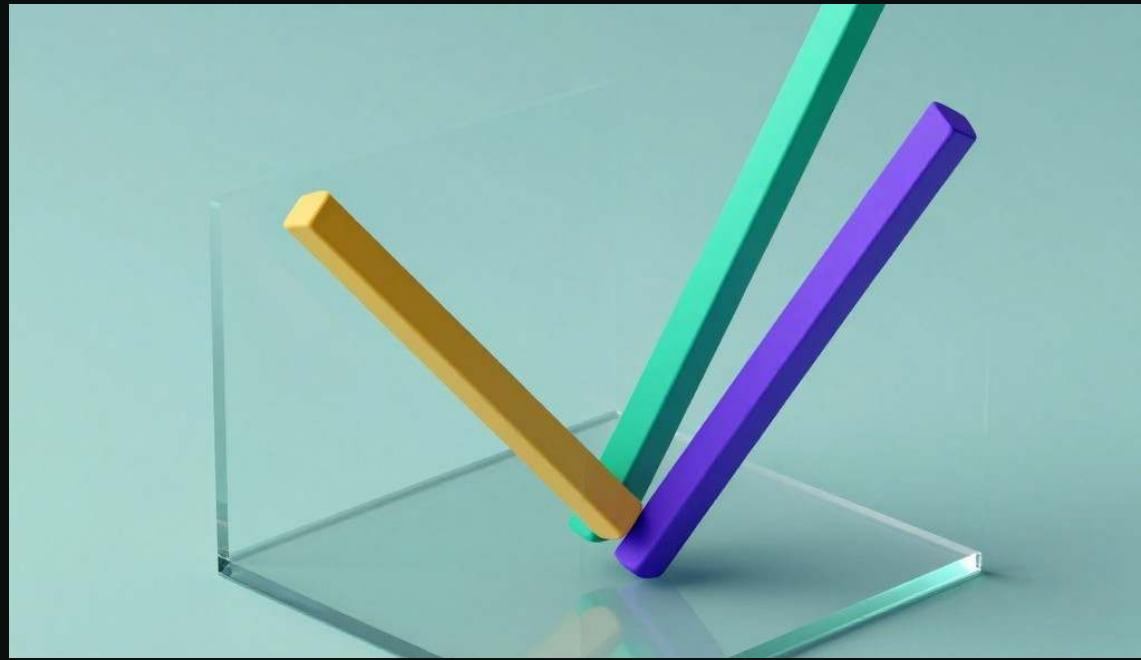
Три вектора называют некомпланарными, если они не лежат в одной плоскости. Геометрически это значит, что они задают три независимых пространственных направления.

Если бы все три вектора оказались в одной плоскости, они не смогли бы описать весь трёхмерный объём. Тогда любая комбинация этих векторов «останется» внутри этой плоскости.

Именно некомпланарность обеспечивает возможность однозначно разложить любой вектор пространства по выбранным направлениям. Без этого векторы не формируют полноценного трёхмерного базиса.

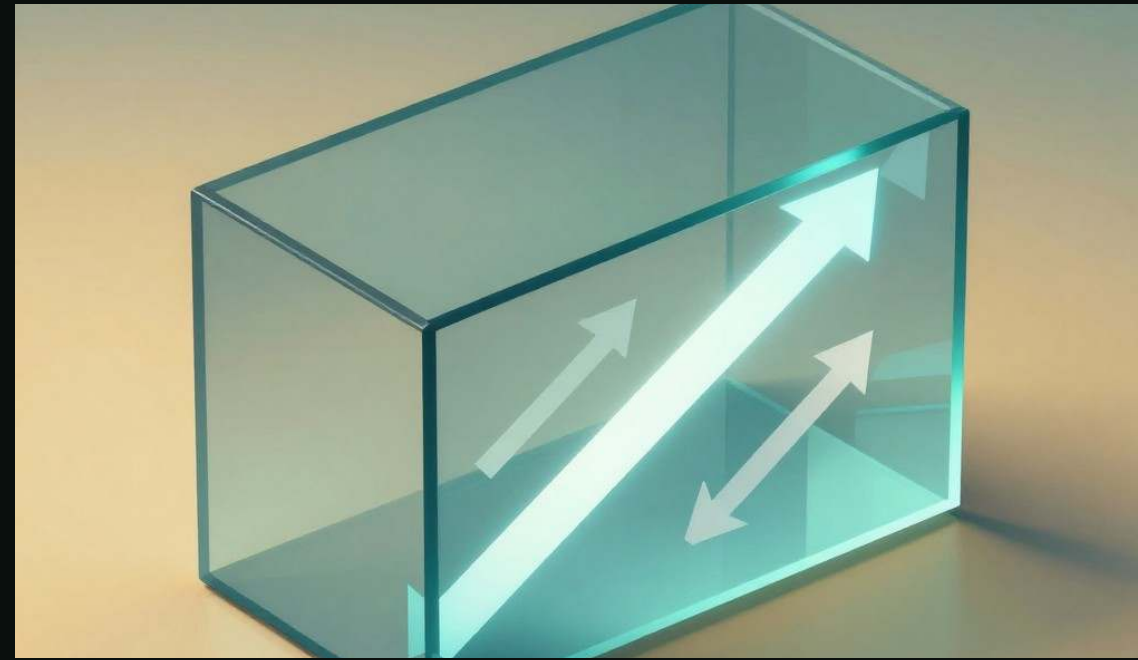
Когда направления независимы, одна и та же цель — получить вектор $\mathbf{a}$ — не требует «поиска множества ответов». Коэффициенты разложения становятся определены без двусмысленности.

Геометрический образ пространственного базиса



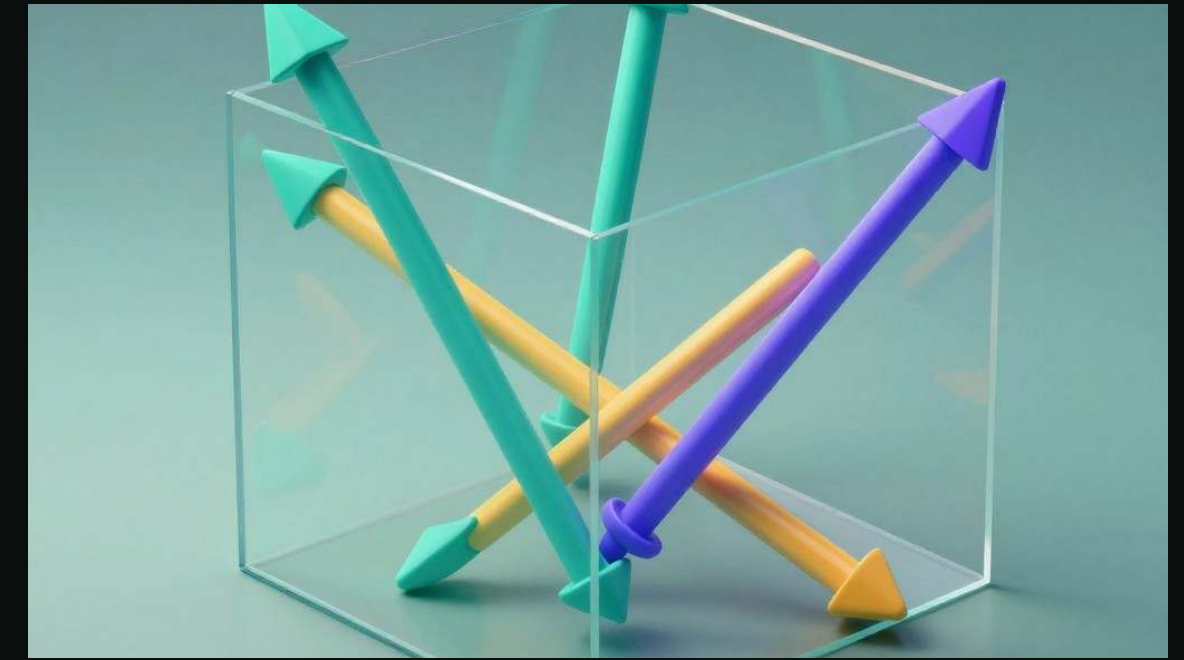
«Рёбра из одной точки» — базис в трёх измерениях

Представьте три некомпланарных вектора как рёбра параллелепипеда, выходящие из одной точки. Тогда любая линейная комбинация этих рёбер задаёт положение вектора в пространстве.



Как диагональ показывает результат сложения

Если отложить вдоль каждого вектора нужное число раз (с учётом знака), получится диагональ параллелепипеда. Она наглядно демонстрирует, что сумма «собирает» искомый вектор.



Почему помогают оси координат и направление

На рисунке удобно добавить оси координат и сами базисные направления. Это помогает связать абстрактную формулу $a = x \cdot b + y \cdot c + z \cdot d$ с реальной фигурой, где видны рост и перенос векторов.

Когда разложение существует и когда оно единственно

Рассмотрим, как геометрическое положение трёх векторов влияет на существование и единственность коэффициентов разложения.

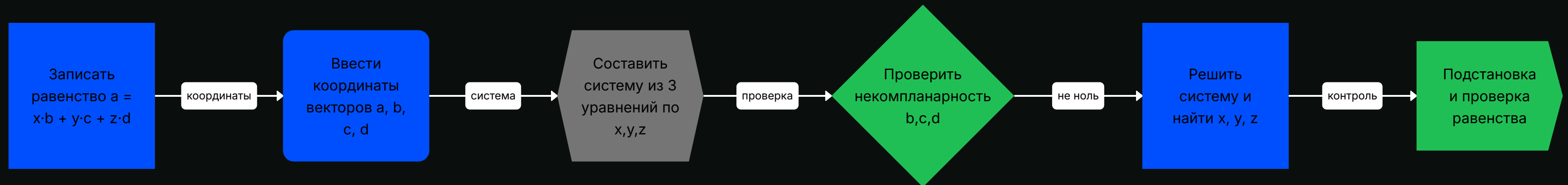
Однозначность коэффициентов в пространстве появляется только тогда, когда три вектора некомпланарны; иначе множество решений или невозможность корректно описать трёхмерность.

Случай	Условие	Результат	Геометрический смысл
Некомпланарные	Объём параллелепипеда $\neq 0$	Существует и единственно	Три независимых направления
Компланарные	Все векторы в одной плоскости	Неоднозначно	Набор не задаёт 3D
Коллинеарные	Все на одной прямой	Сильно	Только одно

Сводка по свойствам некомпланарности/компланарности/коллинеарности векторной геометрии

Алгоритм нахождения коэффициентов разложения

Работа с равенством $a = x \cdot b + y \cdot c + z \cdot d$: координаты $\rightarrow$ система $\rightarrow$ проверка базиса $\rightarrow$ решение и контроль.



Сравнение коэффициентов в нескольких примерах

На разных наборах направляющих коэффициенты могут меняться даже при сохранении самого вектора a . Это подчёркивает зависимость разложения от выбранного базиса.

Если где-то коэффициент отрицателен, это означает противонаправленность соответствующему базисному вектору. Сравнение трёх примеров помогает понять характер этой зависимости.

Учебная иллюстрация (значения подобраны для демонстрации влияния выбора базиса)

Координатная запись разложения

1

Если $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, $d = (d_1, d_2, d_3)$, а $a = (a_1, a_2, a_3)$, то равенство $a = x \cdot b + y \cdot c + z \cdot d$ даёт три уравнения по координатам.

2

Получается система: $x \cdot b_1 + y \cdot c_1 + z \cdot d_1 = a_1$, $x \cdot b_2 + y \cdot c_2 + z \cdot d_2 = a_2$, $x \cdot b_3 + y \cdot c_3 + z \cdot d_3 = a_3$.
Неизвестные — именно x, y, z .

3

Решение этой системы и есть искомое разложение. При корректном выборе трёх некопланарных векторов система имеет единственное решение, а значит, коэффициенты определены однозначно.

3

Ровно три независимых направления позволяют связать коэффициенты разложения без противоречий.

Общие свойства линейной независимости векторного пространства

Единственность обеспечивается линейной независимостью трёх некопланарных векторов:
равенство $x \cdot b + y \cdot c + z \cdot d = 0$
возможно только при $x = y = z = 0$.

Объём как «лакмус» некомпланарности



Параллелепипед из трёх направлений

Возьмите три вектора b , c , d и мысленно отложите их из одной точки. В результате получается параллелепипед: его рёбра задают три независимых направления в пространстве. Именно эта фигура превращает алгебру разложения в наглядную геометрию.



Смешанное произведение измеряет «пространственную площадь»

Объём параллелепипеда выражается модулем смешанного произведения трёх векторов. Эта величина показывает, насколько сильно направления раздвигают пространство: чем больше объём, тем «не слипаются» плоскости и прямые, задаваемые векторами.



Нулевой объём — сигнал о компланарности

Если объём равен нулю, параллелепипед вырождается: его три вектора не образуют независимых направлений и лежат в одной плоскости. Тогда разложение вектора по этим направлениям не становится однозначным, и базис «не хватает» для 3D.

Типичные ошибки в задачах на разложение вектора

Ошибки обычно возникают на стыке алгебры и геометрии: в записи координат, в выборе базисных векторов и в проверке результата. Таблица показывает, что именно пошло не так и как это проявляется в ответе.

Для корректного решения критичны: правильная алгебра знаков, полнота системы уравнений, выбор именно некомпланарных векторов и обязательная подстановка ответа в исходное равенство.

Ошибка	Причина	Последствие	Как выглядит в задаче
Перепутан знак коэффициента	Неверно перенесён член уравнения	Получается неправильный вектор	Ответ не совпадает при проверке
Пропущена одна координата	Составлена неполная система	Решение становится случайным	Не хватает одного уравнения

Сопоставление типичных учебных ситуаций в задачах стереометрии и векторного разложения.

Учебный пример разложения по координатам

1

Дано $a = (5, 1, 4)$, $b = (1, 0, 0)$, $c = (0, 1, 0)$, $d = (1, 1, 1)$. Записываем $a = x b + y c + z d$ и сравниваем координаты по трём компонентам.

2

Получается система: $x + z = 5$, $y + z = 1$, $z = 4$. Третье уравнение сразу фиксирует z , а затем остальные два уравнения становятся однозначными.

3

Находим $z = 4$, из $x + 4 = 5$ следует $x = 1$, а из $y + 4 = 1$ выходит $y = -3$. Знак «минус» означает противоположное направление соответствующего базисного вектора.

4

Проверка показывает, что $x b + y c + z d$ действительно даёт вектор a . Следовательно, отрицательные коэффициенты не противоречат корректности разложения — они лишь отражают ориентацию.

Вклад коэффициентов в учебном примере

Поскольку берутся модули, диаграмма показывает долю величин, но не знак: в нашем случае y отрицателен, хотя его вклад по модулю заметен.

Коэффициент z доминирует по величине: именно он сильнее всего «тянет» итоговый вектор. При этом знак y влияет на направление, хотя модуль отражает только масштаб.

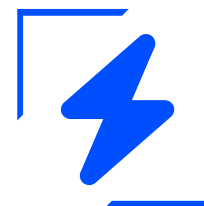
Расчёт по коэффициентам примера: $x = 1$, $y = -3$, $z = 4$.

Где используется разложение вектора



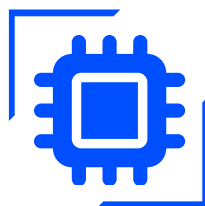
Стереометрия и диагонали

В разложении удобно выражать диагонали параллелепипедов, высоты, углы между прямыми и плоскостями. Координатная форма помогает избегать громоздких чисто геометрических рассуждений.



Физика: силы и движения

При сложении сил, скоростей и ускорений векторы часто раскладывают по удобным направлениям. Это превращает задачу в вычисления по компонентам, сохраняя строгую геометрию.



Компьютерная графика и модели

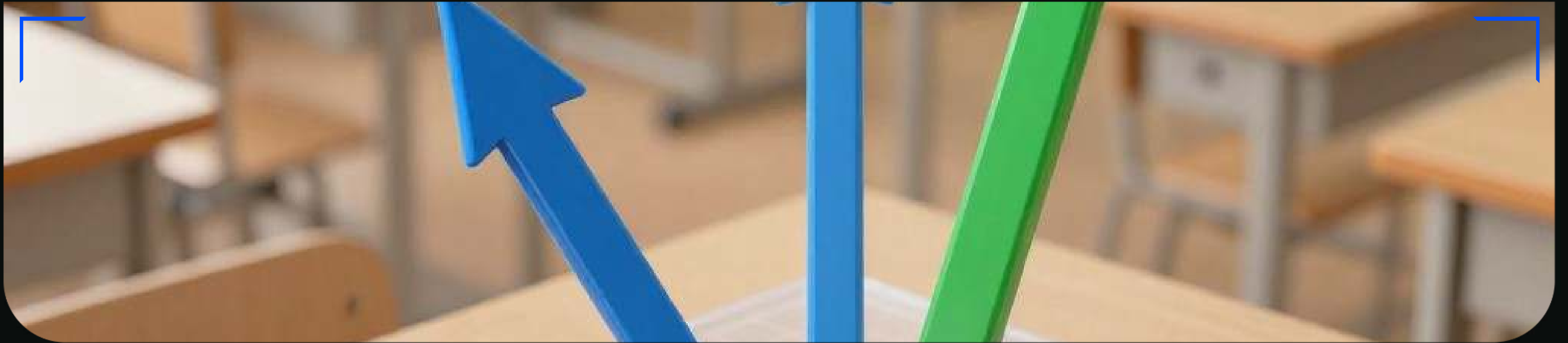
В трёхмерной графике разложение лежит в основе описания положения объектов и их движения в пространстве. Коэффициенты становятся «управляющими» параметрами анимаций и преобразований.



Школьные задачи: переход к уравнениям

Метод позволяет заменять рисунок системой уравнений. Так легче контролировать ответ подстановкой и проверять, соответствует ли выбранный базис условию некомпланарности.

Базис и координаты в пространстве

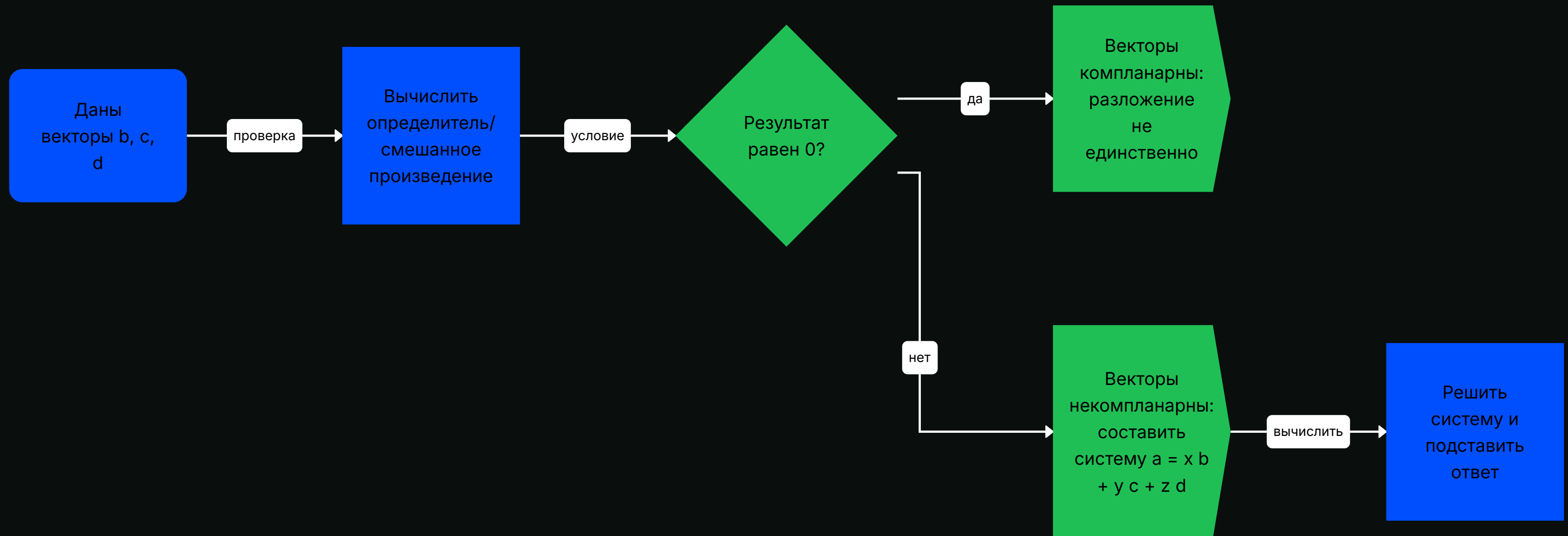


Три некомпланарных вектора образуют базис трёхмерного пространства: они задают три независимых направления. Тогда любой вектор выражается как линейная комбинация с коэффициентами x , y , z — это и есть его «координаты» в выбранном базисе.

Идея похожа на декартову систему: координаты точки определяют её положение, а коэффициенты разложения определяют положение вектора. На рисунке удобно связать координатную сетку с тремя направляющими векторами, показывая оба способа описания.

Сначала проверьте базис — потом считайте коэффициенты

Логика проверки некомпланарности перед решением системы уравнений



Как выглядят задачи по этой теме

В школьных заданиях чаще всего требуется представить вектор через три заданных вектора, найти координаты точки в пространственном базисе или доказать, что тройка векторов действительно образует базис.

Если базис удобный, решение сводится к сравнению координат: составляется система уравнений и находится тройка коэффициентов. Так геометрия становится проверяемой алгеброй.

В более сложных задачах добавляют вычисление объёма параллелепипеда и обращение к смешанному произведению. Это используют и для подтверждения некомпланарности, и для оценки геометрических характеристик.

Отдельный тип требований — проверка параллельности и компланарности векторов и линий. Умение переходить от рисунка к уравнениям помогает точно обосновывать выводы, а не угадывать результат.

Краткий план решения задач

Последовательность действий снижает риск ошибки и делает решение прозрачным: каждая стадия либо формирует модель, либо подтверждает корректность ответа.

Надёжный результат получается только при связке: корректная запись равенства → полная координатная система → проверка условия базиса → решение → подстановка для контроля.

Этап	Действие	Результат
1	Записать равенство $a = x b + y c + z d$	Появляется модель разложения
2	Перейти к координатам	Получается система из трёх уравнений
3	Проверить некомпланарность	Подтверждается возможность единственного решения
4	Решить систему	Находимся координаты вектора

Учебная методика решения задач на векторное разложение в пространстве.

Разложение — это «координаты» в пространстве

Разложение вектора по трём некомпланарным векторам — пространственный аналог координатной записи. Не компланарность гарантирует существование и единственность коэффициентов, а задача превращается в строгую систему уравнений.