

Цилиндр и конус: тела вращения в стереометрии

В стереометрии цилиндр и конус помогают изучать объёмы, площади, сечения и развертки.



Почему цилиндр и конус особенно важны в 11 классе

Эти тела вращения регулярно встречаются в задачах на объёмы и площади поверхностей. Цилиндр получают вращением прямоугольника вокруг стороны, конус — вращением прямоугольного треугольника вокруг катета. На их примерах отрабатывают формулы, сечения и теорему Пифагора.



Цилиндр: определение и элементы

Цилиндр имеет два равных круга в параллельных плоскостях, называемых основаниями. Боковая поверхность соединяет соответствующие точки этих кругов.

К основным элементам цилиндра относят радиус основания r , высоту h , ось цилиндра и образующую. Для прямого кругового цилиндра образующие параллельны оси и равны высоте.

Если ось цилиндра перпендикулярна основаниям, цилиндр называют прямым. Именно для прямого цилиндра формулы объёма и площадей применяются особенно удобно.

Цилиндр и конус: основные различия

Сопоставление ключевых признаков и формул объёма, а также полной площади поверхности.

Фигура	Основание	Вершина	Образующая	Объём	Полная поверхность
Цилиндр	два круга	нет	$l=h$	$V=\pi r^2 h$	$S=2\pi r^2+2\pi r h$
Конус	один круг	есть	наклонный отрезок l	$V=1/3\pi r^2 h$	$S=\pi r^2+\pi r l$

При одинаковых r и h объём конуса в 3 раза меньше объёма цилиндра; различие обусловлено коэффициентом $1/3$ в формуле конуса.

Школьный курс стереометрии (формулы стереометрии).

Прямой и наклонный цилиндр



Прямой цилиндр

В прямом цилиндре ось перпендикулярна плоскостям оснований, а образующие параллельны оси. Поэтому все геометрические параметры согласованы, а формулы работают напрямую.



Наклонный цилиндр

В наклонном цилиндре ось не перпендикулярна основаниям, хотя сами основания остаются равными кругами. В задачах чаще рассматривают прямой вариант из-за его простоты вычислений.

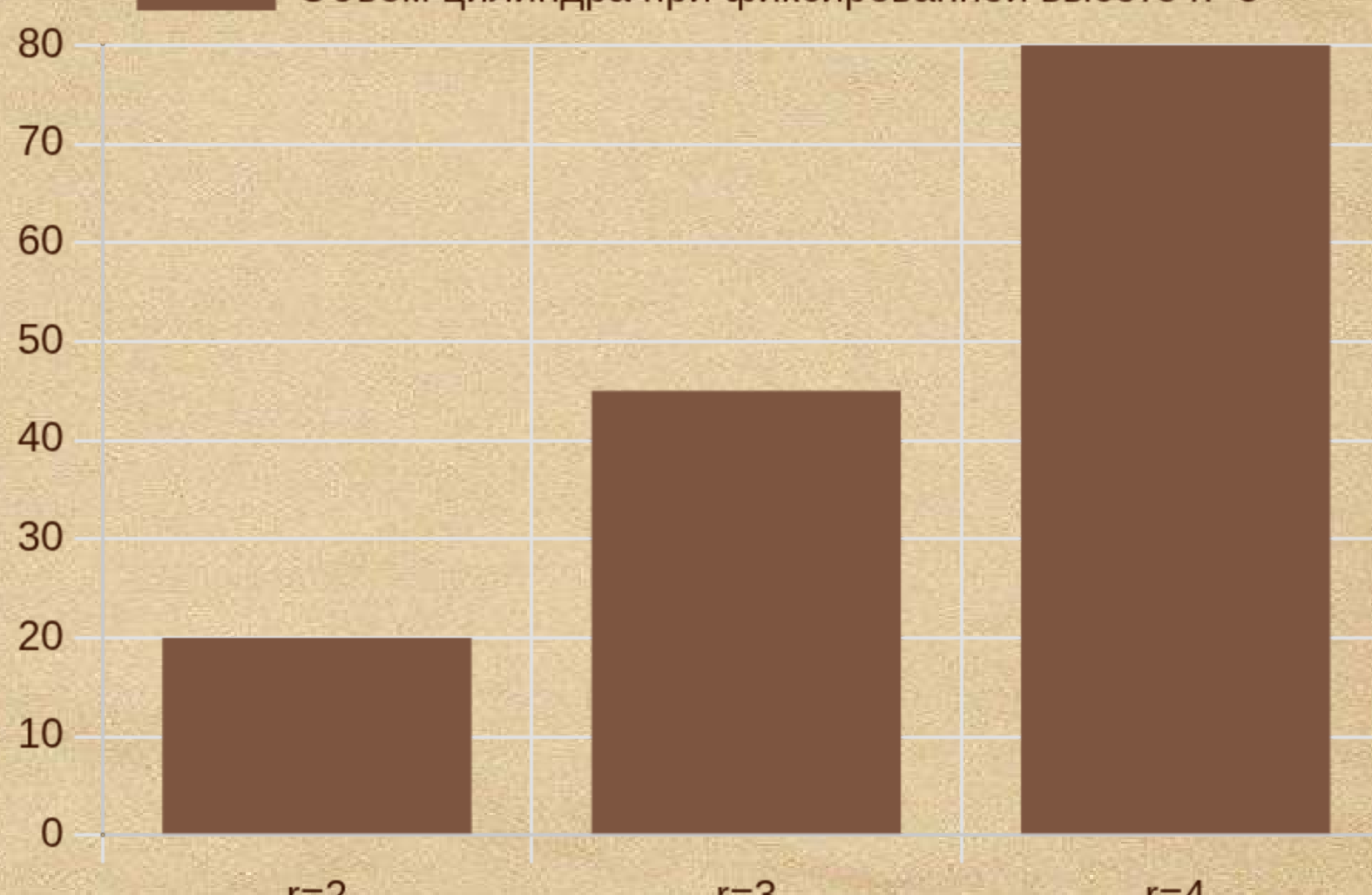
Как меняется объём цилиндра при изменении r и h

При увеличении высоты h объём растёт пропорционально, потому что h входит в формулу линейно.

Диаграмма показывает сильную чувствительность объёма к радиусу: он входит в квадрат, поэтому рост получается ускоренным.

Вычисления по формуле $V = \pi r^2 h$ ($h=5$).

Объём цилиндра при фиксированной высоте $h=5$



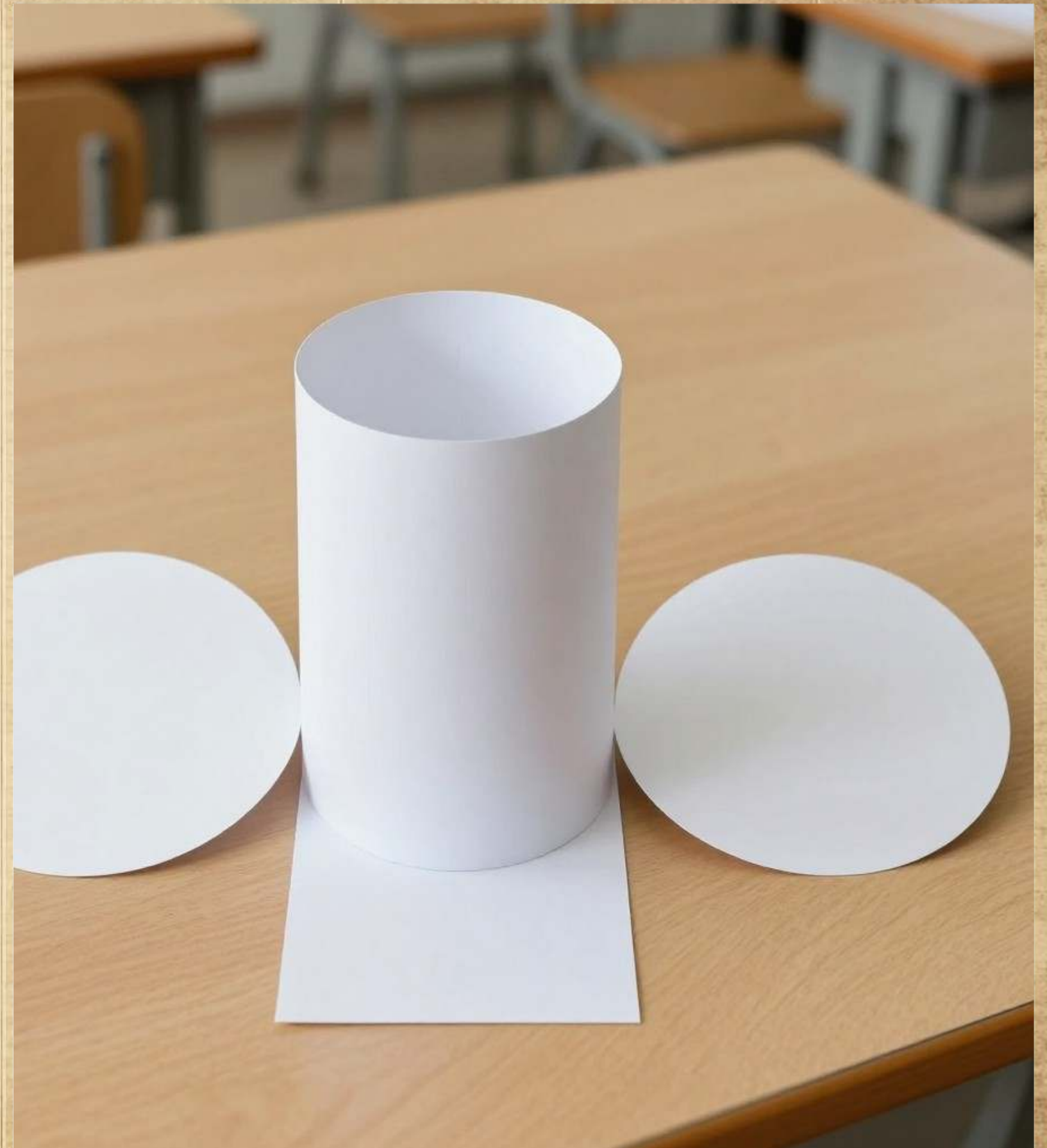
Развертка цилиндра

Что получается при «разворачивании»

Развертка прямого цилиндра состоит из прямоугольника и двух равных кругов. Длина прямоугольника равна длине окружности основания: $2\pi r$, а ширина — высоте h .

Связь между плоской формой и боковой поверхностью

Площадь боковой поверхности равна $2\pi rh$. Полная площадь поверхности выражается формулой $S=2\pi r^2+2\pi rh$. Такая развертка помогает видеть, откуда берутся слагаемые.



Конус: определение и элементы

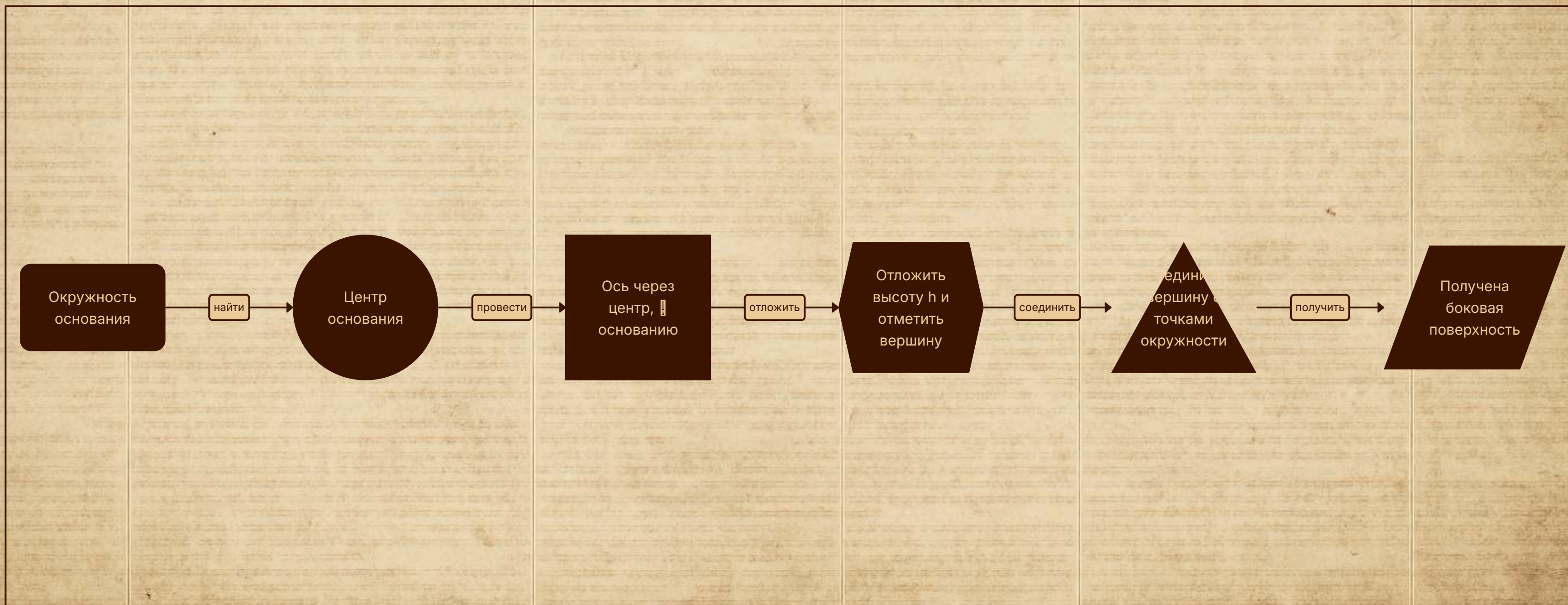
Конус имеет одно круглое основание и одну вершину, которая не лежит в плоскости основания. Отрезки от вершины к точкам окружности образуют боковую поверхность.

Основные элементы конуса — радиус основания r , высота h , образующая l , ось конуса и вершина. Для прямого кругового конуса ось проходит через центр основания и перпендикулярна его плоскости.

Понимание этих элементов важно, потому что в формулах объёма и площадей фигурируют именно r и h , а для поверхностей дополнительно используется образующая l .

Построение прямого кругового конуса

Пошаговый алгоритм по заданным радиусу основания и высоте



Announcement

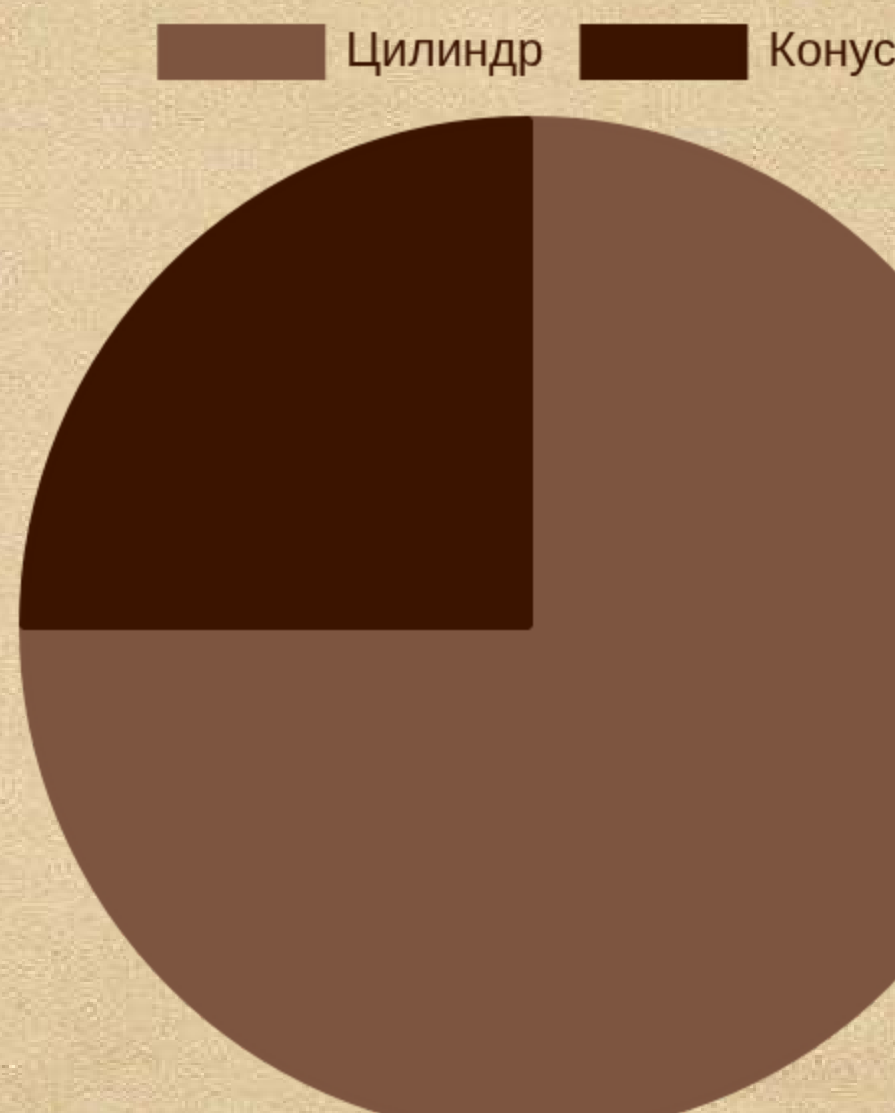
Office

Сравнение площадей и объёмов цилиндра и конуса

Если $r=3$ и $h=5$, то $V_{\text{ц}}=45\pi$,
а $V_{\text{к}}=15\pi$. Это
подтверждает правило
«конус — треть объёма
цилиндра» при равных r
и h .

Объём конуса содержит
множитель $1/3$, тогда как у
цилиндра такого
коэффициента нет; различие
в вычислениях напрямую
видно по результатам.

Типовые школьные задачи; формулы $V=\pi r^2 h$ и $V=1/3\pi r^2 h$.



Bus

Trade Rev

They

Issue

Making A

THE PLAN

Развертка конуса

Развертка боковой поверхности прямого конуса получается из кругового сектора: он моделирует “развернутую” боковую поверхность без складок и разрывов.

Длина дуги сектора равна длине окружности основания и равна $2\pi r$, а радиус сектора равен образующей l , то есть диагональной линии боковой поверхности конуса.

Когда к сектору добавляют круг основания, получают полную поверхность: $S = \pi r^2 + \pi r l$. Эта связь помогает находить площадь и образующую по заданным элементам.

Announcement

Office

Office of the Secretary of the State of New York
Albany, New York
The following is a list of the names of the members of the State of New York who have been elected to the office of the Secretary of the State of New York for the year 1911.

Making Ace

Making Ace is a new and exciting game that has been developed by the State of New York. It is a game that is easy to learn and play, and it is a game that is fun and exciting. It is a game that is suitable for all ages and is a game that is suitable for all climates.

Making A

Making A is a new and exciting game that has been developed by the State of New York. It is a game that is easy to learn and play, and it is a game that is fun and exciting. It is a game that is suitable for all ages and is a game that is suitable for all climates.

1/3

Следовательно, образующая и высота связаны геометрией прямого треугольника, а значит их можно находить через радиус.

Школьный курс стереометрии (формула теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника)

В прямом круговом конусе радиус основания, высота и образующая образуют прямоугольный треугольник, поэтому $l^2 = r^2 + h^2$. Формула позволяет вычислять любую величину при наличии двух остальных.

Bus

Trade Rev

They

They are the new and exciting game that has been developed by the State of New York. It is a game that is easy to learn and play, and it is a game that is fun and exciting. It is a game that is suitable for all ages and is a game that is suitable for all climates.

Issue

THE PLAN

Основные формулы для вычислений

Фигура	Боковая площадь	Полная площадь	Объем
Цилиндр	$2\pi r h$	$2\pi r^2 + 2\pi r h$	$\pi r^2 h$
Конус	$\pi r l$	$\pi r^2 + \pi r l$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Сводные формулы помогают быстро выбрать нужное выражение для боковой площади, полной поверхности и объема цилиндра или конуса при решении задач.

Для конуса в объеме всегда присутствует множитель $\frac{1}{3}$, а в полной площади обязательно участвуют радиус основания и образующая; у цилиндра боковая площадь зависит от высоты.

Сечения цилиндра и конуса — как “подсказки” в задачах



Круг в цилиндре и конусе: когда плоскость “идет горизонтально”

Если секущая плоскость параллельна основанию, получается круг: у цилиндра — круг того же радиуса, у конуса — круг, который меняется по размеру с удалением от вершины. По таким сечениям удобно находить радиусы и элементы для дальнейших вычислений.



Осевое сечение: прямоугольник у цилиндра и треугольник у конуса

Плоскость, проходящая через ось цилиндра, дает осевое сечение — прямоугольник: сразу видны высота и диаметр основания. Для конуса осевое сечение превращается в равнобедренный треугольник, где связаны радиус, высота и образующая.

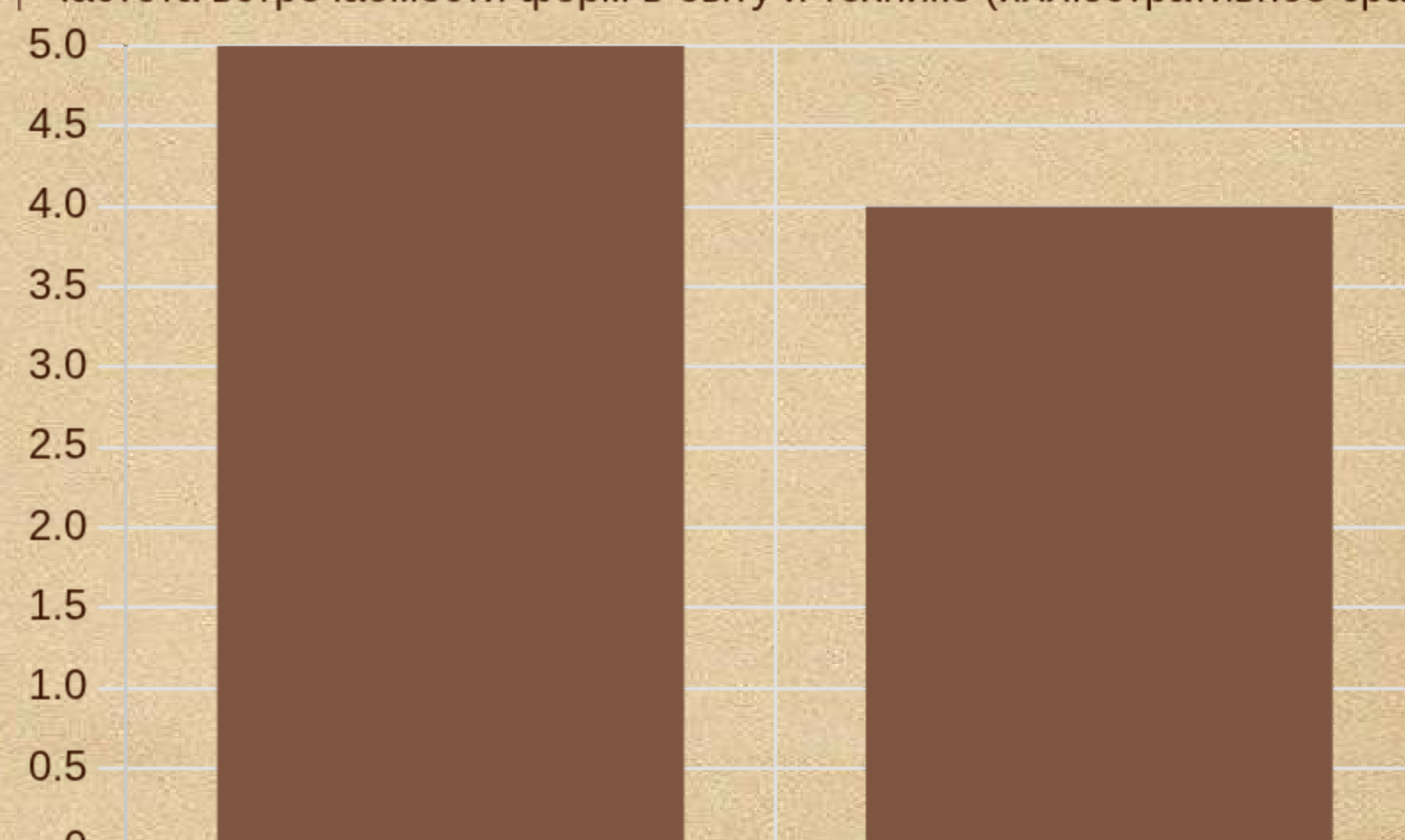
Примеры цилиндрических и конических форм в окружающем мире

Чтобы уверенно применять формулы, полезно мысленно “узнавать” тела: банка или труба дают цилиндр, а воронка или рожок — конус.

Диаграмма показывает преобладание цилиндрических предметов в повседневных конструкциях, но конические формы незаменимы там, где нужно направлять поток и сужать траекторию.

Обобщённые примеры школьного курса и наблюдения из повседневной среды (без единого статистического исследования)

Частота встречаемости форм в быту и технике (иллюстративное сравнение)



Цилиндрические формы

Конические формы

Типичные ошибки в задачах на цилиндр и конус

Частая ошибка — подмена радиуса диаметром: если в формулах стоит r , то в вычисления нельзя автоматически подставлять $2r$. Перед решением проверьте, что дан именно радиус.

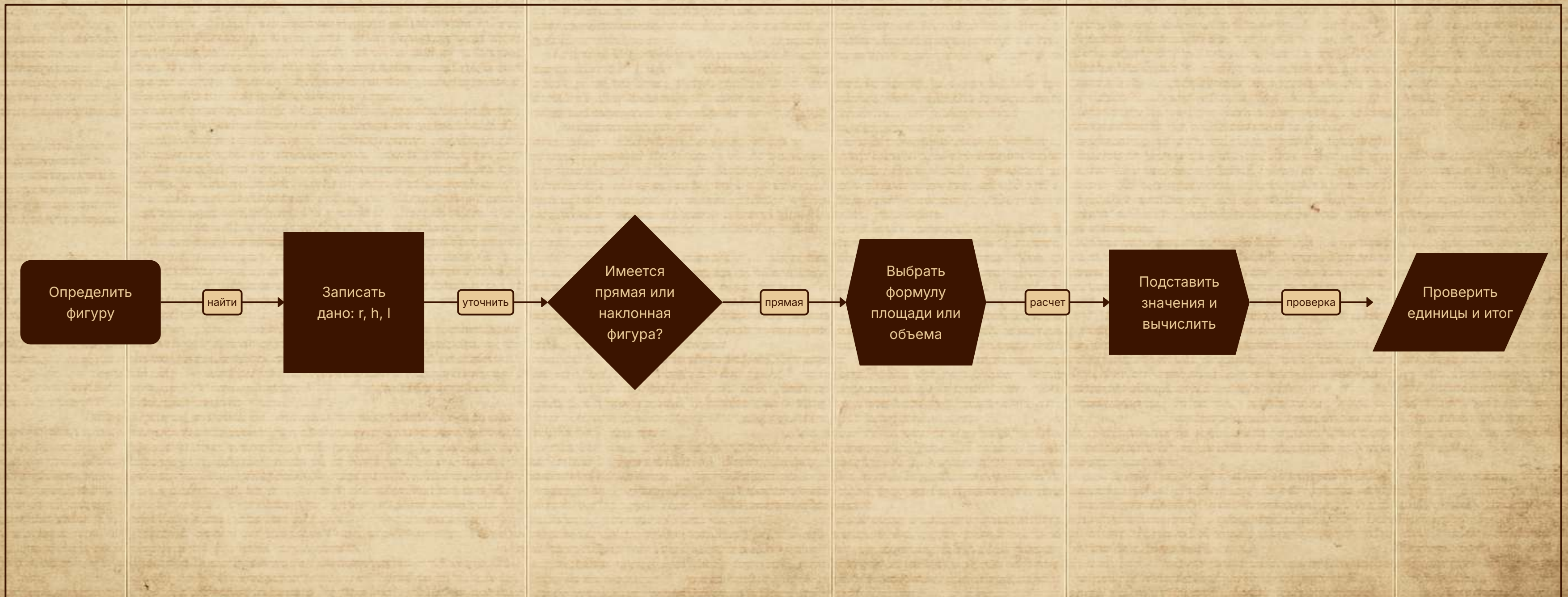
Нередко путают высоту и образующую: для конуса именно l соединяет вершину с точкой окружности основания. Для цилиндра образующая совпадает с высотой, но это не значит, что их всегда можно заменять.

В задачах на объем конуса пропускают множитель $1/3$. Тогда результат оказывается завышенным в три раза и почти всегда “не сходится” с разумной оценкой по картинке или проверке.

При выводе ответа полезно различать объем и площадь: площади измеряются в квадратных единицах, объемы — в кубических. Дополнительно не применяйте $l^2 = r^2 + h^2$ для цилиндра — это связь прямого конуса.

Алгоритм решения задач на цилиндр и конус

Пошаговый порядок действий, применяемый при вычислениях объемов и площадей в 11 классе



Применение цилиндра и конуса в технике и природе

- Цилиндрические формы используют в резервуарах, трубах, колесах, роликах и деталях двигателей: такая геометрия упрощает изготовление и обеспечивает устойчивое течение жидкости или работы механизмов при равномерных сечениях.
- Конические формы встречаются в воронках, соплах, крыше башни и пирамидальных переходниках, а также в некоторых оптических деталях. Их выбирают, когда нужно направить движение вещества, распределить нагрузку и добиться сужения формы.



Контрольные примеры вычислений

Проверка по формулам показывает, как одни и те же исходные данные дают разные значения объема для цилиндра и конуса.

Фигура	Дано	Формула	Ответ
Цилиндр	$r=3\text{ см}, h=5\text{ см}$	$V=\pi r^2 h$	$45\pi\text{ см}^3$
Конус	$r=3\text{ см}, h=5\text{ см}$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$15\pi\text{ см}^3$
Конус	$r=3\text{ см}, l=5\text{ см}$	$h^2=l^2-r^2$	$h=4\text{ см}$

Различие связано с тем, что объем конуса содержит коэффициент $1/3$, а при использовании образующей нужна теорема Пифагора для нахождения высоты.

Типовые задачи по геометрии 11 класса
(цилиндр и конус)

Цилиндр и конус: формулы, которые работают всегда

Цилиндр и конус — ключевые тела вращения в стереометрии 11 класса: у цилиндра два равных основания и $V = \pi r^2 h$, у конуса одно основание и $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Понимание элементов и формул помогает решать задачи и уверенно анализировать реальные объекты.

THE PLAN