

Научимся точно считать все возможные варианты в задачах.

Основные понятия и формулы комбинаторики



A photograph of a classroom. In the foreground, a wooden desk holds several colorful geometric blocks (red, yellow, green, blue) and a small glass jar filled with blue beads. In the background, there is a green chalkboard, a window with a view of trees, and other classroom furniture.

Почему комбинаторика важна в 9 классе

Комбинаторика помогает считать варианты без пропусков и повторов. Она встречается в задачах про коды, расписания, выборы и расположение предметов, а также подготавливает к вероятностным рассуждениям.

Что такое комбинаторный выбор

Элементы множества

Комбинаторный выбор строится из отдельных объектов: чисел, букв, учеников или предметов. Каждый такой объект называют элементом множества, из которого делают выбор.

Порядок имеет значение

В одних задачах важна последовательность выбранных элементов: перестановка мест меняет ответ. Тогда каждый новый порядок считается отдельным вариантом и не объединяется с другими.

Порядок не важен

В других задачах достаточно самого набора объектов, а расположение уже не влияет на результат. Тогда одинаковые по составу наборы считаются одним и тем же вариантом.

Правило суммы

01 Сначала определяем случаи

Правило суммы применяют, когда нужно выбрать один из нескольких взаимоисключающих способов. Важно убедиться, что варианты не пересекаются, иначе произойдёт двойной счёт.

02 Складываем количества

Если первый способ даёт m вариантов, а второй — n вариантов, общее число равно $m+n$. Так считают все возможные исходы, объединяя независимые случаи в один ответ.

03 Простой пример

Если можно взять один напиток из 3 видов сока или 4 видов чая, получаем 7 вариантов. Здесь удобно просто сложить числа возможных выборов.

Правило произведения

■ Последовательные шаги

Правило произведения используют, когда выбор состоит из нескольких этапов. Сначала выбирают один объект, затем другой, и каждый следующий шаг расширяет число возможных сочетаний.

■ Умножаем варианты

Если на первом шаге есть m способов, а на втором — n способов, общее число вариантов равно $m \cdot n$. Так получают полный набор всех возможных результатов.

■ Пример с одеждой

Три футболки и четыре пары шорт дают 12 комплектов одежды. Каждый верх можно сочетать с каждой парой шорт, поэтому количество вариантов находится умножением.



Перестановки: когда важен каждый порядок



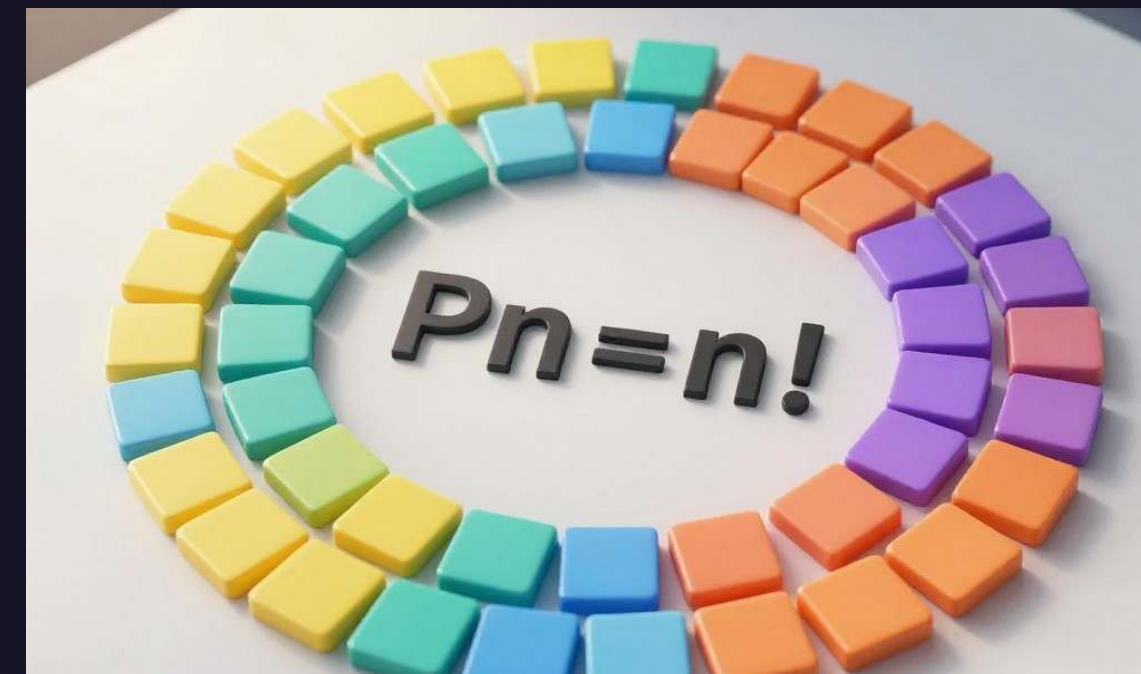
Книги на полке

Представьте три разные книги, которые нужно поставить в ряд. Один и тот же набор можно расположить по-разному, и каждый порядок будет новым вариантом. Именно так проявляется идея перестановки.



Очередь из учеников

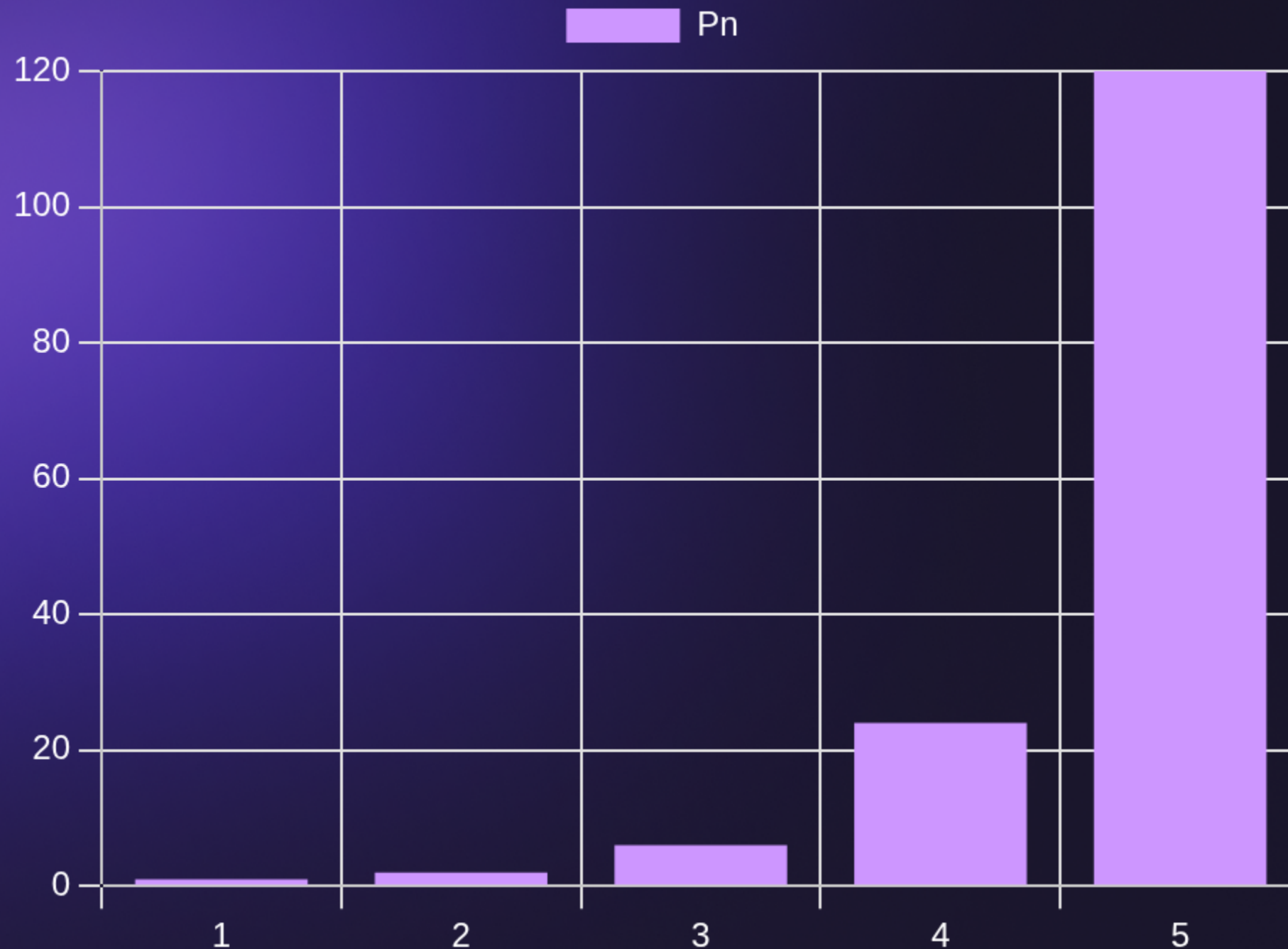
Если в очереди стоят четыре ученика, перестановка меняется при каждом новом расположении. Даже когда состав группы не меняется, количество порядков быстро растёт, потому что учитывается каждая новая последовательность.



Почему число вариантов растёт быстро

Для перестановок всех n различных объектов используют формулу $P_n = n!$. Это означает, что число порядков увеличивается очень быстро уже при небольшом росте n . Поэтому факториал сразу показывает, насколько много вариантов скрыто в задаче.

Рост числа перестановок при увеличении n



Даже небольшое увеличение числа объектов резко меняет результат. Это хорошо видно уже после третьего шага, когда значения начинают расти особенно быстро.

Факториал увеличивается стремительно: каждое новое значение намного больше предыдущего. Поэтому перестановки быстро дают очень большое число вариантов.

Вычисления по формуле $P_n = n!$ для $n = 1-5$.

Это значение показывает, насколько быстро растёт число вариантов при использовании факториала в комбинаторике.

120

перестановок дают пять различных объектов.

Вычисление $5!$ по определению факториала.

Значения факториала для первых натуральных чисел

n	n!	Способов
1	1	1
2	2	2
3	6	6
4	24	24
5	120	120

Таблица показывает, как быстро растёт число перестановок и почему факториал удобно использовать в комбинаторных формулах.

При увеличении n на 1 значение $n!$ растёт очень быстро. Это объясняет, почему в комбинаторике числа вариантов могут резко увеличиваться.

Стандартное определение факториала и вычисления для $n = 1-5$.

Размещения: выбор с учетом порядка

01

Берём не всё

Размещение используют, когда из n объектов выбирают только k . Важно, что выбирается не полный набор, а только часть, которую потом нужно упорядочить.

02

Порядок меняет ответ

Если два выбранных объекта поменять местами, получится другой вариант. Поэтому первый и второй выбранные элементы рассматриваются как разные роли, а не как одинаковая пара.

03

Формула и пример

Число размещений находят по формуле $A(n, k) = n! / (n-k)!$. Например, выбрать двух дежурных на разные роли из пяти учеников можно разными способами, потому что порядок выбора важен.

Размещения с повторениями

Выбор на каждом шаге

Если каждый шаг выполняется независимо и для него подходят одни и те же n способов, число итоговых вариантов равно произведению одинаковых множителей n .

Формула степени

При k шагах получается n^k , потому что каждый новый выбор не ограничивает следующий. Так удобно считать коды, пароли и последовательности знаков.

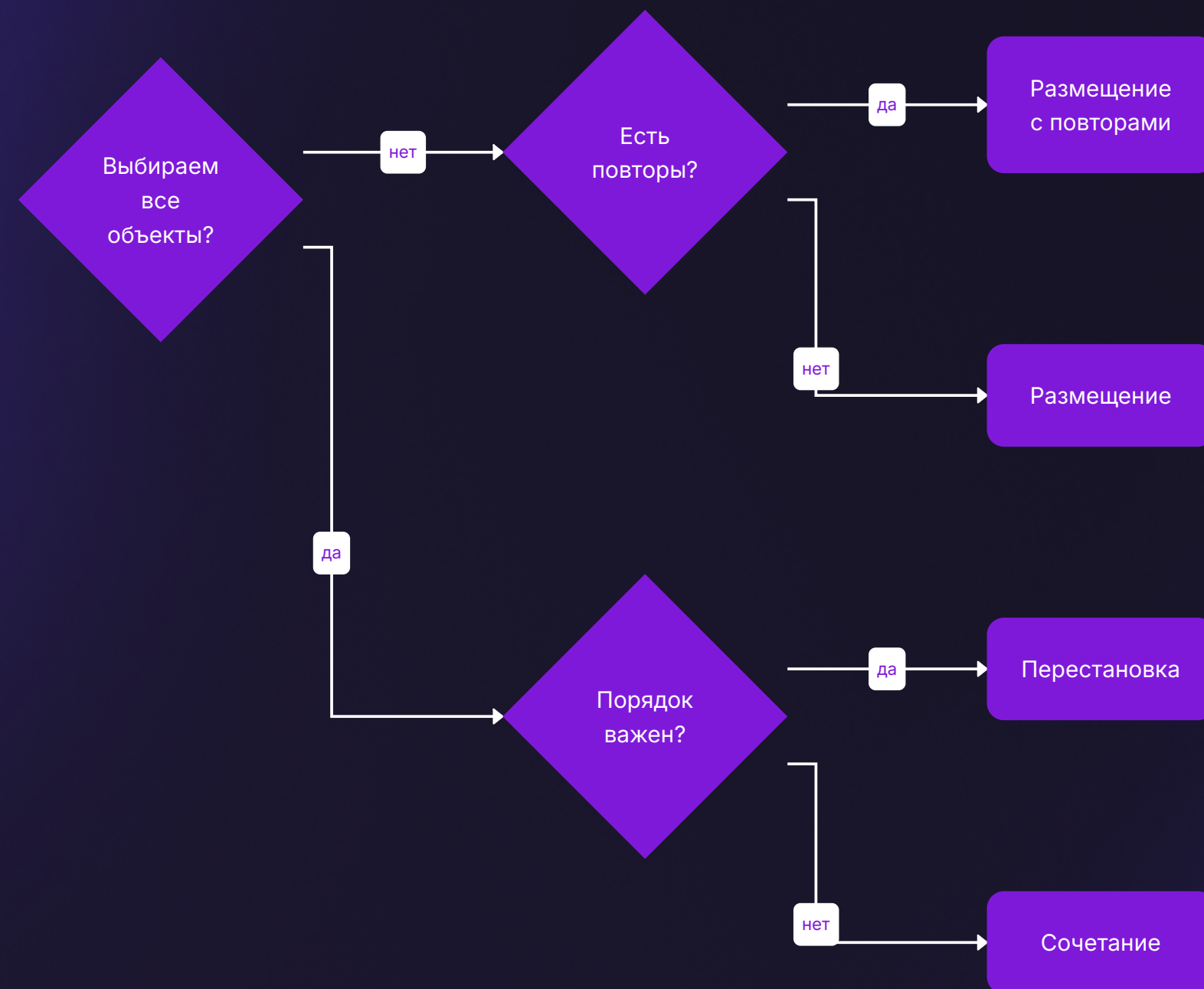
Пример с кодом

Для четырехзначного кода из цифр 0–9 каждый раз есть 10 вариантов, поэтому всего $10^4 = 10000$ комбинаций, включая 0000.



Как выбрать нужную формулу

Алгоритм выбора строится по трем признакам: что выбирают, важен ли порядок и допускаются ли повторения.



Сочетания: выбор без учета порядка

01 Что выбирают

Сочетание описывает случай, когда из n объектов берут только k , а порядок перечисления не влияет на ответ. Важен сам набор, а не его расположение.

02 Формула сочетаний

Число сочетаний находят по формуле $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$. Она убирает повторный учет одинаковых наборов, которые отличаются лишь порядком записи.

03 Простой пример

Если выбрать 3 книги из 5 для чтения, то набор остается тем же, даже если перечислить книги в другом порядке. Поэтому подходит именно сочетание.

Сравнение трех основных формул комбинаторики



Диаграмма показывает, какие признаки отличают формулы: перестановка использует все объекты, а размещение и сочетание — только часть.

Если помнить два вопроса — важен ли порядок и выбирают ли все объекты, — формулу можно определить быстро и без ошибок.

По школьным определениям комбинаторики; данные для сравнения составлены по формулам P_n , $A(n, k)$, $C(n, k)$.

Треугольник Паскаля и сочетания



Правило сложения

Каждое число внутри треугольника равно сумме двух чисел над ним. Это простое правило делает таблицу удобным инструментом для быстрых вычислений без громоздких формул.



Связь со строками

Числа треугольника Паскаля помогают находить значения $C(n, k)$, потому что каждая строка соответствует фиксированному n , а позиции внутри строки показывают разные k .



Симметрия ответов

Строки треугольника симметричны, поэтому $C(n, k) = C(n, n-k)$. Это удобно для проверки: если числа слева и справа не совпадают, в вычислении допущена ошибка.

Типичные ошибки в комбинаторных задачах

Порядок перепутан

Одна из самых частых ошибок — использовать сочетание там, где порядок важен, или наоборот. Полезно мысленно переставить элементы и проверить, изменится ли ответ.

Повторный счет

Иногда одинаковые варианты считают несколько раз, потому что их записывают в разном порядке. Тогда число ответов получается больше нужного, и формула уже не подходит.

Неверная формула

Ошибка возникает, когда не замечают, выбирают ли все объекты или только часть. Из-за этого перестановку, размещение и сочетание легко спутать между собой.

Забытый факториал

Еще одна проблема — пропущенный факториал в числителе или знаменателе. Такая неточность сразу меняет результат, поэтому запись формулы нужно проверять особенно внимательно.

Формулы комбинаторики на коротких примерах



Таблица показывает, как одна и та же тема дает разные ответы в зависимости от ситуации.

Если порядок учитывается, ответ обычно больше. Если выбирают только набор без порядка, число вариантов уменьшается.

Случай	Пример	Ответ	Порядок
Перестановки	4 книги	24	важен
Размещения	2 из 5	20	важен
Сочетания	2 из 5	10	не важен

Стандартные формулы комбинаторики для 9 класса.



Комбинаторика в жизни и технологиях



Пароль, который нужно перебрать

Даже короткий цифровой пароль быстро дает много вариантов. Если в нем 4 цифры, то возможны 10000 комбинаций, поэтому при создании кодов важно заранее оценивать их надежность и длину.



Расписание без накладок

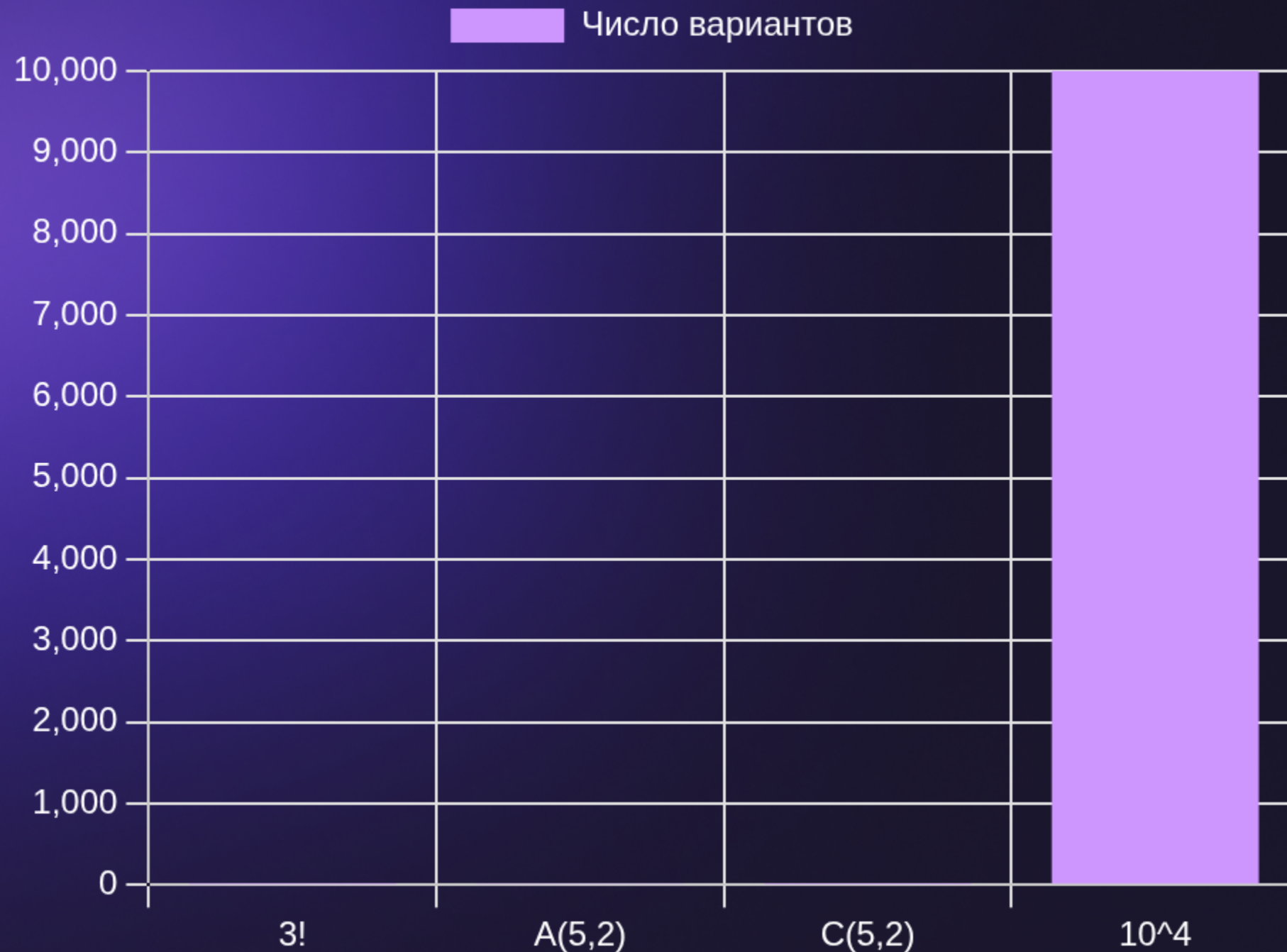
При составлении расписания нужно распределить уроки, кабинеты и учителей так, чтобы не возникло совпадений. Здесь комбинаторный подсчет помогает заранее увидеть, сколько вариантов можно рассмотреть без ошибок.



Маршрут и поиск решения

В навигаторе и поисковых алгоритмах перебираются разные пути, чтобы выбрать удобный или короткий. Комбинаторика показывает, как много способов существует даже в простой задаче выбора маршрута.

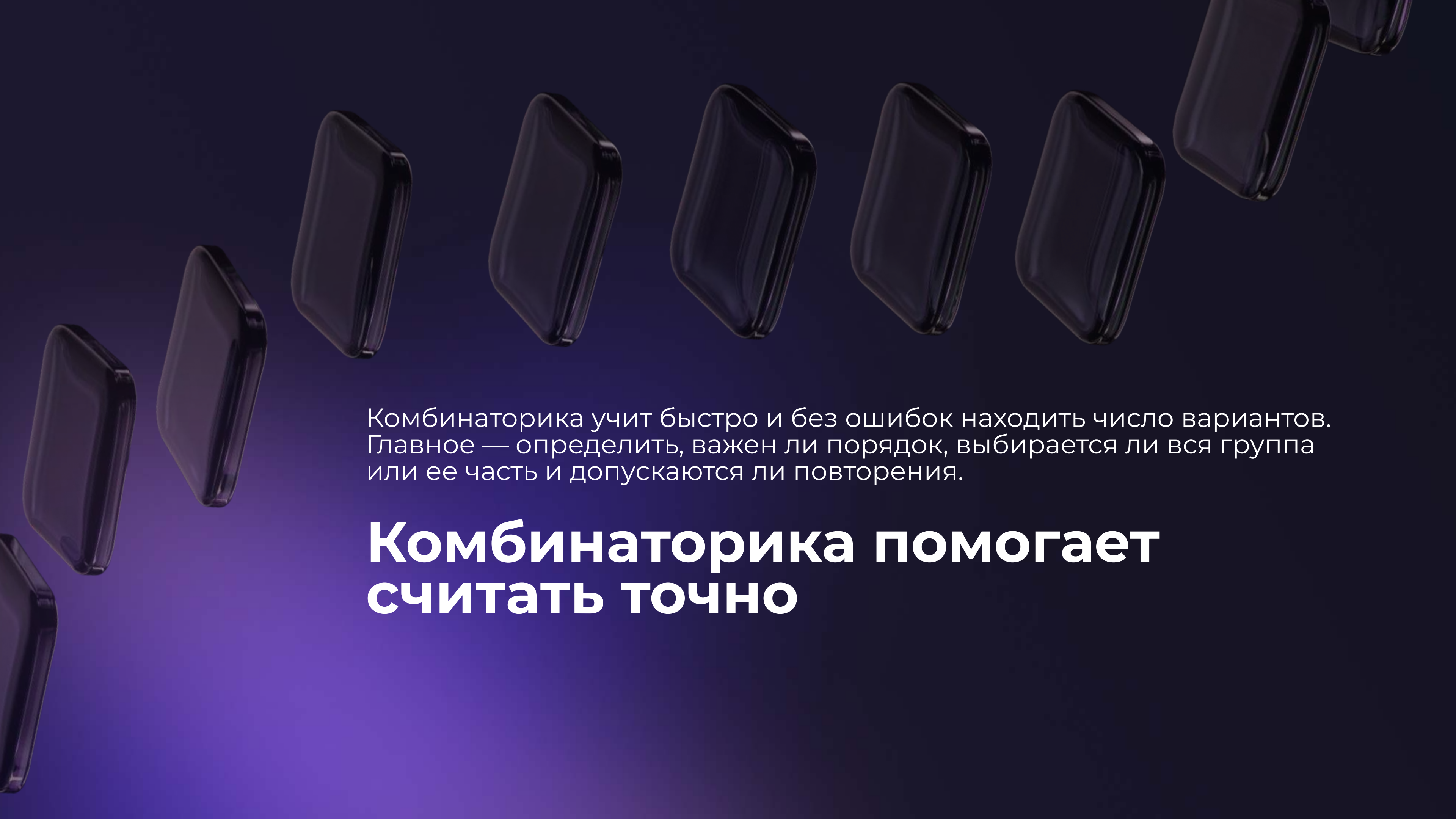
Сравнение числа вариантов в разных задачах



На диаграмме видно, что разные формулы описывают задачи с очень разным количеством решений, даже если условия кажутся похожими.

Размещения дают больше вариантов, чем сочетания при одинаковом выборе части объектов, а повторения резко увеличивают число возможных комбинаций.

Значения вычислены по стандартным формулам: $3!$, $A(5,2)$, $C(5,2)$, 10^4 .



Комбинаторика учит быстро и без ошибок находить число вариантов. Главное — определить, важен ли порядок, выбирается ли вся группа или ее часть и допускаются ли повторения.

Комбинаторика помогает считать точно