

Гомотетия: увеличение и уменьшение фигур

Гомотетия сохраняет форму, но меняет размеры в одно и то же число раз.



Где встречается гомотетия в школьной геометрии

Эта тема помогает увидеть, как одинаковые по форме фигуры могут быть разными по размерам. В 8 классе гомотетия связывает подобие треугольников, масштабы и задачи на поиск неизвестных длин.



Определение гомотетии

Точка O называется центром гомотетии. Каждая точка A переходит в точку A' , лежащую на прямой OA .

Расстояние меняется так: $OA' = |k| \cdot OA$, где k — коэффициент гомотетии. Знак влияет на сторону относительно центра.

Если $k > 0$, точка A' находится по ту же сторону от центра O , что и A . При $k < 0$ — по другую сторону.

Коэффициент k показывает, во сколько раз меняются размеры фигуры; при $k = 2$ увеличивается в 2 раза, при $k = 0,5$ уменьшается в 2 раза. Знак задаёт направление относительно центра.

k^2

**При изменении
масштаба площадь
меняется в квадрате
коэффициента.**

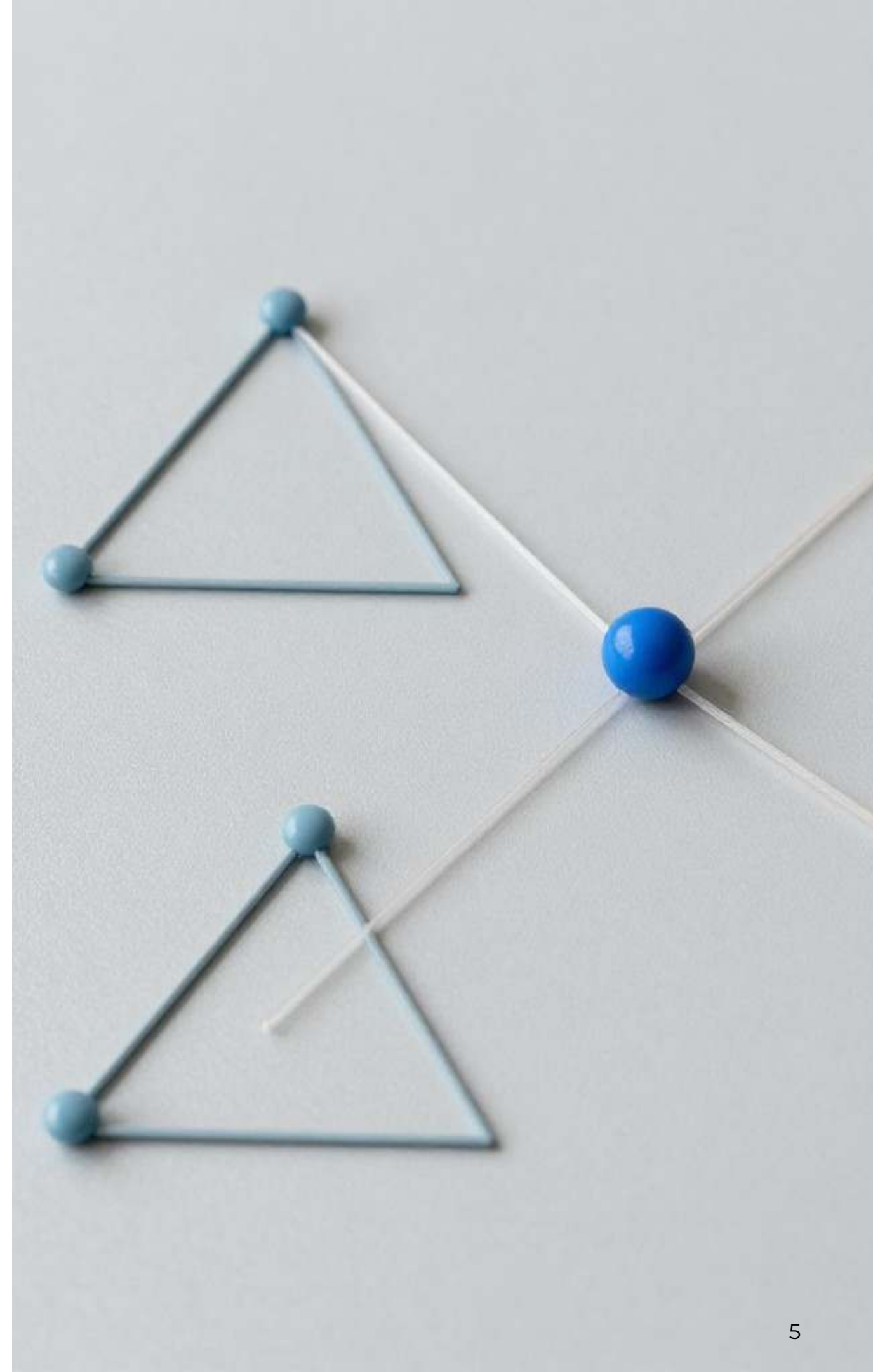
Центр гомотетии и расположение соответствующих точек

Прямая с центром

Все соответствующие точки исходной фигуры и её образа лежат на прямых через центр O . Для точки A удобно рассмотреть луч OA и понять, где будет расположена точка A' .

Как влияет знак k

Если коэффициент k положительный, точки A и A' окажутся на одном луче. При $k < 0$ они будут на одной прямой, но по разные стороны от центра O , что меняет направление.



Что сохраняется при гомотетии



Форма

После преобразования фигура остаётся подобной исходной: её очертания сохраняются. Меняются только размеры, а общая геометрия не теряется.



Углы

Соответствующие углы остаются равными. Поэтому можно сравнивать фигуры и решать задачи, опираясь на угловые измерения без пересчёта формы.



Пропорции сторон

Стороны переходят в пропорциональные отрезки: равенства заменяются пропорциями. При $k \neq 1$ стороны не сохраняются численно, но их отношения одинаковы.

Что меняется при гомотетии

Линейные размеры меняются в $|k|$ раз: длины сторон переходят в отрезки большего или меньшего размера. Это же правило работает для всех масштабных измерений в фигуре.

Периметр тоже изменяется в $|k|$ раз, потому что все стороны получают один и тот же множитель. Поэтому сумма длин увеличивается или уменьшается пропорционально масштабу.

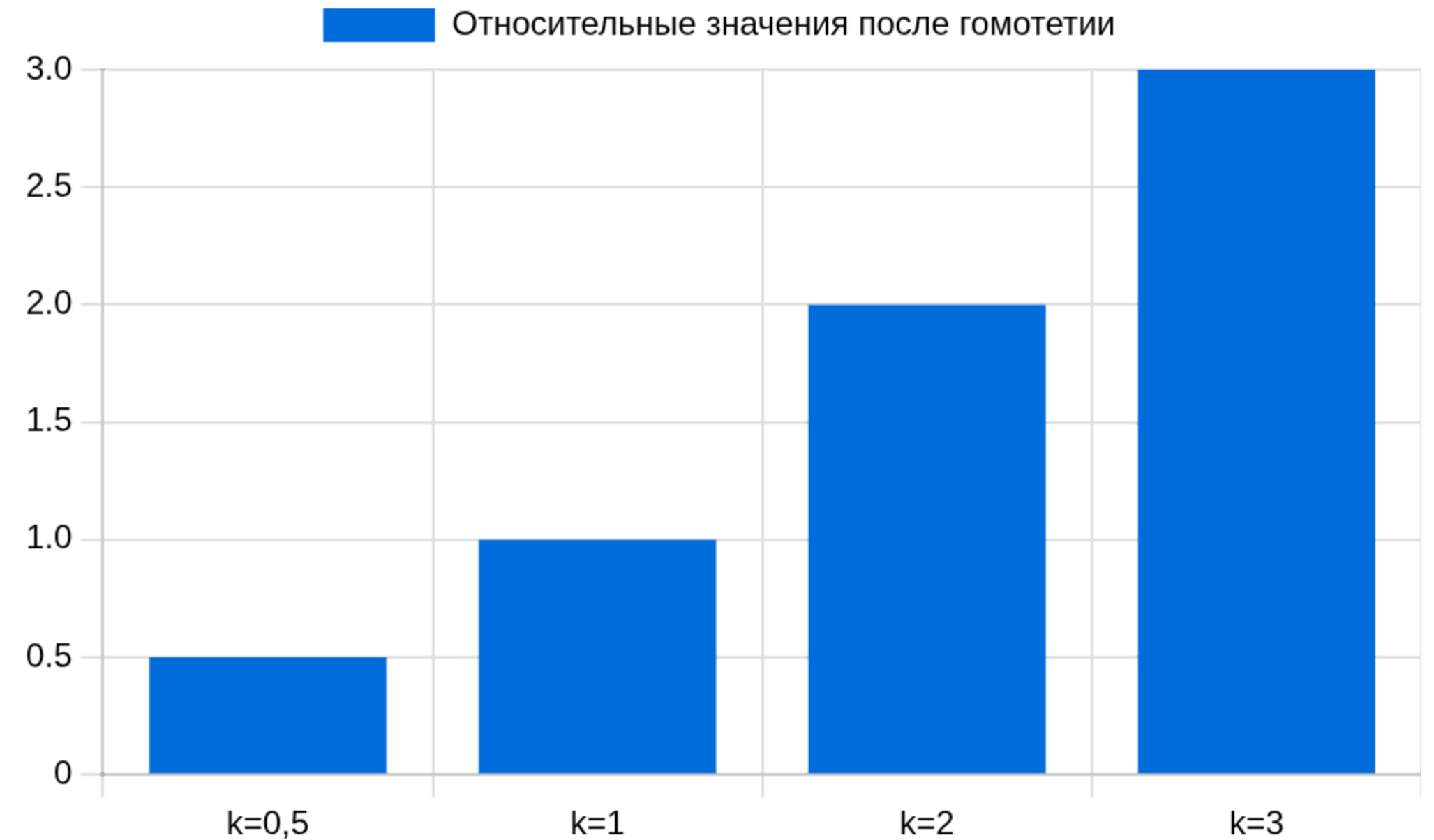
Площадь меняется в k^2 раз: она зависит сразу от двух линейных размеров. Из-за квадрата она растёт или уменьшается заметно быстрее, чем периметр.

Например, при $k = 3$ периметр увеличивается в 3 раза, а площадь — в 9 раз. Такое отличие важно при задачах на масштабирование.

Как коэффициент влияет на размер фигуры

Если сравнить разные k , то видно: линейный размер растёт прямо пропорционально. Площадь меняется иначе — она связана с k^2 , поэтому «обгоняет» линейный рост.

При увеличении коэффициента разница между периметром и площадью становится заметнее. Это помогает правильно оценивать результаты масштабирования.



Свойства гомотетии: линейный множитель $|k|$ и множитель площади k^2 .

Сравнение свойств при разных значениях k

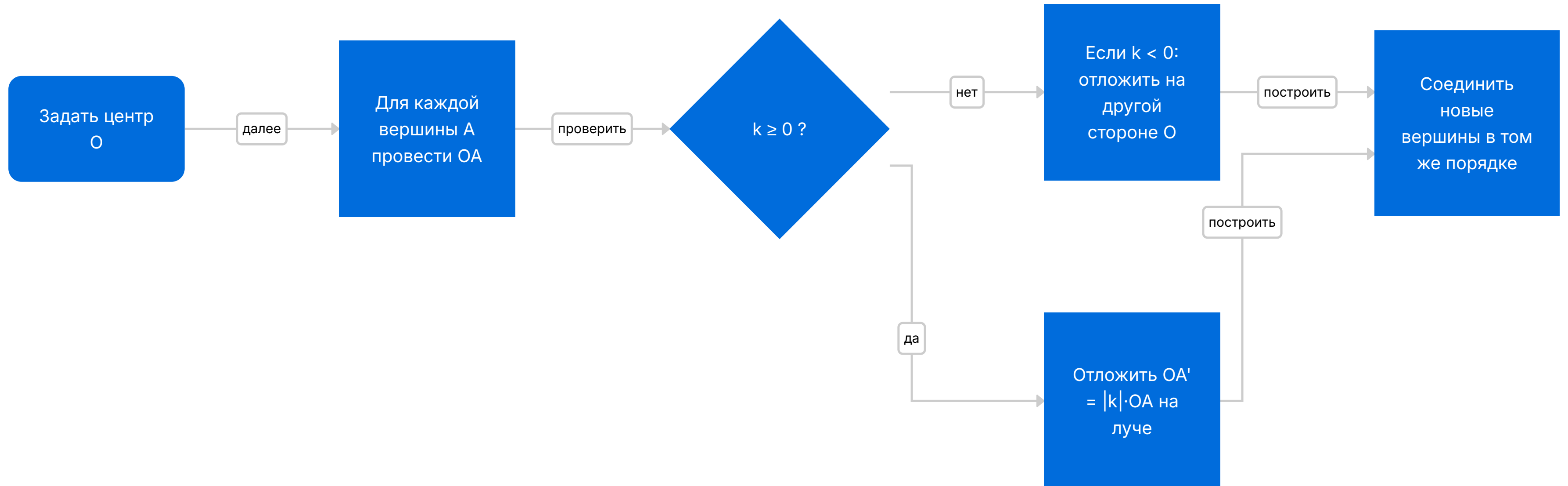
k	положение A'	изменение размера	направление	итог
2	на том же луче	увеличение в 2 раза	не меняется	увеличение
0,5	на том же луче	уменьшение в 2 раза	не меняется	уменьшение
-2	по другую сторону	увеличение в 2 раза	меняется	увеличение с разворотом

Таблица показывает, как модуль коэффициента влияет на размер, а знак — на расположение точки относительно центра.

Модуль $|k|$ определяет величину изменения, а знак k — по какую сторону от центра окажется образ точки.

Построение образа фигуры при гомотетии

Алгоритм построения образа по центру O и коэффициенту k

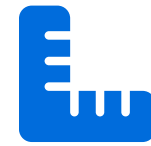


Гомотетия и подобие треугольников



Пропорциональные стороны

Если треугольник ABC переходит в $A'B'C'$, то соответствующие стороны связаны соотношениями $A'B'/AB = B'C'/BC = A'C'/AC = |k|$. Это означает одинаковый «масштаб» для всех сторон.



Одинаковые углы

Во время гомотетии углы сохраняются: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Поэтому треугольники остаются подобными, а различия касаются только размеров.



Нахождение неизвестных

Зная одну сторону и коэффициент $|k|$, можно найти соответствующую сторону образа. Если известна сторона AB , то $A'B' = |k| \cdot AB$, а затем теми же правилами восстанавливаются остальные отрезки.

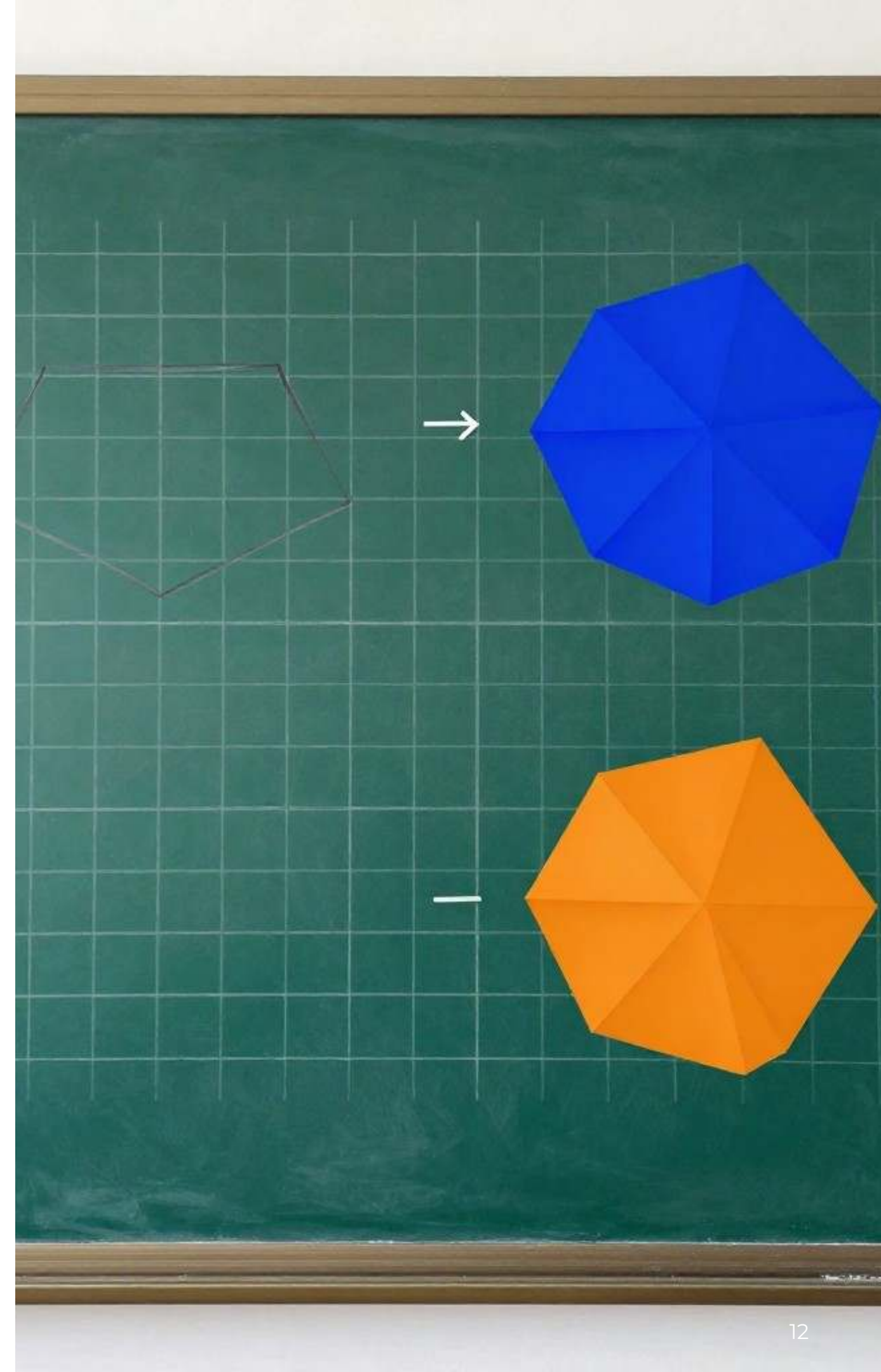
Гомотетия на координатной плоскости

Если центр гомотетии находится в начале координат O , точка (x, y) переходит в точку (kx, ky) . При $k = 2$ координаты удваиваются, а при $k = 0,5$ уменьшаются в 2 раза.

1

На координатной сетке удобно сравнивать исходную фигуру и её образ, отмечая каждую вершину отдельно. Тогда сразу видно, что гомотетия действует одинаково на x и y : всё «растягивается» или «сжимается» в одном масштабе.

2



Периметр и площадь после преобразования

Периметр фигуры при гомотетии изменяется в $|k|$ раз, потому что каждая сторона увеличивается (или уменьшается) в одно и то же число раз. Поэтому новая сумма длин просто масштабируется.

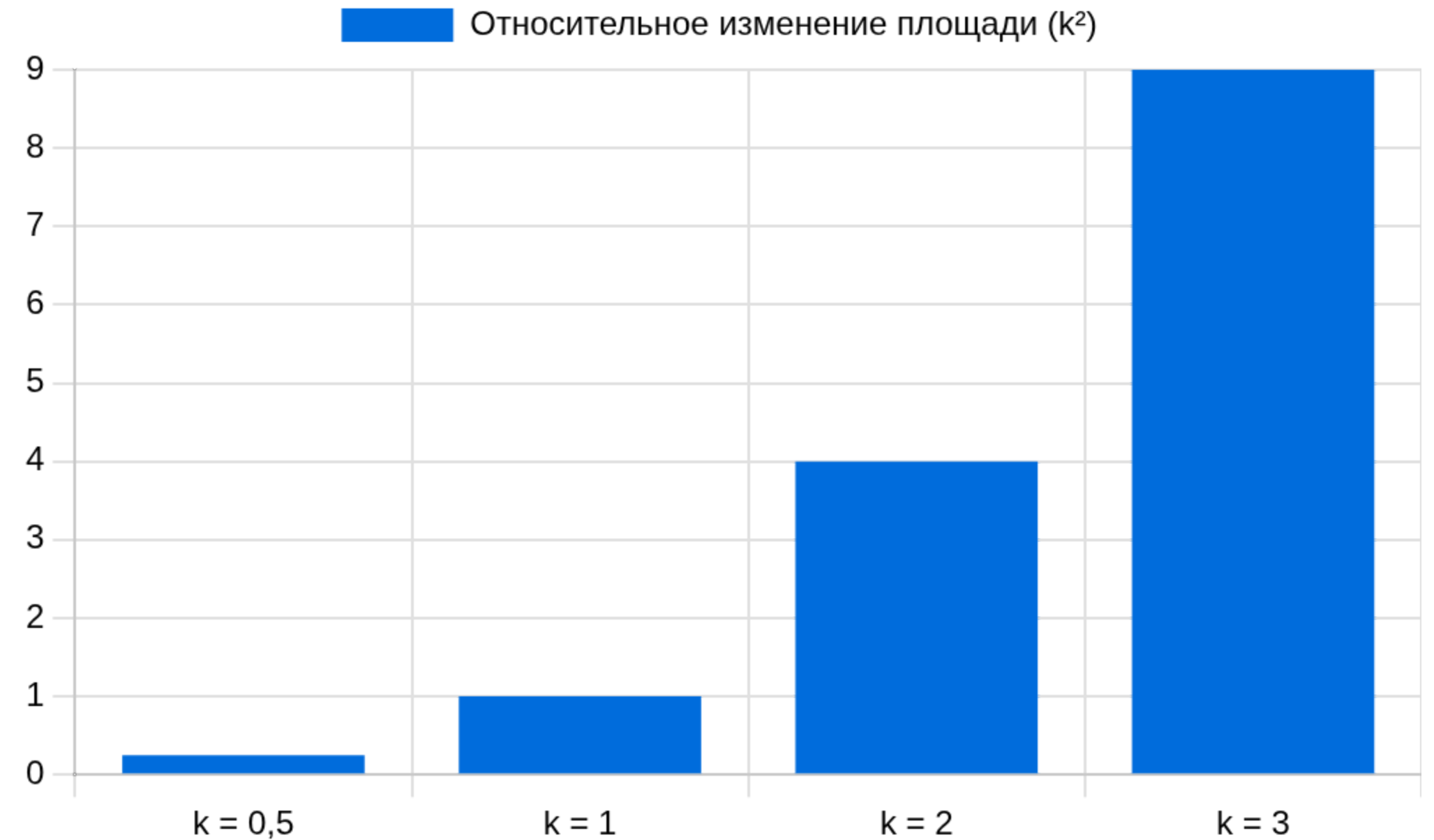
Площадь меняется в k^2 раз, так как зависит сразу от двух линейных размеров. При увеличении фигуры «по сторонам» одновременно растёт и длина, и ширина, а значит эффект усиливается.

Например, при $k = 4$ периметр увеличивается в 4 раза, а площадь — в 16 раз. Это помогает выбирать правильную формулу: для площадей всегда нужен квадрат коэффициента, а не модуль.

Изменение стороны, периметра и площади

На диаграмме показано, как растёт площадь. Линейные размеры и периметр при этом меняются в $|k|$ раз, то есть растут медленнее, чем площадь, потому что у площади коэффициент в квадрате.

Когда k увеличивается, площадь растёт намного быстрее: при $k = 3$ она становится в 9 раз больше. Поэтому в задачах про площади почти всегда видна сильная «прибавка» по сравнению с размерами.



Расчёт по формулам гомотетии: площадь масштабируется как k^2 (значения k : 0,5; 1; 2; 3).

Частные случаи гомотетии

При $k = 1$ гомотетия превращается в тождественное преобразование: каждая точка остаётся на месте, а фигура совпадает с самой собой. По сути, масштаб изменения равен 1.

Если $k = -1$, происходит центральная симметрия относительно точки O : точки переходят на противоположную сторону центра на таком же расстоянии. Поэтому размеры не меняются, но меняется направление от центра.

Когда центр гомотетии совпадает с вершиной фигуры, эта вершина не меняет положения, так как расстояние от неё до центра равно нулю. Остальные точки двигаются по лучам через O .

Эти ситуации удобно использовать в задачах: они помогают проверить, правильно ли учитываются знак k и соответствие точек одной прямой с центром. Безошибочное понимание частных случаев ускоряет решение.

Числовые примеры гомотетии

Исходное значение	k	Результат	Комментарий
Отрезок 6 см	2	12 см	$ k \cdot 6$
Отрезок 6 см	0,5	3 см	уменьшение в 2 раза
Точка	-2	на другой стороне O	расстояние в 2 раза больше

Составлено на основе правил гомотетии: линейные размеры масштабируются на $|k|$, координаты — на k .

В таблице показано, как по исходному значению и коэффициенту k находят результат гомотетии. Для длин используется модуль $|k|$, а для точек важен ещё и знак k .

Значение $|k|$ отвечает за величину изменения, а знак k — за расположение точки относительно центра. Поэтому при отрицательном k направление меняется, а расстояние возрастает или убывает по $|k|$.

Гомотетия в реальной жизни

Масштаб на картах

На картах всё уменьшено, но форма объектов сохраняется. Если расстояния на карте в несколько раз меньше реальных, то к этому же «масштабу» сводится гомотетия. Благодаря подобию удобно сравнивать направления и формы улиц.



Модели зданий

Макеты зданий выглядят как уменьшенные копии: окна, крыши и планировка повторяют исходные формы. Разница только в размерах, поэтому модель остаётся подобной оригиналу. Это наглядный пример того, как гомотетия «копирует» форму при другом масштабе.



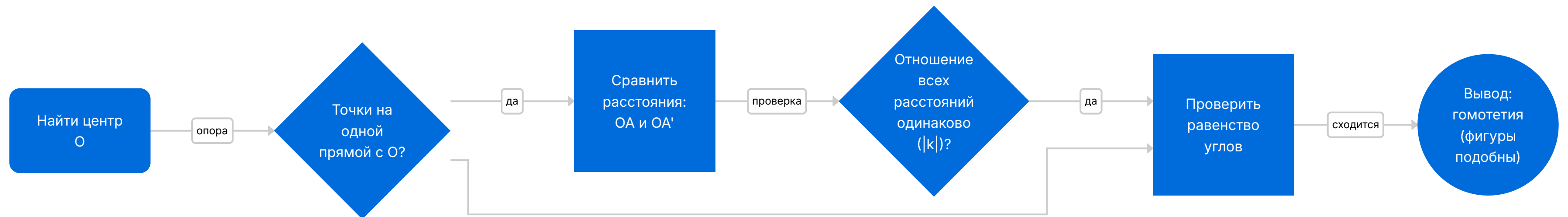
Увеличение изображений на экране

Если поменять масштаб фотографии или схемы в графическом редакторе, рисунок не «искажится», а просто станет больше или меньше. Такая операция подчиняется тому же принципу: сохраняются формы и углы, а координаты и размеры меняются равномерно. Поэтому элементы выглядят пропорционально.



Как распознать гомотетию в задаче

Проверка выполняется по шагам: центр → направление на лучах → пропорциональность размеров.



Типичные ошибки при изучении гомотетии

Частая ошибка — путать гомотетию с переносом: при переносе все точки смещаются на один и тот же вектор. При гомотетии точки связаны с единым центром и лежат на лучах через O .

Другая ошибка — игнорировать знак коэффициента k . Тогда точка может оказаться на той же стороне от центра, хотя при $k < 0$ она должна перейти на противоположную сторону, сохраняя правильное расстояние по $|k|$.

Также нередко забывают про площадь: она меняется в k^2 раз, а не в $|k|$ раз. Поэтому при вычислениях по площади сразу используют квадрат коэффициента, иначе получится неверный ответ.

Ошибки возникают и при построении: точку строят на продолжении луча, но расстояние до центра берут неточно. В результате нарушается отношение $OA' = |k| \cdot OA$, и фигуры уже не будут связаны гомотетией.

Гомотетия — это «масштаб», который сохраняет форму

Гомотетия меняет размеры фигуры, но сохраняет её форму и углы. Центр O и коэффициент k полностью задают преобразование, а модуль $|k|$ определяет масштаб изменения. Понимание связи с подобием помогает решать задачи 8 класса и читать реальные схемы, карты и модели.